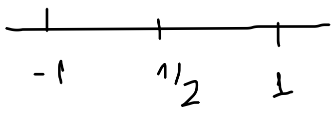
Ασκήσεις

1) Έστω $f(x) = 3(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-1)$. Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο διάστημα $[-2, 1.5]$ ποιά ρίζα της f θα προσεγγίσουμε; Αν ξεκινήσουμε από $[-1.25, 2.5]$

Οι ρίζες της f είναι $-1, \frac{1}{2}, 1$



Το πρώτο διάστημα είναι $[a_1, b_1] = [-2, 1.5]$

Για $x = -2$ και τα 3 μονώνυμα γίνονται αρνητικά άρα $f(-2) < 0$

Για $x = 1.5 = \frac{3}{2}$ και τα 3 μονώνυμα είναι θετικά άρα $f(1.5) > 0$

Οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης

$$x_1 = \frac{1}{2}(-2 + 1.5) = \frac{1}{2}(-0.5) = -0.25$$

Εύκολα βλέπουμε ότι για την τιμή $x_1 = -0.25$ το $(x_1+1) > 0$ & $(x_1 - \frac{1}{2})(x_1 - 1) > 0$

Άρα $f(x_1) > 0$ Οπότε στο επόμενο βήμα το διάστημα που επιλέγουμε είναι

$$[a_2, b_2] = [a_1, x_1] = [-2, -0.25]$$

Παρατηρούμε πλέον ότι η μόνη ρίζα της f η οποία βρίσκεται στο διάστημα $[-2, -0.25]$ είναι η $x=-1$. Συνεπώς η ρίζα που θα προσεγγίσει η μέθοδος είναι η $x=-1$.

Αν τώρα $[a_1, b_1] = [-1.25, 2.5]$, θα έχουμε ότι $f(-1.25)<0$, $f(2.5)>0$

και $x_1 = \frac{1}{2}[-1.25+2.5] = \frac{1.25}{2} = 0.625$

Για $x_1 = 0.625$ εύκολα βρίσκουμε ότι $(x_1 - 1) < 0$, $(x_1+1)(x_1 - \frac{1}{2}) > 0$

Οπότε $f(x_1) < 0$ και $[a_2, b_2] = [x_1, b_1] = [0.625, 2.5]$

Τώρα η μόνη ρίζα της f που ανήκει στο $[a_2, b_2]$ είναι η $x=1$

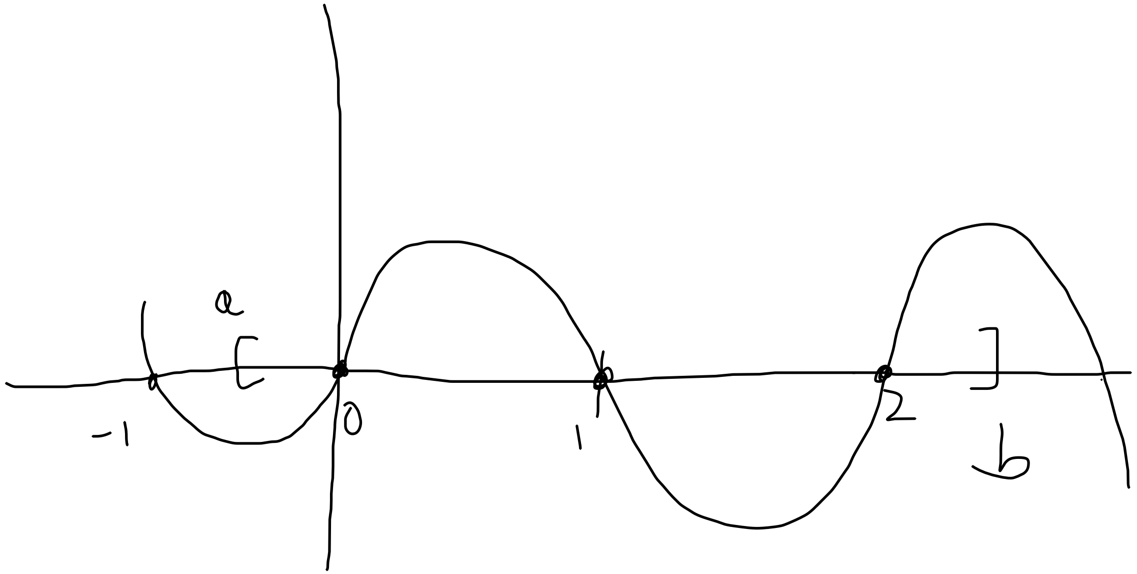
2) Η συνάρτηση $f(x) = \sin(\pi x)$ μηδενίζεται για $x \in \mathbb{Z}$

