Άσκηση: Δείξτε με αντιπαράδειγμα ότι $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|A\| = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$ δεν ορίζει μια νόρμα πινάκων

Απόδειξη.

Πρέπει να ισχύουν οι εξής ιδιότητες

i) $\|A\| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0$

ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

iii) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

iv) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|A\| = \|B\| = 1$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \|AB\| = 2 < 1 \cdot 1 \quad \text{Άτοπο}$$

(Δεν ισχύει η iv)

Άσκηση: Δείξτε ότι η $\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορίζει μια νόρμα πινάκων.

Απόδειξη

i) $\|A\| = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \Rightarrow |a_{ij}| = 0 \, , \, i,j = 1,\ldots,n \Rightarrow A = 0$

ii) $\|\lambda A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = |\lambda| \, \|A\|$

iii) $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A + B = C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n} \, , \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\|A+B\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \|A\| + \|B\|$$

iv) $A \cdot B = C$, $\quad C = (c_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $\quad c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{il}| |b_{lj}|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{il}| \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{lj}| \right)$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} |a_{il}| \right) \left(\sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |b_{mj}| \right) = \|A\| \cdot \|B\|$$

Άσκηση. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Δείξτε ότι ο A δεν είναι θετικά ορισμένος, με το να βρείτε ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^2$ τ.ω. $x^T A x < 0$. Στη συνέχεια δείξτε ότι ο αλγόριθμος Cholesky αποτυγχάνει να ολοκληρωθεί.

Απόδειξη: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$x^T A x = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 < 0 \quad (!)$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 < -4x_1x_2 \quad , \quad x_1 = 1, \; x_2 = -1$$

$$x^T A x < 0$$

$$A = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} \\ 0 & L_{22} \end{pmatrix}$$

$$L_{11}^2 = a_{11} = 1 \Rightarrow L_{11} = 1 > 0$$

$$L_{21} \cdot L_{11} = 2 \Rightarrow L_{21} = 2$$

$$L_{21}^2 + L_{22}^2 = 2 \Rightarrow 4 + L_{22}^2 = 2 \Rightarrow L_{22}^2 = -2 < 0$$ Δεν υπάρχει $L_{22} > 0$

Δεν είναι θετικά ορισμένος

Άσκηση. Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0 \in [0,1]$,

$x_{n+1} = \frac{1}{3}(2 + x_n - e^{x_n})$ συγκλίνει και το όριό της είναι στο $[0,1]$

Απόδειξη: $\varphi(x) = \frac{1}{3}(2 + x - e^x)$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει το Θ. συστολής για τη φ στο $[0,1]$

$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(1 - e^x)$, $\varphi''(x) = -\frac{1}{3}e^x < 0$

Η φ' είναι φθίνουσα, $\max\limits_{0\le x\le 1} |\varphi'(x)| = \max(|\varphi'(0)|, |\varphi'(1)|)$

$\varphi'(0) = \frac{1}{3}(1-1) = 0$, $|\varphi'(1)| = \frac{1}{3}|(1-e)| < 1$

Άρα φ' φθίνουσα συνάρτηση, $\varphi'(x) \leq 0$, $x \in [0,1]$

Η φ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$. $\varphi(0) = \frac{1}{3}(2 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{3}$

$\varphi(1) = \frac{1}{3}(2 + 1 - e) = \frac{1}{3}(3 - e) > 0$, $\varphi(1) < 1$

Επομένως $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$, $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| < 1 \Rightarrow$ Από το Θ. σύγκλισης η

$x_n \to x^* \in [0,1]$

Άσκηση: Έστω $x_{n+1} = \frac{1}{6}\left(3 + 4x_n^2 - e^{x_n}\right)$, $x_0 \in [0,1]$

Δείξτε ότι η ακολουθία συγκλίνει και το όριο της x^* βρίσκεται στο $[0,1]$, επίσης δείξτε ότι

$$|x_n - x^*| < \frac{a^n}{1-a}|x_1 - x_0|, \quad a = \frac{8-e}{6}$$

Απόδειξη: $\varphi(x) = \frac{1}{6}\left(3 + 4x^2 - e^x\right)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{6}\left(8x - e^x\right), \quad \varphi''(x) = \frac{1}{6}\left(8 - e^x\right)$$

Προφανώς $\varphi''(x) > 0$ στο $[0,1]$ $\Rightarrow$ η φ' αύξουσα

$$\varphi'(0) = \frac{1}{6}(0 - e^0) = -\frac{1}{6}, \quad \varphi'(1) = \frac{1}{6}(8-e) < \frac{1}{6}(8-2.5) = \frac{5.5}{6} > \frac{1}{6}$$

