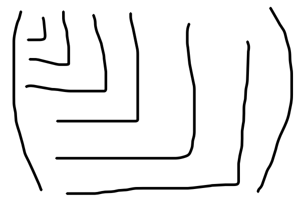
<u>Άσκηση</u>: Μια κατηγορία πινάκων για τους οποίους η ανάλυση LU μπορεί να γίνει χωρίς εναλλαγές γραμμών (δηλ. $A=LU$), είναι οι πίνακες

$A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ των οποίων οι κύριες υποορίζουσες δ_i που ορίζονται ως

$$\delta_1=a_{11}, \quad \delta_2=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}, \quad \delta_3=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & \cdots & a_{33}\end{pmatrix}, \quad A=$$



$\delta_n=\det(A)$, είναι όλες διάφορες του μηδενός.

Αν A είναι ένας τέτοιος πίνακας, δείξτε με επαγωγή ότι ο οδηγός στο i-βήμα της απαλοιφής Gauss, $a_{ii}^{(i)}\neq 0$, $i=1,\dots,n$ και άρα η απαλοιφή Gauss ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών

Το πρώτο βήμα γίνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών, διότι $\delta_1 = a_{11} \neq 0$.

Έστω τώρα ότι κάνουμε $(i-1)$ βήματα χωρίς να χρειαστεί να γίνει εναλλαγή γραμμών (δηλ. ο αντίστοιχος οδηγός είναι διαφορετικός του μηδέν)

Θέλουμε να δείξουμε ότι $a_{ii}^{(i)} \neq 0$ (ο οδηγός για να γίνει το i-βήμα)

Οι πράξεις που κάνουμε στον πίνακα A όταν εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss δεν αλλάζουν την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A, δηλαδή $\det(A) = \dots = \det(A^{(i)}) = \dots = \det(A^{(n)})$

Το ίδιο συμβαίνει και για τους κύριους υποπίνακες του A, έτσι για τον $A^{(i)}$,

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1i}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} \ \cdots & a_{2i}^{(2)} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{ii}^{(i)} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2i} \\ \vdots & & \ddots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} = \delta_i$$

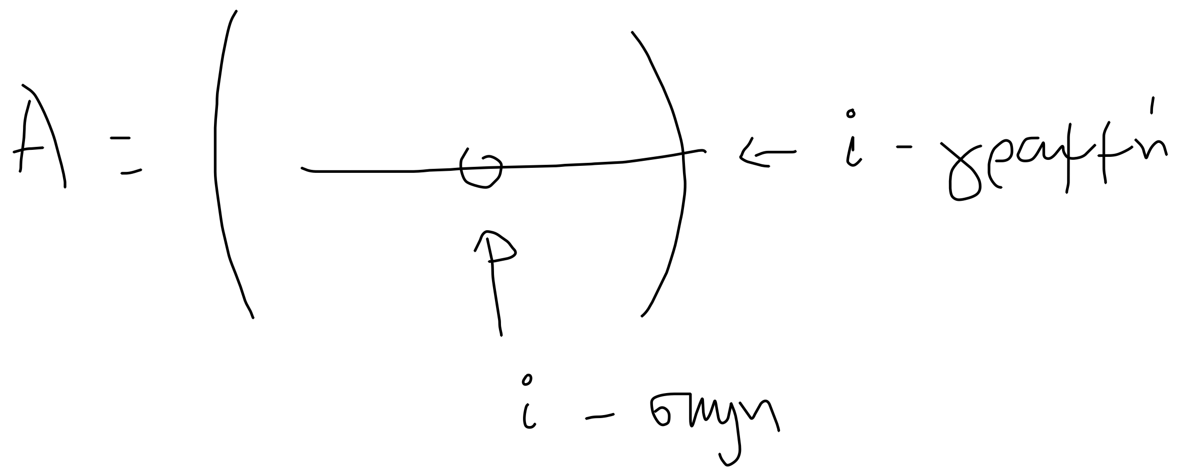
Επειδη, $\delta_i = a_{11}\, a_{22}^{(2)}\, a_{33}^{(3)} \dots a_{ii}^{(i)} \neq 0$

συμπεραίνουμε ότι $a_{ii}^{(i)} \neq 0$. Οπότε μπορουμε να κανουμε το

i-βημα της απαλοιφης Gauss χωρις εναλλαγή γραμμων.

