Ορθογώνια πολυώνυμα

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $w \in C[a,b]$ μια συνάρτηση (θετική και δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[a,b]$) $w(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Θεωρούμε τότε την απεικόνιση $(\cdot,\cdot)_w : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$(f,g)_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x) \, dx$$

Αυτή έχει τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου που έχουμε θεωρήσει για διανύσματα, δηλαδή ισχύουν οι εξής 4 ιδιότητες:

(1) $\forall f \in C[a,b], f \neq 0 \quad (f,f)_w > 0$

(2) $\forall f,g \in C[a,b], \quad (f,g)_w = (g,f)_w$

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f,g \in C[a,b], \quad (\lambda f,g)_w = \lambda (f,g)_w$

(4) $\forall f,g,q \in C[a,b], \quad (f+q,g)_w = (f,g)_w + (q,g)_w$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία πολυωνύμων, $p_n \in \mathbb{P}_n$, $n \geq 0$,

τα οποία ονομάζονται <u>ορθογώνια πολυώνυμα</u> (ως προς $(\cdot,\cdot)_w$)

Αν p_n, p_m δυο ορθογώνια πολυώνυμα τότε

$$(p_n, p_m)_w = \int_a^b w(x)\, p_n(x)\, p_m(x)\, dx = 0$$

<u>Συμβολισμός</u>: Συμβολίζουμε $\hat{\mathbb{P}}_n$ τα πολυώνυμα του $\mathbb{P}_n$ τ.ω.

ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι ακριβώς 1

$$\hat{\mathbb{P}}_n = \{ p \in \mathbb{P}_n : p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ,\ a_n = 1 \}$$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω w μια συνάρτηση βάρους. Τότε υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα πολυώνυμα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, n φυσικός, $n \geq 0$, τα οποία είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot,\cdot)_w$ δηλαδή

$$(p_n, p_m)_w = 0 \quad , \quad n \neq m$$

ή ισοδύναμα $(p_n, p_m)_w = 0 \quad , \quad m < n$

Επίσης ισχύει ο αναδρομικός τύπος

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_{n+1}(x) = (x - a_{n+1}) p_n(x) - \beta_{n+1} p_{n-1}(x) \quad , \quad n \geq 0 \quad (p_{-1} := 0) \end{cases}$$

και

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \dfrac{(\psi P_n, P_n)_w}{(P_n, P_n)_w}, & n \geq 0 \\[2ex] \beta_{n+1} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \dfrac{(P_n, P_n)_w}{(P_{n-1}, P_{n-1})_w}, & n \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

(συμβολίζουμε $\psi(x)$, τη συνάρτηση $\psi(x) = x$

Απόδειξη: Θα δείξουμε κατ'αρχήν ότι αν υπάρχουν ορίζονται μοναδικά.

Τα πολυώνυμα $p_0, \dots, p_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως ορθογώνια πολυώνυμα ως προς $(\cdot,\cdot)_w$

Αν $c_0 p_0 + \dots + c_n p_n = 0$ τότε

$$(c_0 p_0 + \dots + c_n p_n, p_m)_w = c_m (p_m, p_m)_w = 0 \quad , \text{ για κάθε } m \in \{0, 1, \dots, n\}$$

Οπότε $c_m = 0$

Συνεπώς αφού είναι $n+1$ το πλήθος, έπεται ότι κάθε $p \in \mathbb{P}_n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\{p_0, \dots, p_n\}$, άρα

$$(p_{n+1}, p)_w = 0 \text{ για κάθε } p \in \mathbb{P}_n, \quad \text{επειδή} \quad (p_n, p_m)_w = 0 \, , \, m \neq n$$

Έστω τώρα ότι υπάρχουν πολυώνυμα $r_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, για τα οποία ισχύει

$$(r_n, r_m)_w = 0 \quad , \quad n \neq m$$

Τότε θα ισχύει και ότι

$$(r_{n+1}, p)_w = 0 \quad , \forall p \in \mathbb{P}_n$$

Οπότε εύκολα έχουμε ότι

$$(r_{n+1} - p_{n+1}, p)_w = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_n$$

Όμως $r_{n+1} - p_{n+1} \in \mathbb{P}_n$, συνεπώς

$$(r_{n+1} - p_{n+1}, r_{n+1} - p_{n+1})_w = 0$$

Οπότε $\int_a^b w(x) (r_{n+1} - p_{n+1})^2(x)\, dx = 0 \Rightarrow r_{n+1}(x) = p_{n+1}(x) \quad , \forall x \in [a, b]$

Για να δείξουμε τώρα ότι υπάρχουν τα πολυώνυμα, θα το δείξουμε επαγωγικά.

Έστω $p_0(x)=1$. Υποθέτουμε ότι έχουμε αποδείξει την ύπαρξη των

$p_0, \dots, p_n$, και θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη του p_{n+1}.