Άρα $\max_{0 \le x \le 1} |\varphi(x)| < \frac{5.5}{6} < 1$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

$$\varphi(x) = \frac{1}{6}\left(3 + 4x^2 - e^x\right)$$

$$3 + 4x^2 \leq 3 + 4 \quad \text{στο } [0,1]$$
$$-e^x \leq -e^0 = -1$$

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{6}(7 - 1) = 1$$

$$3 + 4x^2 \geq 3 \quad \text{στο } [0,1]$$
$$-e^x \geq -e$$

$\varphi(x) \geq \frac{1}{6}(3 - e) > 0$. Συνεπώς $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

Άρα $x_n \to x^* \in [0,1]$

Αν $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ & $x_n \to x^*$, και φ είναι αναγωγή με $L<1$, (Lipschitz)

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$ (Αποτέλεσμα του θεωρήματος αναγωγής)

$$L = \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi'(x)| = |\varphi'(1)| = \frac{1}{6}(8-e)$$

<u>Άσκηση</u> : Έστω $\varphi:[0,1]\to[0,1]$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με αρνητική παράγωγο στο $[0,1]$ και x^* σταθερό σημείο της φ. Αποδείξτε ότι υπάρχει θετικός αριθμός ρ τ.ω. για κάθε $x_0\in[0,1]$ η ακολουθία

$$x_{n+1}=\frac{1}{1+\rho}\left[\varphi(x_n)+\rho x_n\right],\quad n\geq 0,$$ να συγκλίνει στο x^*

<u>Απόδειξη</u> . $f(x)=\frac{1}{1+\rho}\left(\varphi(x)+\rho x\right)$, $x\in(0,1)$, $f(x^*)=x^*$

$x_{n+1}=f(x_n)$, $x_{n+1}\to x^*$ (;)

$$0\leq \underbrace{\frac{1}{1+\rho}\left(\varphi(x)+\rho x\right)}_{f(x)}\leq\frac{1}{1+\rho}(1+\rho)=1$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\rho}\left(g'(x)+\rho\right) \leq \frac{\rho}{1+\rho} < 1$$

Για να δείξουμε ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. συστολής, πρέπει

$$\max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| < 1$$

Θέλουμε να επιλέξουμε ρ τ.ω. $f'(x) > 0$

Αν επιλέξουμε $g'(x) \geq -\rho/2$ για $x \in [0,1]$

$$g'(x) + \rho > -\rho/2 + \rho = \rho/2 \Rightarrow \text{ άρα η } f'(x) > 0$$

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = x^3 + x - 1$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ρ, $\rho \in (0,1)$. Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που παράγει η μέθοδος του Νεύτωνα για την εξίσωση $f(x) = 0$ συγκλίνει στη ρ, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - \rho}{(x_n - \rho)^2} = \frac{2\rho}{3\rho^2 + 1}$$

<u>Απόδειξη</u>: $f(0) = -1$, $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ Στο $[0,1]$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, η f είναι αύξουσα

Άρα θα έχει μόνο μια ρίζα ρ, $\rho \in (0,1)$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

<u>i) $x_0 > 0$</u>

$$f(0) = -1 < 0$$
$$f'(x) > 0 \ , \quad \forall x > 0$$
$$f''(x) = 6x > 0 \ , \quad \forall x > 0$$

Απο θεωρημα που δειξει, για καθε $x_0 > 0$ θα εχουμε οτι η (x_n) συγκλινει στη ριζα ρ της f

ii) $x_0 < 0$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad , \quad f(x_0) < 0 \quad , \quad f'(x_0) > 0$$

$$> x_0$$

Ι$\underline{\underline{\text{η}}}$ περίπτωση $\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τέτοια ώστε $x_n < 0$

$$x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \dots < 0$$

Η (x_n) αύξουσα και άνω φραγμένη από το 0

Επομένως $x_n \to \xi$, $n \to \infty$, $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \xi = \xi - \dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)} \Rightarrow f(\xi) = 0$ & $\xi \leq 0$, Άτοπο

$2^η$ <u>περίπτωση</u> Αν $x_0 < 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, υπάρχει n τω

