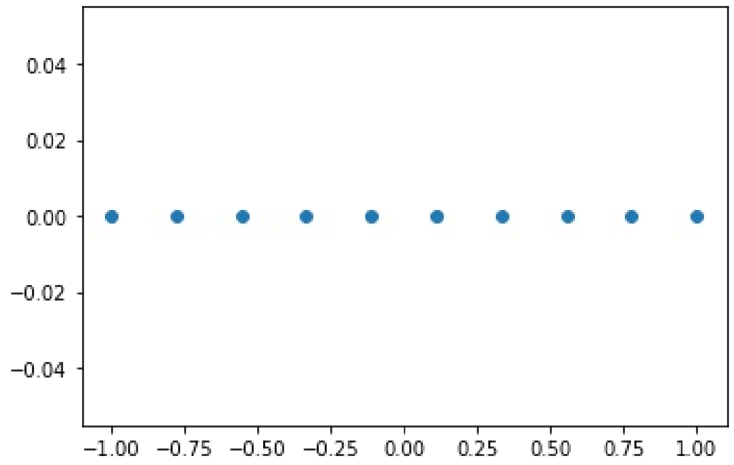
Παρεμβολή κυβικές splines

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\Delta_h: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, n$



Θεωρούμε το χώρο των συναρτήσεων $S_3(\Delta_n)$, δηλαδή

$$S_3(\Delta_n) = \{ s \in C^2[a,b] : s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 \, , \, i=0,\dots,n-1 \}$$

Θέλουμε να βρούμε τώρα $s \in S_3(\Delta_n)$ τέτοια ώστε

$$s(x_i) = f(x_i) \, , \quad i=0,\dots,n$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η s θα είναι διαφορετικό κυβικό πολυώνυμο σε κάθε διάστημα $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,\dots,n-1$

Για να προσδιορίσουμε ένα κυβικό πολυώνυμο χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε 4 σταθερές. Άρα θέλουμε να βρούμε $4n$ σταθερές συνολικά

Από τις συνθήκες παρεμβολής έχουμε

$$s(x_i) = f(x_i) \quad , \; i = 0, \dots, n$$

n+1 εξισώσεις

Επίσης ένα στοιχείο $s \in S_3(\Delta_n)$ θα είναι $s \in C^2[a,b]$, οπότε σε κάθε x_i, $i = 1, \dots, n-1$ (εσωτερικό κόμβο του διαμερισμού) η s θα πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα έχουμε επιπλέον
$n-1$ εξισώσεις

Το ίδιο θα ισχύει για s' και για την s''. Άρα συνολικά θα έχουμε

$$n+1 + 3(n-1) \quad \text{εξισώσεις}$$
$$\text{ή} \quad 4n-2 \quad \text{εξισώσεις}$$

Οπότε χρειαζόμαστε ακόμα 2 εξισώσεις για να προσδιορίσουμε ένα στοιχείο του $S_3(\Delta_n)$

Για τις επιπλέον αυτές συνθήκες επιβάλουμε συνθήκες στα άκρα $x = a$ & $x = b$

Οι πιο συνηθισμένες είναι

$$\begin{cases} s'(a) = f'(a) \\ s'(b) = f'(b) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} s''(a) = f''(a) \\ s''(b) = f''(b) \end{cases} \quad \text{ή} \quad \underbrace{\begin{cases} s''(a) = 0 \\ s''(b) = 0 \end{cases}}$$

"φυσική κυβική spline"

Θεώρημα: Έστω $f \in C^{\prime\prime}[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a,b]$ με βήμα $h = \frac{b-a}{n}$, τότε υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $s \in S_3(\Delta_n)$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} s(x_i) = f(x_i), & i = 0, \dots, n \\ s'(x_0) = f'(x_0) \\ s'(x_n) = f'(x_n) \end{cases}$$

Απόδειξη

Συμβολισμός: $y_i = f(x_i)$, $s_i = s(x_i)$, $s_i' = s'(x_i)$, $s_i'' = s''(x_i)$, $i = 0, \dots, n$

Επειδή $s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_3$ τότε $s''|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_1$

Συνεπώς $$s''(x) = \frac{1}{h}\left[s_i''(x - x_{i-1}) - s_{i-1}''(x - x_i) \right], \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Ολοκληρώνοντας την s'' στο $[x_{i-1}, x_i]$, έχουμε ότι υπάρχουν σταθερές c_{i0} και c_{i1} τέτοιες ώστε

$$s(x) = \frac{1}{6h}\left[s_i''(x - x_{i-1})^3 - s_{i-1}''(x - x_i)^3 \right] + c_{i1}x + c_{i0}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα την υπόθεση ότι $s(x_i) = y_i$ και $s(x_{i-1}) = y_{i-1}$

