Ασκήσεις

Άσκηση 1:

Θεωρούμε το συναρτησιακό ενέργειας

$$J_\epsilon(u) = \int_\Omega \frac{\epsilon^2}{2}|\nabla u|^2 + F(u)\,dx$$

Να δείξετε για την περίπτωση της Cahn-Hilliard εξίσωσης ότι ισχύει

$$\frac{d}{dt}J_\epsilon(u(x,t)) \leq 0.$$

Έστω μια διαδικασία *Wiener* της μορφής

$$W(t) := \{W(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\}$$

ορισμένη στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)_{W(0,\omega)=0}$.

Άσκηση 2: Να διατυπώσετε τον ορισμό της παραγώγου *Malliavin* για ομαλές συναρτήσεις της μορφής

$$F = f[W(h_1), \cdots, W(h_n)]$$

όπου $h_1, \cdots h_n$ ανήκουν στο χώρο *Hilbert*, H, $n \in \mathbb{N}^*$, με την συνάρτηση f να είναι απείρως παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, με πολυωνυμική αύξηση όπως και οι αντίστοιχες μερικές παραγώγοι της.

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί η παράγωγος *Malliavin* των παρακάτω στοχαστικών συνάρτησεων

$$F_1(\omega) = \int_0^T h(t)dW(t)$$

και

$$F_2(\omega) = \exp(W(t_0)),$$

όπου $t,\ t_0 \in [0,T]$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $H = \mathbb{R}$ και επίσης ότι $h = \mathbf{I}_{[0,T]}(t),\ h \in H$ για την δείκτρια συνάρτηση της μορφής $\mathbf{I}_{[0,T]}(t)$.

Άσκηση 4: Να υπολογίσετε την παράγωγο *Malliavin* της F όταν:

$$F(\omega) = 3W(s_0)W^2(t_0) + \ln(1 + W^2(s_0))$$

όπου ισχύει ότι $s_0, t_0 \in [0,T]$.