Δείξτε ότι αν $-1 < a < 0$ & $2 < b < 3$ τότε η μέθοδος διχοτόμησης στο διάστημα $[a, b]$ συγκλίνει

α) στο 0, αν $a+b < 2$

β) 2 αν $a+b > 2$

γ) 1 αν $a+b = 2$



Η $f(a) = \sin(a\pi)$, για $-1 < a < 0$

ώστε $\sin(a\pi) < 0$ γιατί η $\sin(x) < 0$ στο $(-\pi, 0)$

Επίσης $f(b) = \sin(b\pi)$, για $2 < b < 3$

και $\sin(b\pi) > 0$ γιατί $\sin(x) > 0$ στο $(2\pi, 3\pi)$

Ακόμα $[0,2] \subset [a,b] \subset (-1, 3)$

Στο $[0,2]$ η $\sin(\pi x)$ έχει 3 ρίζες $x = 0, 1, 2$

και στο $(-1,0) \cup (2,3)$ δεν έχει ρίζα.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο $[a,b]$ και ώστε

$x_1 = \frac{a+b}{2}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $x_1 = \frac{a+b}{2} > \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} > 0$

και $x_1 = \frac{a+b}{2} < \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$

i) Αν τώρα $a+b<2$ τότε $x_1<1$ Συνεπώς $0<x_1<1$

και $f(x_1)=\sin(\pi x_1)>0$, γιατί $\sin(x)>0$ στο $(0,\pi)$

Άρα το επόμενο διάστημα που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης είναι
$[a_2,b_2]=[a,x_1]$

Η μόνη ρίζα από τις 3, $x=0,1,2$ που ανήκει στο $[a,x_1]$ είναι η $x=0$

ii) Αν $a+b>2$ τότε $x_1>1$. Συνεπώς $1<x_1<\frac{3}{2}$

και $f(x_1)=\sin(\pi x_1)<0$, γιατί $\sin(x)<0$ στο $(\pi,\frac{3}{2}\pi)$

Άρα το επόμενο διάστημα, $[a_2,b_2]=[x_1,b]$
Η μόνη ρίζα από τις 3, $x=0,1,2$ που ανήκει στο $[x_1,b]$ είναι η $x=2$

iii) Αν $a+b=2$ τότε $x_1 = \frac{a+b}{2} = 1$ και η οποία είναι ρίζα της f

3) Η $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ έχει μόνο μια πραγματική ρίζα x^* στο $[1,2]$. Υπολογίστε τη $2^{η}$ προσέγγιση της x^* που δίνει η μέθοδος της διχοτόμησης. Πόσα βήματα απαιτούνται για τον υπολογισμό μιας προσέγγισης που απέχει το πολύ 10^{-6} από την x^*.

Η $f \in \mathbb{P}_3$ άρα θα έχει τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

$f'(x) = 3x^2 - 1$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

$f''(x) = 6x$

Για $x < 0$ η $f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)$ είναι φθίνουσα για $x < 0$

$x > 0$ η $f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ είναι αύξουσα για $x > 0$

Για $|x|$ μεγάλο, $f'(x) > 0$ και άρα
για $|x|$ μεγάλο, $f(x)$ αύξουσα

$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$, $f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 3 = 5 > 0$

Η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[1, 2]$

Για $x \geq 1 > \frac{1}{\sqrt{3}}$ η $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ αύξουσα

Συνεπώς στο $[1, 2]$ έχει μόνο μια ρίζα.

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της διχοτόμησης στο $[1, 2]$
οπότε η πρώτη προσέγγιση της ρίζας θα είναι $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27}{8} - \frac{3 \cdot 4}{8} - \frac{8}{8} = \frac{27-20}{8} = 7/8 > 0$$

Επομένως το επόμενο διάστημα θα είναι $[a_2, b_2] = [1, 3/2]$

Η $2^{η}$ προσέγγιση της ρίζας θα είναι $x_2 = \frac{1+3/2}{2} = \frac{5}{4} = 1.25$

Για να έχουμε ότι η n-οστή προσέγγιση απέχει από τη ρίζα 10^{-6}, σύμφωνα με τη πρόταση της σύγκλισης της μεθόδου της διχοτόμησης, που έχουμε δείξει,

$$|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n} < 10^{-6}$$

Επειδή $b-a=1$, αρκεί $\frac{1}{2^n} < 10^{-6}$ ή $2^n > 10^6$ ή

$$n \log_{10} 2 > 6 \text{ ή } n \geq \frac{6}{\log_{10} 2} \simeq 19.93$$

Άρα θέλουμε 20 βήματα.