

**ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ - ΠΡΟΟΔΟΣ 3**  
**ΜΑΘ 231 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ**  
**ΑΝΑΛΥΣΗ**  
**ΘΕΜΑΤΑ Α**

Τα Θέματα 1 και 2 αποτελούν την Πρόοδο 3.  
Τα Θέματα 1 έως και 5 αποτελούν το Τελικό Διαγώνισμα.

Όσοι επιθυμούν να βαθμολογηθούν μόνο για την 3η πρόοδο πρέπει να γράψουν τα θέματα 1 και 2 και να παραδώσουν την κόλλα τους σε 1 ώρα. Όσοι επιθυμούν να βαθμολογηθούν μόνο με βάση το τελικό διαγώνισμα πρέπει να γράψουν τα θέματα 1 έως 5 και να παραδώσουν την κόλλα τους σε 2 ώρες και 30 λεπτά.

**ΘΕΜΑΤΑ**

1. Αποδείξτε ότι υπάρχουν βάρη  $w_1, w_2, w_3$ , τέτοια ώστε ο τύπος ολοκλήρωσης

$$Q(f) = w_1 f(0) + w_2 f'(0) + w_3 f(1), \quad f \in C^1[0, 1],$$

να ολοκληρώνει στο  $[0, 1]$  πολυώνυμα μέχρι και δεύτερου βαθμού ακριβώς, δηλαδή

$$\int_0^1 f(x) dx - Q(f) = 0, \forall f \in \mathbb{P}_2.$$

2. Η συνάρτηση  $f$  ποιές ιδιότητες μιας φυσικής κυβικής spline έχει και ποιές δεν έχει;

$$f(x) = \begin{cases} (x+1) + (x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ 4 - (x-1) - (x-1)^3, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

3. Έστω  $\|\cdot\|$  μια νόρμα στον  $\mathbb{R}^n$  και η παραγόμενη από αυτήν νόρμα στον  $\mathbb{R}^{n \times n}$ . Έστω  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ένας αντιστρέψιμος πίνακας και  $\kappa(A)$  ο δείκτης κατάστασης του  $A$  ως προς  $\|\cdot\|$ . Αν  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  αντιστρέψιμος πίνακας, αποδείξτε ότι

$$\frac{\|B^{-1} - A^{-1}\|}{\|B^{-1}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|A - B\|}{\|A\|}$$

4. Αν οι πίνακες  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  έχουν αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο τότε οι  $-A, A^2, A - B$ , έχουν αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο; Αν ναι δικαιολογήστε την απάντησή σας, αν όχι, δώστε παράδειγμα.
5. Αποδείξτε ότι η εξίσωση  $f(x) = xe^{x+2} + 2 = 0$  έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες  $\rho_1 \in (-1, 0)$  και  $\rho_2 = -2$ . Αποδείξτε ότι η ακολουθία  $x_n, n \geq 0$ , που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση  $f(x) = 0$ , συγκλίνει στην  $\rho_1$  για κάθε  $x_0 > -1$ . Στη συνέχεια θεωρείστε τη μέθοδο σταθερού σημείου με  $\phi(x) = -2e^{-(x+2)}$ . Δείξτε ότι το σταθερό σημείο της  $\phi$  αποτελεί και ρίζα της  $f$ . Βρείτε ένα διάστημα γύρω από τη ρίζα  $\rho_1$ , για το οποίο η μέθοδος του σταθερού σημείου να συγκλίνει.

Ηράκλειο, 27 Ιουνίου 2013.

Καλή επιτυχία.