

## Euler - 2ο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

Θεωρήσαμε τη μέθοδο του Euler. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του  $[a, b]$ , στα σημεία  $t_n = a + nh$ ,  $n = 0, \dots, N$ , με βήμα  $h = \frac{b-a}{N}$ , υπολογίζουμε τις τιμές  $y_n$  που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές  $y(t_n)$ ,  $n = 0, \dots, N$ , όπου

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

## Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t), \quad t \in [0, 2\pi], x(0) = 1, y(0) = 0$$

Η ακριβή λύση είναι απλό να δούμε ότι είναι  $x(t) = \cos(t)$ ,  $y(t) = \sin(t)$ .

**Παράδειγμα:** Θεωρήστε μια διαμέριση του  $[0, 2\pi]$ , με  $N = 100$  και εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις  $(x_n, y_n)$  των  $(x(t_n), y(t_n))$ ,  $n = 0, \dots, N$ .

1. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο  $t$ .
2. Επειδή  $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$ , δημιουργείστε τη γραφική παράσταση ανάμεσα στις  $(x(t), y(t))$ . Παρατηρήστε ότι είναι κύκλος στο πεδίο  $xy$ .
3. Βρείτε το  $\max_{0 \leq n \leq N} (x_n^2 + y_n^2)$ . Ισχύει  $x_n^2 + y_n^2 = 1$ ; Στη συνέχεια δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων  $(x_n, y_n)$  στο πεδίο  $xy$ . Δημιουργείτε έναν κύκλο;

```
In [1]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

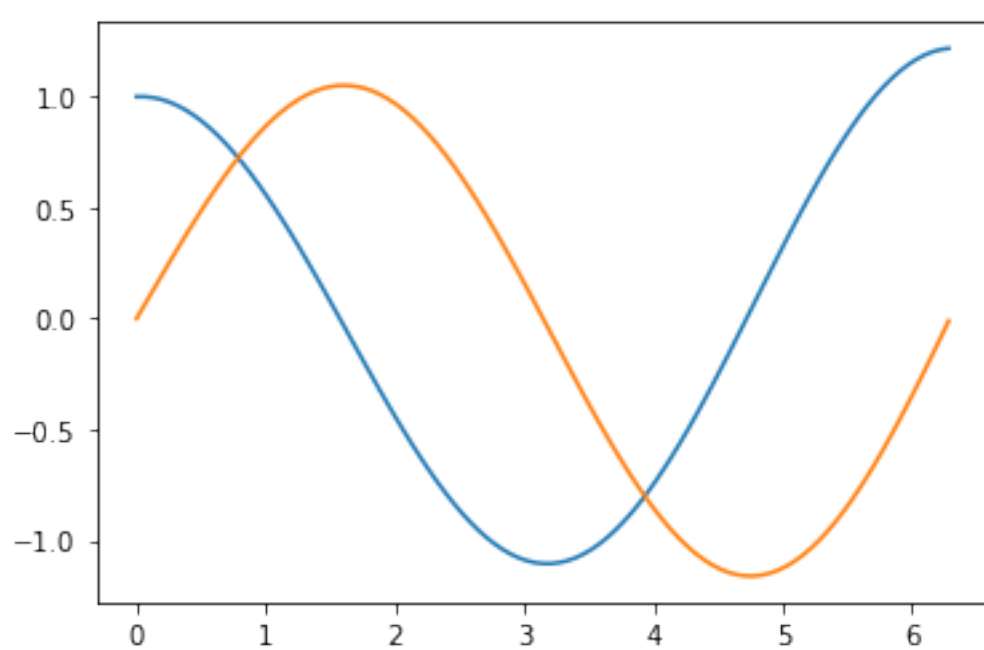
```
def f1(t,x,y):
    return -y
def f2(t,x,y):
    return x

#Διαμερισμός
N=100
t=np.linspace(0,2*np.pi,N+1)
h=t[1]-t[0]

# θεσεις για να αποθηκευω τις προσεγγισεις
x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)
x[0]=1
y[0]=0

#Μεθοδος Euler για συστήματα
for i in range(N):
    x[i+1]=x[i]+h*f1(t,x[i],y[i])
    y[i+1]=y[i]+h*f2(t,x[i],y[i])