Αν υπάρχει το p_{n+1} τότε θα ισχύει ότι $p_{n+1} - \psi p_n \in \mathbb{P}_n$, όπου $\psi(x)=x$

Συνεπώς αφού κάθε πολυώνυμο του $\mathbb{P}_n$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $p_0, \dots, p_n$, υπάρχουν σταθερές $c_0, \dots, c_n$

$$p_{n+1} - \psi p_n = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i$$

Άρα $p_{n+1} = (c_n + \psi) p_n + c_{n-1} p_{n-1} + \dots + c_0 p_0$

Για να είναι τα p_{n+1}, p_n ορθογώνια ως προς $(\cdot,\cdot)_w$ θα πρέπει

$$0 = (p_{n+1}, p_n)_w = (\psi p_n, p_n)_w + c_n (p_n, p_n)_w + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (p_i, p_n)_w$$

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης ότι έχουμε βρει τα ορθογώνια πολυώνυμα $p_0, \dots, p_n$, γίνεται

$$0 = (\psi p_n, p_n)_w + c_n (p_n p_n)_w$$

Συνεπώς $$c_n = - \frac{(\psi p_n, p_n)_w}{(p_n, p_n)_w}$$

Επίσης, για $m = 0, \dots, n-1$, τα p_{n+1}, p_m θα πρέπει να είναι ορθογώνια, άρα

$$0 = (p_{n+1}, p_m)_w = (\psi p_n, p_m)_w + \sum_{i=0}^{n} c_i (p_i, p_m)_w = (\psi p_n, p_m)_w + c_m (p_m, p_m)_w$$

Για $m=0,\dots,n-2$ είναι απλό να δούμε ότι $c_m=0$, γιατί

$$0=(\psi p_n,p_m)_w+c_m(p_m,p_m)_w=(p_n,\psi p_m)_w+c_m(p_m,p_m)_w=c_m(p_m,p_m)_w$$

$$\Rightarrow c_m=0 \qquad (\text{διότι } \psi p_m\in\mathbb{P}_{n-1} \ (\text{το πολύ}))$$

Τώρα για $m=n-1$

$$0=(\psi p_n,p_{n-1})_w+c_{n-1}(p_{n-1},p_{n-1})_w \Rightarrow c_{n-1}=-\frac{(p_n,\psi p_{n-1})_w}{(p_{n-1},p_{n-1})_w}$$

Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι $(p_n,\psi p_{n-1})_w=(p_n,p_n)_w$, γιατί $p_n-\psi p_{n-1}\in\mathbb{P}_{n-1}$

Καταλήγουμε τελικά ότι το p_{n+1} ορίζεται, σύμφωνα με τις σχέσεις που θέλουμε να δείξουμε

Ορισμός: Αν w είναι μια συνάρτηση βάρους και $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πολυωνύμων, τ.ω. $p_n \in \mathbb{P}_n$ και $(p_n, p_m)_w = 0$ $n \neq m$, τα p_n, λέγονται ορθογώνια πολυώνυμα ως προς τη συνάρτηση βάρους w

Θεώρημα: Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w. Τότε το p_n έχει n απλές πραγματικές ρίζες, όλες στο διάστημα (a,b)

Απόδειξη: Έστω ότι το p_n δεν είχε ρίζα στο (a,b), τότε δεν θα άλλαζε πρόσημο και θα ισχύει

$$0 = (p_n, p_0)_w = \int_a^b w(x) p_n(x) dx \neq 0 ,$$

το οποίο είναι άτοπο

Επομένως υπάρχει μια ρίζα $x_1 \in (a,b)$.

Ας υποθέσουμε ότι κάποια ρίζα x^* του P_n είναι πολλαπλή. Τότε το πολυώνυμο

$$r_{n-2} = \frac{P_n}{(\psi - x^*)^2} \in \mathbb{P}_{n-2}, \qquad \psi(x) = x$$

οπότε

$$0 = (P_n, r_{n-2})_w = \int_a^b w(x) P_n(x) \cdot \frac{P_n(x)}{(x-x^*)^2} \, dx > 0$$

το οποίο είναι άτοπο

Συνεπώς όλες οι ρίζες είναι απλές.

Έστω τώρα $x_1, \dots, x_i$, $i \le n$ οι μόνες ρίζες του P_n οι οποίες βρίσκονται στο (a,b).

Τότε $p_n(x) = q_{n-i}(x)(x-x_1)\dots(x-x_i)$, $q_{n-i} \in \mathbb{P}_{n-i}$

με q_{n-i} να μην έχει καμμία ρίζα στο (a,b), συνεπώς το q_{n-i} δεν αλλάζει πρόσημο στο (a,b)

Συνεπώς

$$\int_a^b w(x)p_n(x)(x-x_1)\dots(x-x_i)\,dx = \int_a^b w(x)q_{n-i}(x)(x-x_1)^2\dots(x-x_i)^2\,dx \neq 0$$

Όμως για $i<n$ το αριστερό μέρος $\int_a^b w(x)p_n(x)\underbrace{(x-x_1)\dots(x-x_i)}_{\in \mathbb{P}_i}\,dx = 0$

οπότε και έχουμε άτοπο

Μόνο για $i=n$ $\int_a^b w(x)p_n(x)(x-x_1)\dots(x-x_i)\,dx \neq 0$. Οπότε έχουμε δείξει το ζητούμενο