Άσκηση: Για $x_0 \in \mathbb{R}$ αποδείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$x_{n+1} = \cos(x_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο x^*, $\cos(x^*) = x^*$

και ότι $$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n - x^*} = -\sqrt{1-(x^*)^2}$$

Επειδή $x_n \in [-1,1]$, $n \geq 1$, μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 \in [-1,1]$

Εύκολα βλέπουμε τώρα ότι $\varphi(x) = \cos(x)$, $\varphi : [-1,1] \to [-1,1]$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο $[-1,1]$

$\varphi'(x) = -\sin(x)$ και $|\varphi'(x)| = |\sin(x)|$

$$\max_{-1 \le x \le 1} |\varphi'(x)| \le \sin(1) < 1 \qquad \left(1 < \frac{\pi}{2}\right)$$

Από το Θεώρημα σταθερού σημείου έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό σταθερό σημείο $x^* \in [-1,1]$, $x^* = \varphi(x^*)$

Στο $[-1,1]$ η $\cos(x) > 0$, άρα $x^* > 0$

Τώρα $x_{n+1} - x^* = \varphi(x_n) - \varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n - x^*)$, ξ_n ανάμεσα στα x_n & x^*

Άρα
$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} = -\lim_{n\to\infty} \left(\sin(\xi_n)\right) = -\sin(x^*)$$
$$= -\sqrt{1 - \cos^2(x^*)} = -\sqrt{1 - (x^*)^2}$$

<u>Άσκηση</u>: Έστω $a_1=\sqrt{2}$, $a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, ..., $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

n-τετραγωνικές ρίζες

Χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο δείξτε ότι

$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-2}{a_n-2} = \frac{1}{4}$

Εύκολα βλέπουμε ότι αν $\varphi(x)=\sqrt{2+x}$, και $x_0=0$, η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$x_{n+1}=\varphi(x_n)$, λαμβάνει τις ίδιες τιμές με την $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Για να δείξουμε λοιπόν ότι η (a_n) συγκλίνει αρκεί να δούμε αν η φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου στο $[0,2]$

Έστω $x \in [0,2]$, τότε $2+x \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2+x} \leq 2$, $\varphi(x) \in [0,2]$

Άρα $\varphi : [0,2] \to [0,2]$

Επίσης $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ και $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2+0}} < 1$, $x \in [0,2]$

Συνεπώς από το θ. σταθερού σημείου η φ έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο $[0,2]$ και $\forall x_0 \in [0,2]$, η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $x_n \to x^* = \varphi(x^*)$

Άρα $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x^*$

Για να βρούμε το x^*, θέτουμε $x^* = \varphi(x^*) = \sqrt{2+x^*}$

το οποίο είναι $(x^*)^2 = 2 + x^*$ ή $(x^*)^2 - x^* - 2 = 0$.

Οι ρίζες του $x^2 - x - 2$ είναι $x = 2$ και $x = -1$

Επειδή $x^* \in [0,2]$, θα έχουμε ότι $x^* = 2$.

Επίσης $a_{n+1} - 2 = \varphi(a_n) - \varphi(2) = \varphi'(\xi_n)(a_n - 2)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2+\xi_n}}(a_n - 2)$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-2}{a_n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{2+\xi_n}} = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4}$

Άσκηση: Θεωρήστε την εξίσωση $x^2-6x+5=0$, της οποίας οι ρίζες είναι οι αριθμοί 1 και 5. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{x^2+5}{6}$. Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης θα είναι σταθερά σημεία της φ. Στη συνέχεια θεωρούμε την ακολουθία (x_n), $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Διερευνήστε τη συμπεριφορά της ακολουθίας (x_n), $n\geq 0$ για $x_0\in\mathbb{R}$.

Επειδή η φ είναι μια άρτια συνάρτηση, $(\varphi(x)=\varphi(-x))$, αρκεί να εξετάσουμε για $x_0\geq 0$.

Η $\varphi'(x)=\frac{2x}{6}=\frac{x}{3}$. Εξετάζουμε κατ'αρχήν για $x_0\in[0,3]$.

Παρατηρούμε ότι αν $x_0 \in [0,3]$, τότε $\varphi(x_0) \leq \frac{9+5}{6} = \frac{14}{6} < 3$

Επομένως $\varphi : [0, \frac{14}{6}] \to [0, \frac{14}{6}]$ και $\max_{x \in [0, \frac{14}{6}]} |\varphi'(x)| < \frac{1}{3} \cdot \frac{14}{6} = \frac{14}{18} < 1$

Άρα η φ στο $[0, \frac{14}{6}]$ έχει μοναδικό σταθερό σημείο, $x^* \in [0, \frac{14}{6}]$.

Συνεπώς αν $x_0 \in [0,3]$ η ακολουθία (x_n), $x_n \to x^* \in [0, \frac{14}{6}]$, $x^* = \varphi(x^*)$

Το σταθερό σημείο της φ στο $[0, \frac{14}{6}]$ είναι $x^* = 1$.

Στη συνέχεια θέλουμε να εξετάσουμε τι γίνεται αν $x_0 > 3$.

