

## Αριθμητική Ανάλυση

### Φυλλάδιο Ασκήσεων 4

Παράδοση: 13/1/2022

1. Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$u''' = x^2uu'' - uv'$$

$$v'' = xv' + 4u'.$$

Γράψτε το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων ως ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως  $y' = f(x, y)$ . Βρείτε μια σταθερά Lipschitz  $L$  για την  $f$  στο  $[0, 1] \times \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_\infty \leq 1\}$ .

2. Δείξτε ότι η μέθοδος Euler αποτυγχάνει να προσεγγίσει τη λύση  $y(t) = t^{3/2}$  του προβλήματος

$$y'(t) = 1.5y(t)^{1/3}, \quad y(0) = 0.$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Βρείτε τις τιμές των  $a$  και  $b$  ώστε η 3-βηματική μέθοδος

$$y_{n+3} + a(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = hb(f(t^{n+2}, y_{n+2}) + f(t^{n+1}, y_{n+1})),$$

να έχει τάξη ακρίβειας 4 και δείξτε ότι η μέθοδος που προκύπτει δεν ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.

4. Έστω  $p(z) = z^4 - 1$ . Βρείτε πολώνυμο  $\sigma(z)$  τέταρτου βαθμού έτσι ώστε η αντίστοιχη πολυβηματική μέθοδος να έχει μέγιστη τάξη ακρίβειας. Ποιά είναι η τάξη ακρίβειας;