$x_n > 0$

Οπότε είμαστε στην περίπτωση που ξεκινάμε την ακολουθία με

$x_0 > 0$

Άρα $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n \to \rho \in (0,1)$

$$x_{n+1} - \rho = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \rho = (x_n - \rho) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (x_n - \rho) - \frac{f(x_n) - f(\rho)}{f'(x_n)}$$

$$f(\rho) = f(x_n) + (\rho - x_n) f'(x_n) + \frac{(\rho - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$, ξ_n ανάμεσα στο x_n & ρ

$$x_{n+1} - \rho = x_n - \rho - \frac{f(x_n) - f(\rho)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \rho - \frac{-(\rho - x_n) f'(x_n) - \frac{(\rho - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \frac{(\rho - x_n)^2}{2} \quad \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_{n+1} - \rho}{(x_n - \rho)^2} = \frac{1}{2} \quad \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2} \quad \frac{f''(\rho)}{f'(\rho)} = \frac{1}{2} \quad \frac{6\rho}{3\rho^2 + 1} = \frac{3\rho}{3\rho^2 + 1}$$

<u>Άσκηση</u>: Αποδείξτε ότι η $f(x)=2x^3-4x+1$ έχει 3 πραγματικές ρίζες. Θεωρείστε την ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος Newton για $x_0 \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του x_0 συγκλίνει σε κάποια ρίζα της f;

<u>Απόδειξη</u>

$f(-2)=-2\cdot 8+8+1<0 \qquad f(2)=2\cdot 8-8+1>0$

Άρα έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα

$f'(x)=6x^2-4, \quad f'(x)=0$ για $x^2=\frac{4}{6}$ ή $x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Άρα η $f'(x)>0$ στα $(-\infty,-\sqrt{2/3})$ και $(\sqrt{2/3},+\infty)$

και $f'(x)<0$ στο $(-\sqrt{2/3},\sqrt{2/3})$

$f(-\sqrt{2/3})=-2\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+4\sqrt{\frac{2}{3}}+1=(4-4/3)\sqrt{\frac{2}{3}}+1>0$

$f(\sqrt{2/3})=2\frac{2}{3}\sqrt{2/3}-4\sqrt{2/3}+1=-(4-4/3)\sqrt{2/3}+1<0$

Στο $\left(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$ έχει μόνο μια ρίζα (είναι μονότονη & αλλάζει πρόσημο στα άκρα)

Στο $\left(-\infty, -\sqrt{2/3}\right)$ είναι αύξουσα και
στο $f(-2) < 0$, $f\left(-\sqrt{2/3}\right) > 0$
άρα έχει μόνο μια ρίζα.

Παρόμοια στο $\left(\sqrt{2/3}, +\infty\right)$ έχει πάλι μόνο μια ρίζα

$\rho_1 \in \left(-\infty, -\sqrt{2/3}\right)$, $\rho_2 \in \left(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$, $\rho_3 \in \left(\sqrt{2/3}, +\infty\right)$

$f''(x) = 6x$ και $f''(x) > 0$, $x > 0$ & $f''(x) \leq 0$, $x < 0$

Στο $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ εχει μονο μια ριζα (ειναι μονοτονη & αλλαζει προσημο στα άκρα)

Στο $(-\infty, -\sqrt{2/3})$ ειναι αύξουσα και στο $f(-2)<0$, $f(-\sqrt{2/3})>0$

άρα έχει μονο μια ριζα.

Παρομοια στο $(\sqrt{2/3}, +\infty)$ έχει παλι μονο μια ριζα

$\rho_1 \in (-\infty, -\sqrt{2/3})$, $\rho_2 \in (-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$, $\rho_3 \in (\sqrt{2/3}, +\infty)$

$f''(x) = 6x$ και $f''(x) > 0$, $x>0$ & $f''(x) \leq 0$, $x<0$

Έστω $x_0 \in \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty\right)$

$a > \sqrt{\frac{2}{3}}$, $f(a) < 0$, $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$,

$f''(x) > 0$, $\forall x \in [a, +\infty)$

Άρα από θεώρημα που έχουμε δείξει η (x_n) με τη μέθοδο του Newton θα συγκλίνει $x_n \to \rho_3$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $x_0 \in (-\infty, -\sqrt{2/3})$ τότε $f'(x_0) > 0$

Αν $x_0 \in (\rho_1, -\sqrt{2/3})$ τότε $f(x_0) > 0$ και $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0$

και $0 = f(\rho_1) = f(x_0) + (\rho_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(\rho_1 - x_0)^2}{2} \underbrace{f''(\xi)}_{-}$, $\rho_1 < \xi < x_0 < 0$

$0 < f(x_0) + (\rho_1 - x_0) f'(x_0)$ ή $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < \rho_1$

Εξετάζουμε λοιπόν την περίπτωση $x_0 < \rho_1 < -\sqrt{\frac{2}{3}}$

Τότε $f(x_0) < 0$ & $f'(x_0) > 0$. Συνεπώς

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$$ και ακόμα

$$0 = f(\rho_1) = f(x_0) + (\rho_1 - x_0) f'(x_0) + \frac{(\rho_1 - x_0)^2}{2} \underbrace{f''(\xi)}_{-} , \quad x_0 < \xi < \rho_1 < 0$$