plt.plot(t,x,t,y)
plt.show()
```

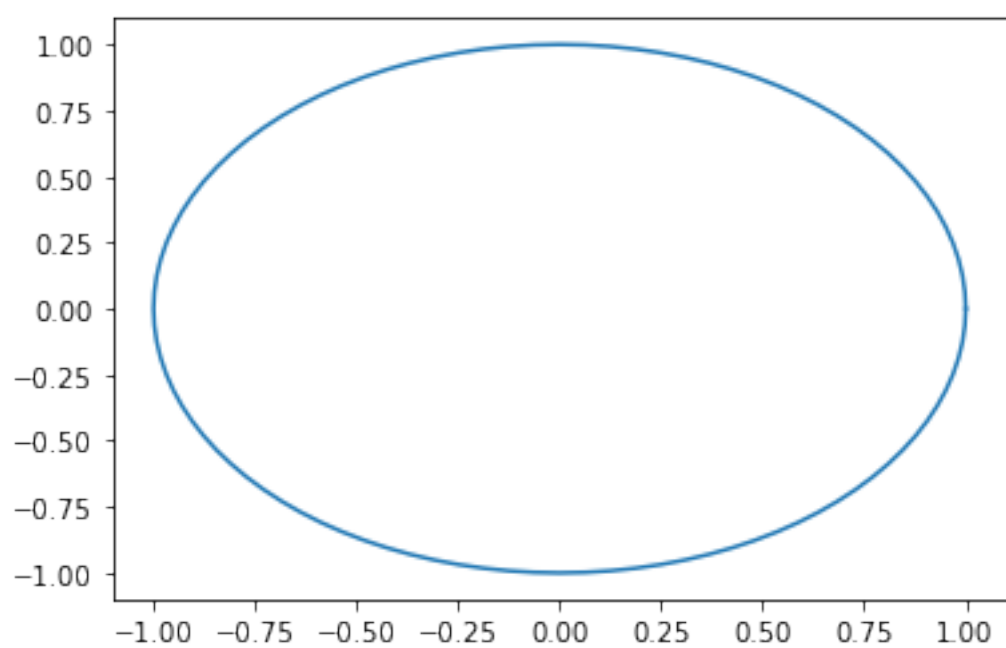


```
In [2]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def x_exact(t):
    return np.cos(t)
def y_exact(t):
    return np.sin(t)

#Διαμερισμός
N=100
t=np.linspace(0,2*np.pi,N+1)

plt.plot(x_exact(t),y_exact(t))
plt.show()
```



```
In [3]: import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
def f1(t,x,y):
    return -y
def f2(t,x,y):
    return x

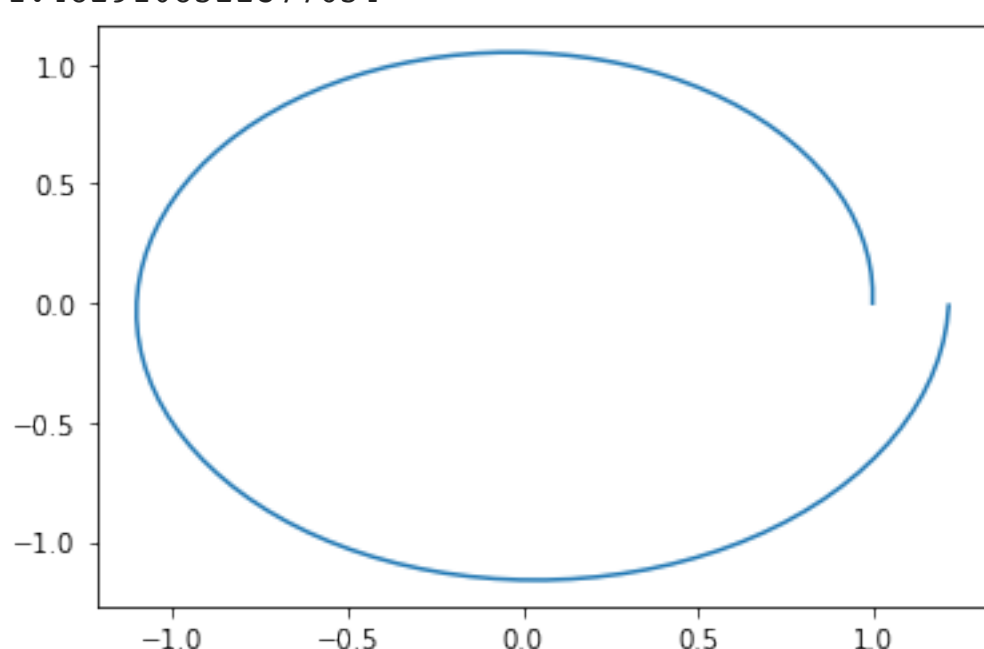
#Διαμερισμός
N=100
t=np.linspace(0,2*np.pi,N+1)
h=t[1]-t[0]

# θεσεις για να αποθηκευω τις προσεγγισεις
x=np.zeros(N+1)
y=np.zeros(N+1)
x[0]=1
y[0]=0

#Μεθοδος Euler για συστήματα
for i in range(N):
    x[i+1]=x[i]+h*f1(t,x[i],y[i])
    y[i+1]=y[i]+h*f2(t,x[i],y[i])

## Στην Numpy η παρακάτω πράξη γίνεται σε κάθε στοιχείο των διανυσμάτων x,y
s=max(x**2+y**2)
print(s)
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

1.4829108522377654



```
In [ ]:
```