Αριθμητική Ολοκλήρωση
(κανόνας Gauss)

Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$ και $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους ($w(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$). Θέτουμε

$$I(f) = \int_a^b w(x)\, f(x)\,dx$$

και θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \approx I(f)$$

Τώρα, όμως, σε αντίθεση με τους τύπους Newton-Cotes δεν θα θεωρήσουμε έναν ομοιόμορφο διαμερισμό του $[a,b]$

Στους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης που θέλουμε να κατασκευάσουμε τώρα, θέλουμε να προσδιορίσουμε εκτός από τα βάρη w_i και τους κόμβους x_i, έτσι ώστε ο τύπος Q_n να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα του μέγιστου δυνατού βαθμού.

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι αν έχουμε θεωρήσει έναν κανόνα Q_n, τότε αυτός δεν ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $2n$.

Έστω $p(x) = (x-x_1)^2(x-x_2)^2 \cdots (x-x_n)^2 \in \mathbb{P}_{2n}$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$I(p) > 0 \quad \text{και} \quad Q_n(p) = 0$$

Οι τύποι ολοκλήρωσης Gauss που θα κατασκευάσουμε (με n κόμβους) ολοκληρώνουν ακριβώς πολυώνυμα μέχρι και βαθμού $2n-1$

Θεώρημα: Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα. Τότε

a) Αν $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ οι ρίζες του p_n, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα βάρη $w_1, \ldots, w_n$, όλα θετικά, τέτοια ώστε ο τύπος ολοκλήρωσης Q_n,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$ να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού

μέχρι και $2n-1$,

$$Q_n(p) = \int_a^b w(x)\, p(x)\, dx, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}$$

β) Αν ο τύπος ολοκλήρωσης Q_n με κόμβους $x_1, \dots, x_n$ και βάρη $w_1, \dots, w_n$,

$$Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα βαθμού μέχρι και $2n-1$, τότε οι κόμβοι $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι οι ρίζες του p_n

<u>Απόδειξη</u> α) Έστω $p \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Αν $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ το πολυώνυμο παρεμβολής του p στα σημεία $x_1, \dots, x_n$. Τότε

$$(p-q)(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Συνεπώς $\quad p - q = p_n \cdot r_{n-1}, \quad$ με $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$

Ας θεωρήσουμε τώρα τα πολυώνυμα Lagrange $L_i \in \mathbb{P}_{n-1}$ ως προς τα σημεία $x_1, \dots, x_n$ $\left(L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$

Το πολυώνυμο παρεμβολής q θα γράφεται ως

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x)$$

Συνεπώς

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \int_a^b w(x) \left[q(x) + p_n(x) r_{n-1}(x) \right] dx = \int_a^b w(x) q(x) dx + (p_n, r_{n-1})_w$$

$$= \int_a^b w(x) q(x) dx$$

$$= \int_a^b w(x) \left(\sum_{i=1}^{n} p(x_i) L_i(x) \right) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_a^b w(x) L_i(x) dx \right\} p(x_i)$$

Επομένως αν θεωρήσουμε τα βάρη $w_i = \int_a^b w(x) L_i(x) dx$, $i = 1, \dots, n$

θα έχουμε

$$\forall p \in \mathbb{P}_{2n-1}, \quad \int_a^b w(x) p(x) dx = \sum_{i=1}^{n} w_i \, p(x_i)$$

Για να δείξουμε τώρα το μονοσήμαντο του ορισμού των w_i :

Έστω ότι υπάρχουν $w_1', \dots, w_n'$ τέτοια ώστε ο τύπος Q_n'

$$Q_n'(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i' f(x_i)$$

να ολοκληρώνει τα πολυώνυμα p του $\mathbb{P}_{2n-1}$, ακριβώς.

Τότε για $j = 1, \dots, n$ έχουμε $(L_j)^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, συνεπώς και οι δυο τύποι Q_n & Q_n' θα υπολογίζουν ακριβώς το $\int_a^b w(x) L_j^2(x)\,dx$

Όμως

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} w_i L_j^2(x_i) = \int_a^b w(x) L_j^2(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} w_i' L_j^2(x_i) = w_j'$$

και επειδή $w_j = \int_a^b w(x) L_j^2(x)\,dx > 0$ έχουμε τη θετικότητα των βαρών w_i, $i = 1, \dots, n$

β) Έστω $q \in \mathbb{P}_{n-1}$, θέτουμε τώρα

$$p(x) = q(x) + (x-x_1)\cdots(x-x_n)\, r_{n-1}(x)$$ με

$r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ τυχαίο πολυώνυμο

Τότε προφανώς θα ισχύει $Q_n(p) = Q_n(q)$

και ακριβώς αφού $p, q \in \mathbb{P}_{2n-1}$

$$\int_a^b w(x)p(x)\,dx = \int_a^b w(x)q(x)\,dx$$

δηλαδή

$$\int_a^b w(x)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\, r_{n-1}(x)\,dx = 0$$

Επειδή αυτό θα συμβαίνει για κάθε $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$, αυτό συνεπάγεται ότι το $(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ και κάθε $r_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ είναι ορθογώνια ως προς $(\cdot,\cdot)_w$

Άρα $p_n = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

__Θεώρημα__: Έστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $w: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση βάρους και $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$ τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς w με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1. Αν Q_n είναι ο τύπος ολοκλήρωσης του Gauss ως προς w με n κόμβους, τότε για κάθε $f \in C^{2n}[a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b w(x) f(x)\,dx - Q_n(f) = \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_a^b w(x) [p_n(x)]^2 dx$$

Έστω ότι $w(x)=1$ και ότι θέλουμε να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση στο $[-1,1]$, τότε τα βάρη και οι κόμβοι για τον τύπο ολοκλήρωσης του Gauss είναι

$n=1$ $\quad x_1 = 0, \quad w_1 = 2$

$n=2$ $\quad x_1 = -x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad w_1 = w_2 = 1$

$n=3$ $\quad x_1 = -x_3 = -\sqrt{\dfrac{3}{5}}, \quad x_2 = 0, \quad w_1 = w_3 = \dfrac{5}{9}, \quad w_2 = \dfrac{8}{9}$

$n=4$ $\quad x_1 = -x_4 = -\sqrt{\dfrac{15+2\sqrt{30}}{35}}, \quad w_1 = w_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{30}}{36}$

$$x_2 = -x_3 = -\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}, \quad w_2 = w_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$$

Άν υποθέσουμε ότι $Q_n(f) = \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$, είναι ένας τύπος ολοκλήρωσης στο διάστημα $[-1,1]$, τότε με την αλλαγή μεταβλητής

$$t = \frac{2x - (b+a)}{b-a}$$

έχουμε $$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)dt$$

Οπότε ο κανόνας ολοκλήρωσης $\tilde{Q}_n(f)$ στο $[a,b]$ είναι ο

$$\tilde{Q}_n(f) = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{b+a}{2}\right)$$