Οπότε $$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < \rho_1$$

Συνεπώς επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι προκύπτει μια αύξουσα ακολουθία των $x_n < x_{n+1} < \rho_1$, η οποία επειδή είναι άνω φραγμένη θα συγκλίνει και μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι θα συγκλίνει στη ρίζα ρ_1

Έστω τώρα $x_0 = \pm\sqrt{2/3}$, τότε δεν μπορούμε να ορίσουμε το επόμενο σημείο x_1 και η μέθοδος δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Έστω τώρα ότι $x_0 \in \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $f(0) = 1 > 0$ επομένως η ρίζα $\rho_2 \in \left(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$, $\rho_2 > 0$

Αν τώρα $0 < x_0 < \rho_2 < \sqrt{\frac{2}{3}}$, θα έχουμε $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) < 0$

επομένως $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$ και

$$0 = f(\rho_2) = f(x_0) + (\rho_2 - x_0) f'(x_0) + \frac{(\rho_2 - x_0)^2}{2} \underbrace{f''(\xi)}_{+}, \quad 0 < x_0 < \xi < \rho_2$$

$$0 > f(x_0) + (\rho_2 - x_0) f'(x_0) \quad \text{ή} \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < \rho_2$$

Μπορούμε λοιπόν να δείξουμε επαγωγικά ότι προκύπτει μια αύξουσα ακολουθία φραγμένη από το ρ_2

και στη συνέχεια να δείξουμε ότι συγκλίνει στο ρ_2

Έστω τώρα $\rho_2 < x_0 < \sqrt{2/3}$ τότε $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) < 0$ τότε

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0 \text{ ,} \quad \text{επίσης}$$

$$0 = f(\rho_2) = f(x_0) + (\rho_2 - x_0) f'(x_0) + \underbrace{f''(\xi)}_{+} \frac{(\rho_2 - x_0)^2}{2} \text{ ,} \quad 0 < \rho_2 < \xi < x_0$$

Άρα $\quad 0 > f(x_0) + (\rho_2 - x_0) f'(x_0)$ ή $\quad x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} < \rho_2$

Αν x_0 είναι "κοντά" στο $\sqrt{2/3}$ τότε $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$, και

ο παρονομαστής είναι αρνητικός με μικρή απόλυτη τιμή. Οπότε x_1 μπορεί να γίνει μικρότερο από $-\sqrt{2/3}$, και έτσι θα συγκλίνει στη ρ_1.

Επομένως μένει η περίπτωση που $x_1 \in (-\sqrt{2/3}, \rho_2)$.

Αν $x_1 \in (0, \rho_2)$ τότε ερχόμαστε στην περίπτωση που έχουμε ήδη εξετάσει.

Έστω λοιπόν $x_0 \in (-\sqrt{2/3}, 0)$, τότε $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) < 0$

και $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$

Για x_0 "κοντά" στο $-\sqrt{2/3}$, $\quad x_1 = \dfrac{x_0 f'(x_0) - f(x_0)}{f'(x_0)}$ και ο

παρονομαστής γίνεται αρνητικός με μικρή απόλυτη τιμή οπότε το x_1 θα γίνει μεγαλύτερο από $\sqrt{2/3}$, και τότε θα είμαστε στην περίπτωση που θα συγκλίνει στη ρ_3.

Αν υποθέσουμε ότι το $x_0 < x_1 < 0$ και παράγεται μια ακολουθία τ.ω. $x_n < x_{n+1} < 0$ τότε αυτή θα είναι αύξουσα και φραγμένη και συνεπώς θα συγκλίνει σε κάποιο $-\sqrt{2/3} < \rho < 0$, $f(\rho) = 0$, το οποίο θα είναι άτοπο γιατί στο $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ υπάρχει μόνο μια ρίζα $\rho_2 \geq 0$.

Επομένως για κάποιο n, θα έχουμε ότι $x_n > 0$.

Αν $0 < x_n < \sqrt{2/3}$ εμπίπτει στην περίπτωση που έχουμε ήδη μελετήσει.

Επομένως, αν $x_0 > \sqrt{\frac{2}{3}}$ τότε η ακολουθία συγκλίνει στο ρ_3

αν $x_0 < -\sqrt{2/3}$ συγκλίνει στο ρ_1

Αν $x_0 \in (-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$ τότε υπάρχει η δυνατότητα να συγκλίνει είτε στο ρ_1, είτε στο ρ_2, είτε στο ρ_3.

Αν $x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ η μέθοδος δεν συγκλίνει