__Ορισμός__: Λέμε ότι ο $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο (κατά γραμμές)

αν $$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}|$$



Άσκηση: Έστω ότι ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο (κατά γραμμές). Αποδείξτε ότι τότε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα ($Ax=0$) έχει μόνο την τετριμμένη λύση (δηλ $x=0$). Συνεπώς ο A είναι αντιστρέψιμος.

Στη συνέχεια δείξτε ότι η απαλοιφή Gauss γίνεται χωρίς εναλλαγή γραμμών

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα προηγούμενης άσκησης, ότι η απαλοιφή Gauss ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγή γραμμών αν οι ορίζουσες των κυρίων υποπινάκων του A είναι μη-μηδενικές.

Έστω $x \neq 0$ και αυτό είναι λύση του $Ax = 0$. Τότε θα έχουμε για

$1 \leq i \leq n$ $\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0$.

Συνεπώς επειδή ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$

$$x_i = \frac{-1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_j$$

Επίσης επειδή $x \neq 0$, υπάρχει ℓ τ.ω. $|x_\ell| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \neq 0$.

Οπότε $|x_\ell| \leq \frac{1}{|a_{\ell\ell}|} \sum_{\substack{j=1 \\ \ell \neq j}}^{n} |a_{\ell j}|\,|x_j| \leq |x_\ell| \frac{1}{|a_{\ell\ell}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} |a_{\ell j}| < |x_\ell|$,

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς $x = 0$

Αν τώρα ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο θέλουμε να δείξουμε ότι η απαλοιφή Gauss ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγή γραμμών.

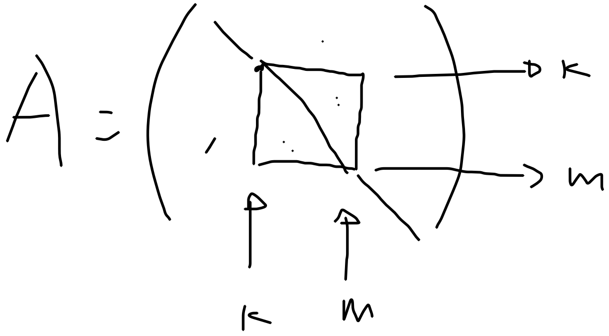
Επειδή ο A έχει αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, το ίδιο ισχύει και για τον κύριο υποπίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

. Άρα αντιστρέφεται και τότε $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix} = \delta_i \neq 0$

Τότε, σύμφωνα με προηγούμενη άσκηση η ανάλυση LU πραγματοποιείται χωρίς εναλλαγή γραμμών.

Άσκηση: Θεωρείστε ένα συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Δείξτε ότι όλοι οι υποπίνακες με στοιχεία $(a_{ij})_{i,j=k}^{m}$, με $1\le k\le m\le n$ είναι συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι.



Έστω $B=(a_{ij})_{i,j=k}^{m}$ με $1\le k\le m\le n$ υποπίνακας του A.

Ο B είναι προφανώς συμμετρικός.

Έστω $x\in\mathbb{R}^{m-k+1}$, $x\neq 0$. Τότε το $y\in\mathbb{R}^{n}$, $y_i=0$, $1\le i\le k-1$,

$y_{i+(k-1)}=x_i$, $i=1,\dots,m-(k-1)$, $y_i=0$, $m+1\le i\le n$

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{m-(k-1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} k-1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_{m-(k-1)}\end{matrix}}\right\} m-(k-1) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} n-m \end{array}$$

Τότε $y \neq 0$ και $y^T A y > 0$.

Όμως
$$y^T A y = (y_1, \dots, y_n)^T \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} y_j \end{pmatrix} = (0, \dots, 0, y_k, \dots, y_m, 0 \dots 0)^T \begin{pmatrix} \sum_{j=k}^{m} a_{1j} y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=k}^{m} a_{nj} y_j \end{pmatrix}$$

$$= y_k \sum_{j=k}^{m} a_{kj} y_j + \dots + y_m \sum_{j=k}^{m} a_{mj} y_j = x^T B x$$

Άρα ο B είναι θετικά ορισμένος