Παρατηρούμε ότι αν $x_0 = 5$, τότε $x_1 = \varphi(5) = \frac{30}{6} = 5$, ο αριθμός 5 είναι ρίζα της f και σταθερό σημείο της φ.

Η $f(x)=x^2-6x+5$, έχει $f'(x)=2x-6=2(x-3)>0$ για $x>3$

Άρα η f είναι αύξουσα στο $(3,+\infty)$ και γνωρίζουμε ότι έχει μόνο μια ρίζα στο $(3,+\infty)$ τη $x=5$.

Θέλουμε να μελετήσουμε αν η (x_n) είναι μονότονη.

$$x_{n+1}=\varphi(x_n)=\frac{x_n^2+5}{6},\quad \text{οπότε}\quad x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2+5}{6}-x_n=\frac{x_n^2-6x_n+5}{6}=\frac{f(x_n)}{6}$$

Συνεπώς για $x_0\in(5,+\infty)$, $f(x_0)>0$ και

$$x_1-x_0=\frac{f(x_0)}{6}>0 \Rightarrow x_1>x_0>5$$

Εύκολα βλέπουμε ότι επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι για $x_0>5$, (x_n) είναι αύξουσα

Άρα αν η ακολουθία συγκλίνει σε ένα αριθμό x^*, αυτό $x_n \to x^*$, τότε $g(x^*) = x^*$, είναι σταθερό σημείο

Όμως τα σταθερά σημεία είναι $x=1$ ή $x=5$
Οπότε η ακολουθία σε αυτή τη περίπτωση αποκλίνει, $x_n \to \infty$. (για $x_0 > 5$)

Απομένει να εξετάσουμε τη περίπτωση $x_0 \in (3,5)$.

Επειδή $x_1 - x_0 = \dfrac{f(x_0)}{6} < 0$, γιατί $f(x_0) < 0$

Θέλουμε να εξετάσουμε τώρα αν $x_1 \leq 3$ ή $x_1 > 3$
Στην πρώτη περίπτωση $(x_1 \leq 3)$ οδηγούμαστε σε προηγούμενη περίπτωση (που εξετάσαμε)

Έστω λοιπόν ότι η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_0 \in (3,5)$, και υπάρχει όρος x_m για το οποίο $x_m \leq 3$. Τότε ισχύουν αυτά που έχουμε στην περίπτωση που $x_0 \in [0,3)$.

Κάνουμε λοιπόν την υπόθεση ότι $x_0 \in (3,5)$ και κάθε όρος της ακολουθίας $3 < x_m$

Σύμφωνα με αυτό που έχουμε δείξει $3 < x_{m+1} < x_m < 5$

Άρα έχουμε μια ακολουθία φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Συνεπώς

$x_m \to \rho \in [3,5)$. Όμως δεν υπάρχει σταθερό σημείο της g στο $[3,5)$

Επομένως καταλήγουμε σε άτοπο.

Άσκηση: Θεωρούμε τις ακόλουθες αναρτήσεις

α) $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$, β) $\varphi_2(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\frac{1}{x}$ γ) $\varphi_3(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2x}$

Δείξτε ότι έχουν το $\sqrt{2}$ ως σταθερό σημείο. Μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε μια επαναληπτική ακολουθία η οποία να συγκλίνει στο $\sqrt{2}$. Ποια θα είναι η γρηγορότερη και ποια η πιο αργή και γιατί;

Καταρχήν βλέπουμε ότι $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2}x$ ή $x^2 = 2$

Οπότε το $x = \sqrt{2}$ είναι σταθερό σημείο της φ_1. Επίσης $\varphi_2(x) = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\frac{1}{x} = x$

ή $\frac{1}{3}x = \frac{2}{3}\frac{1}{x}$ ή $x^2 = 2$. Άρα και η φ_2 έχει σταθερό σημείο τη $\sqrt{2}$. Επίσης

$\varphi_3(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2x} = x$ ή $\frac{1}{4}x = \frac{1}{2x}$ ή $x^2 = 2$. Άρα και η φ_3 έχει σταθερό σημείο τη $\sqrt{2}$

Τώρα $\varphi_1'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$ και $\varphi_1'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$$\varphi_2'(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \quad \varphi_2'(\sqrt{2}) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\varphi_3'(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{x^2}\right), \quad \varphi_3'(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Η πιο γρήγορη μέθοδος θα ορίζεται από την φ_1 γιατί η παράγωγος στο σταθερό σημείο είναι 0. Επίσης οι φ_2 και φ_3 έχουν μη-μηδενική παράγωγο στο σημείο $\sqrt{2}$. Γνωρίζουμε ότι η τάξη σύγκλισης θα είναι 1, σε αυτή την περίπτωση και η πιο αργή θα είναι αυτή με τη μεγαλύτερη κατ' απόλυτο τιμή παράγωγο, δηλαδή η φ_3.

$$\frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|} \sim C = |\varphi'(x^*)|$$

$$\Rightarrow \quad |x_{n+1} - x^*| \simeq C\,|x_n - x^*|$$