ΠΡΟΟΔΟΣ 2
ΜΑΘ 231 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ
ΘΕΜΑΤΑ Α

1. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^{n\times n}$ και $\|\cdot\|$ η παραγόμενη από αυτή φυσική νόρμα πινάκων. Δείξτε ότι αν υπάρχει $\theta > 0$, τέτοιο ώστε $\|Ax\| \geq \theta\|x\|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $\|A^{-1}\| \leq 1/\theta$.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$. Αν $q \in \mathbb{P}_2$, τέτοιο ώστε $q(0) = f(0)$, $q'(0) = f'(0)$ και $q(1) = f(1)$. Κατασκευάστε το q, δείξτε ότι είναι μοναδικό καθώς και ότι για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x) - q(x) = \frac{1}{6}x^2(x-1)e^{\xi}.$$

3. Αν $x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in [0,1]$, τα σημεία $x_i = \dfrac{i}{4}$, $i = 0,\dots,4$ και $L_i \in \mathbb{P}_4$ τα πολυώνυμα παρεμβολής Lagrange ως προς τα σημεία x_i, $i = 0,\dots 4$. Δείξτε ότι

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) + L_4(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1].$$

Ηράκλειο, 21 Μαίου 2013.

Καλή επιτυχία.