Άσκηση: Έστω $x_0 \in [0,1]$. Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_{n+1} = \frac{1}{2}e^{x_n/2}$, $n\in\mathbb{N}$

συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο διάστημα $[0,1]$

Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{x/2}$, $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}$

Προφανώς $\varphi'(x) > 0$ στο $[0,1]$ και άρα η φ είναι αύξουσα στο $[0,1]$

Οπότε $\varphi(0) = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2} \leq \varphi(x) \leq \varphi(1) = \frac{1}{2}e^{1/2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$

Συνεπώς $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$. Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο της φ στο $[0,1]$.

Επειδή $\varphi'(x) = \frac{1}{4}e^{x/2}$, έχουμε ότι $\max\limits_{0\leq x\leq 1} |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{4}e^{1/2} < 1$

Άρα από το θεώρημα σταθερού σημείου που έχουμε δείξει υπάρχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο της φ στο $[0,1]$, $\varphi(x^*) = x^*$

και η επαναληπτική ακολουθία $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n \geq 0$, με $x_0 \in [0,1]$

συγκλίνει στο x^*.

Άσκηση: Για τον υπολογισμό της μοναδικής ρίζας της $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ στο $[1,2]$ προτείνονται οι παρακάτω συναρτήσεις, οι οποίες έχουν σταθερό σημείο τη ρίζα της f στο $[1,2]$. Διερευνήστε για ποιές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο σταθερού σημείου για να βρούμε τη ρίζα της f

α) $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

β) $g_2(x) = \sqrt{\dfrac{10}{x} - 4x}$

γ) $g_3(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$

δ) $g_4(x) = \sqrt{\dfrac{10}{4+x}}$

ε) $g_5(x) = x - \dfrac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$

Καταρχήν όπως $f(1) = 1+4-10 < 0$ και $f(2) = 8+4\cdot4-10 > 0$
και $f'(x) > 0$ στο $[1,2]$. Άρα έχει μοναδική ρίζα στο $[1,2]$

a) Αν x^* σταθερό σημείο της g_1, $g_1(x^*) = x^* \Leftrightarrow x^* - (x^*)^3 - 4(x^*)^2 + 10 = x^*$
$\Leftrightarrow (x^*)^3 + 4(x^*)^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow f(x^*) = 0$

Επίσης $g_1(1) = 1-1-4+10 = 6$, $g_1(2) = 2-8-16+10 = -12$
Οπότε $g_1([1,2]) \not\subset [1,2]$

$g_1'(x) = 1-3x^2-8x$, $g_1''(x) = -6x-8 < 0$ στο $[1,2]$
Άρα g_1' είναι φθίνουσα στο $[1,2]$, $g_1'(1) = 1-3-8 = -10$
και $|g_1'(x)| > 1$, $x \in [1,2]$

Συνεπώς δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος και δεν μπορούμε να
το σταθερό σημείο της g_1 στο $(1,2)$ με τη μέθοδο σταθερού σημείου

β)

$$g_2(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{x} - 4x} = x \quad , \quad x \in [1,2]$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{x} - 4x = x^2 \Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

$$g_2(1) = \sqrt{\frac{10}{1} - 4} = \sqrt{6} > \sqrt{4} = 2 \quad \& \quad g_2(2) = \sqrt{\underbrace{5-8}_{<0}} \quad \text{(Δεν ορίζεται)}$$

Δεν μπορούμε χρησιμοποιήσουμε την g_2

γ) $g_3(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{10-x^3} = x \Leftrightarrow \sqrt{10-x^3} = 2x \quad , x \in [1,2]$

$$\Leftrightarrow 10 - x^3 = 4x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3+4x^2-10 = 0$$

$$g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2\frac{1}{\sqrt{10-x^3}} < 0 \quad \text{στο } [1,2]$$

Άρα η g_3 είναι φθίνουσα στο $[1,2]$

$g_3(1) = \frac{1}{2}\sqrt{10-1} = \frac{3}{2} \in [1,2]$, $g_3(2) = \frac{1}{2}\sqrt{10-8} = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Επίσης $g_3'(2) = -\frac{3}{4}4\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} \approx -2.12 < -1$

Άρα στο $[1,2]$ δεν ισχύει το θεώρημα σταθερού σημείου

Όμως η g_3' είναι μονότονη στο $[1,2]$

$$g_3'(1) = -\frac{1}{4} \quad \text{και} \quad g_3'(3/2) = \dots = -\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{4}\,\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{53}} > -1$$

Άρα $\max\limits_{x\in[1,\frac{3}{2}]} |g_3'(x)| < 1$ και $g_3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{10-\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{8}} > 1$

και επειδή η g_3 είναι φθίνουσα, θα έχουμε ότι

$g_3 : [1, 3/2] \to [1, 3/2]$. Επομένως στο $[1, 3/2]$ μπορούμε να

εφαρμόσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου.

δ) $g_4(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{10}{4+x}} = x \Leftrightarrow x^2 = \frac{10}{4+x}, \quad x \in [1,2]$

$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

$g_4'(x) = \sqrt{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(4+x)^{3/2}} < 0$ στο $[1,2]$

Επίσης $|g_4'(x)| = \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{1}{(4+x)^{3/2}} \leq \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{1}{(4+1)^{3/2}} \leq \frac{\sqrt{10}}{2} \frac{1}{(\sqrt{5})\cdot 5} = \frac{1}{\sqrt{50}} < 1$

$g_4(1) = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2} \in (1,2)$, $g_4(2) = \sqrt{\frac{10}{6}} \in (1,2)$

Άρα για τη g_4 μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου ε) $g_5(x) = x \iff x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x} = x \iff x^3+4x^2-10=0$

$$g_5'(x) = 1 - \frac{(3x^2+8x)^2 - (x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2} = \frac{(x^3+4x^2-10)(6x+8)}{(3x^2+8x)^2}$$

Η $g_5'(x^*) = 0$, x^* είναι το σταθερό σημείο της g_5 στο $[1,2]$ και η ρίζα της f

Επίσης $g_5'(x) \leq 0$ στο $[1, x^*]$ και $g_5'(x) \geq 0$ στο $[x^*, 2]$

Άρα η g_5 είναι φθίνουσα στο $[1, x^*]$ και αύξουσα στο $[x^*, 2]$
Συνεπώς επειδή $g_5(x^*) = x^* \in [1,2]$, $g_5(1) = 1 + \frac{5}{11} \in (1,2)$, $g_5(2) = 2 - \frac{14}{28} \in (1,2)$
θα έχουμε $g_5: [1,2] \to [1,2]$. Επίσης μπορούμε να δείξουμε $|g_5'(x)| < 1, \forall x \in [1,2]$
Οπότε η g_5 ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρ. σταθερού σημείου.