θα οδηγηθούμε στις σχέσεις

$$\left.\begin{aligned} s(x_{i-1}) &= \frac{1}{6h} s_{i-1}'' h^3 + c_{i1} x_{i-1} + c_{i0} = y_{i-1} \\ s(x_i) &= \frac{1}{6h} s_i'' h^3 + c_{i1} x_i + c_{i0} = y_i \end{aligned}\right\}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη

$$c_{i1} h + \frac{h^2}{6}\left(s_i'' - s_{i-1}''\right) = y_i - y_{i-1}$$

$$\Rightarrow \quad c_{i1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \frac{h}{6}\left(s_{i-1}'' - s_i''\right)$$

$$= \left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6} s_i''\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6} s_{i-1}''\right)$$

Οπότε αντικαθιστώντας την c_{i1} παίρνουμε

$$c_{i0} = y_i - \frac{1}{6} s_i'' h^2 - c_{i1} x_i$$

$$= h\left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6} s_i''\right) - \left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6} s_i''\right) x_i + \left(\frac{y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6} s_{i-1}''\right) x_i$$

$$= -\left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6} s_i''\right) x_{i-1} + \left(\frac{y_{i+1}}{h} - \frac{h}{6} s_{i-1}''\right) x_i$$

Συνεπώς η s στο $[x_{i-1}, x_i]$ γίνεται τώρα

$$s(x) = \frac{1}{6h}\left[s_i''(x-x_{i-1})^3 - s_{i-1}''(x-x_i)^3\right] + \left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6}s_i''\right)(x-x_{i-1})$$
$$- \left(\frac{y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}s_{i-1}''\right)(x-x_i)$$

Για να ορίσουμε λοιπόν την s στο $[x_{i-1}, x_i]$ πρέπει να βρούμε τα s_i'' και s_{i-1}''

Παραγωγίζοντας τη s, έχουμε $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$$s'(x) = \frac{1}{2h}\left[s_i''(x-x_{i-1})^2 - s_{i-1}''(x-x_i)^2\right] + \left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6}s_i''\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}s_{i-1}''\right)$$

Για $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$s'(x) = \frac{1}{2h}\left[s_{i+1}''(x-x_i)^2 - s_i''(x-x_{i+1})^2\right] + \left(\frac{y_{i+1}}{h} - \frac{h}{6}s_{i+1}''\right) - \left(\frac{y_i}{h} - \frac{h}{6}s_i''\right)$$

Από τη συνέχεια της S' στους κόμβους x_i, $i=1,\dots,n-1$

$$S'\big|_{[x_{i-1},x_i]}(x_i) = S'\big|_{[x_i,x_{i+1}]}(x_i) \quad , \quad i=1,\dots,n-1$$

δηλαδή θα έχουμε

$$S'\big|_{[x_{i-1},x_i]}(x_i) = \frac{1}{2h}\left[S_i'' h^2\right] + \frac{(y_i - y_{i-1})}{h} + \frac{h}{6}(S_{i-1}'' - S_i'')$$

$$S'\big|_{[x_i,x_{i+1}]}(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-S_i'' h^2\right] + \frac{y_{i+1}-y_i}{h} + \frac{h}{6}(S_i'' - S_{i+1}'')$$

Συνεπώς

$$\frac{h}{6}S_{i-1}'' + \frac{h}{3}S_i'' + \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1}) = -\frac{h}{3}S_i'' - \frac{h}{6}S_{i+1}'' + \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i)$$

Οπότε

$$s''_{i-1} + 4s''_i + s''_{i+1} = \frac{6}{h^2}(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1$$

Χρειαζόμαστε ακόμα 2 εξισώσεις για να μπορέσουμε να λύσουμε το σύστημα με μοναδικό τρόπο.

Από τις συνθήκες $s'(x_0) = f'(x_0)$ και $s'(x_n) = f'(x_n)$ έχουμε

$$2s''_0 + s''_1 = \frac{6}{h^2}\left[(y_1 - y_0) - hf'(x_0)\right]$$

$$s''_{n-1} + 2s''_n = \frac{6}{h^2}\left[(y_{n-1} - y_n) + hf'(x_n)\right]$$

Οπότε έχουμε ένα γραμμικό σύστημα $(n+1) \times (n+1)$ με πίνακα που έχει τη μορφή

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι αυτό το γρ. σύστημα λύνεται μοναδικά (γιατί;)