Επίλυση μη-γραμμικών εξισώσεων
(μιας μεταβλητής)

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = ax+b$
με $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, έχει μια ρίζα

$$x^* = -\frac{b}{a} \quad (f(x^*) = 0)$$

Επίσης για $2^{ου}$ βαθμού πολυώνυμα

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (μη-γραμμική συνάρτηση)
με $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ γνωρίζουμε τύπους που δίνουν τις ρίζες

Για πολυώνυμα βαθμού ≥ 5 και για άλλες πολλές συναρτήσεις δεν υπάρχει τρόπος να βρεθούν οι ρίζες με αναλυτικό τρόπο.

Θα αναπτύξουμε και θα μελετήσουμε μεθόδους για να προσεγγίσουμε ρίζες εξισώσεων, $f(x)=0$, όπου η f είναι μια πραγματική συνάρτηση, συνεχής σε ένα φραγμένο και κλειστό διάστημα της πραγματικής ευθείας

Επαναληπτικοί μέθοδοι

Θα κατασκευάζουμε μια ακολουθία αριθμών, x_k, η οποία θα δίνεται από έναν αναδρομικό τύπο ή μια επαναληπτική διαδικασία.

Αν x^* είναι μια ρίζα της f, $f(x^*)=0$, θα δούμε κάτω από ποιες καταλληλες συνθήκες $x_k \to x^*$, $k \to \infty$

Επαναληπτικοί μέθοδοι

Θα κατασκευάζουμε μια ακολουθία αριθμών, x_k, η οποία θα δίνεται από έναν αναδρομικό τύπο ή μια επαναληπτική διαδικασία.

Αν x^* είναι μια ρίζα της f, $f(x^*)=0$, θα δούμε κάτω από ποιες κατάλληλες συνθήκες $x_k \to x^*$, $k \to \infty$

Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Αν $g \in C[a,b]$ και $k \in \mathbb{R}$ μεταξύ των $g(a)$ και $g(b)$, τότε υπάρχει $x \in [a,b]$ τ.ω. $g(x)=k$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ και $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τ.ω. $f(\xi)=0$

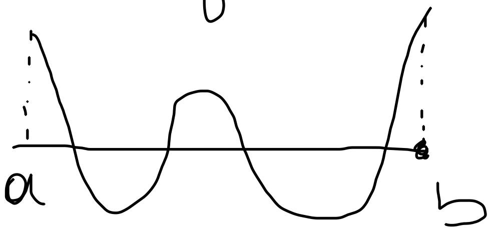
<u>Απόδειξη</u>: Αν $f(a)=0$ ή $f(b)=0$ τότε βρήκαμε $\xi=a$ ή $\xi=b$

Ας υποθέσουμε $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε το $k=0$ είναι ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$. Οπότε από το Θ. ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω $f(\xi)=0$

Το αντίστροφο του θεωρήματος, δεν ισχύει

Αν έχουμε ότι υπάρχει ρίζα της συνάρτησης f στο διάστημα [a, b] αυτό δεν συνεπάγεται ότι $f(a) \cdot f(b) \leq 0$

Π.χ.



Στο παραπάνω γράφημα υπάρχουν διαστήματα που η f λαμβάνει τιμές με διαφορετικό πρόσημο

Όμως αυτά τα διαστήματα μπορεί να υπάρχουν αλλά κάποιες φορές είναι δύσκολο να εντοπιστούν.

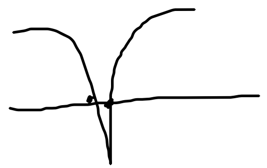
Μια περίπτωση είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + M|x - 1.05|}$$

Οι ρίζες της f είναι $x_1 = 1.05 - \frac{1}{M}$ και $x_2 = 1.05 + \frac{1}{M}$

με απόσταση μεταξύ τους $|x_1 - x_2| = \frac{2}{M}$

Για μεγάλο M είναι δύσκολο να βρούμε ένα διάστημα όπου η f να παίρνει ετερόσημες τιμές



Η μέθοδος της διχοτόμησης

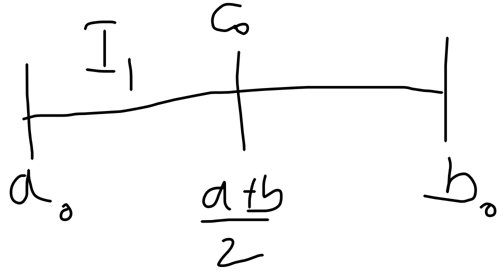
Ξεκινάμε με ένα διάστημα $I_0=[a_0,b_0]$ στο οποίο γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής και λαμβάνει στα άκρα του, a_0, b_0, ετερόσημες τιμές, $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$

Άρα έχει ρίζα στο (a_0,b_0). Θεωρούμε τώρα το μέσο του διαστήματος $c_0=\frac{1}{2}(a_0+b_0)$. Υπολογίζουμε τη τιμή $f(c_0)$.

Αν $f(c_0)=0$ βρήκαμε τη ζητούμενη ρίζα, και η επανάληψη σταματάει.

Αν όχι τότε θεωρημούμε το διάστημα $I_1\subset I_0$, $I_1=(a_1,b_1)$ ως εξής

$$(a_1,b_1)=\begin{cases}(a_0,c_0), & \text{αν } f(c_0)f(b_0)>0\\(c_0,b_0), & \text{αν } f(c_0)f(b_0)<0\end{cases}$$



Επειδή $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$, θα έχει ρίζα στο (a_1, b_1)

και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία.

Το μήκος του διαστήματος $I_1 = (a_1, b_1)$, $|b_1 - a_1|$, θα είναι

το μισό του προηγούμενου I_0

$$|b_1 - a_1| = \frac{|b_0 - a_0|}{2}$$

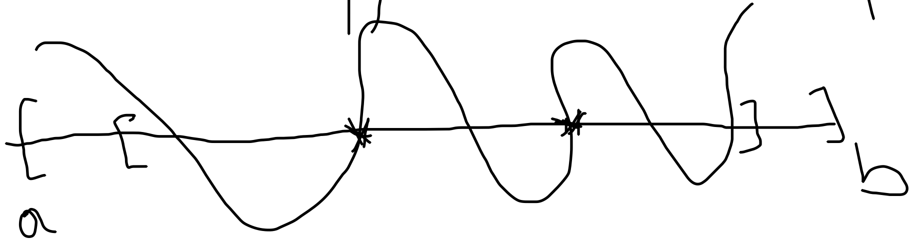
Είναι προφανές ότι σε κάθε βήμα του αλγορίθμου εγκλωβίζουμε μια ρίζα της συνάρτησης f, σε ένα διάστημα που περιέχεται στο προηγούμενο και έχει μήκος το μισό του προηγουμένου

Επίσης, με βάση αυτό τον αλγόριθμο, είτε

θα βρούμε μια ρίζα x^* της f σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων

είτε μια ρίζα της f θα βρίσκεται σε ένα διάστημα με μήκος όσο μικρό επιθυμούμε

Αν η f στο αρχικό διάστημα $[a,b]$ έχει περισσότερες από μια ρίζες η μέθοδος που περιγράψαμε (η μέθοδος της διχοτόμησης) θα προσεγγίσει μια ρίζα, χωρίς όμως να γνωρίζουμε από την αρχή ποιά από τις ρίζες θα προσεγγίσουμε.



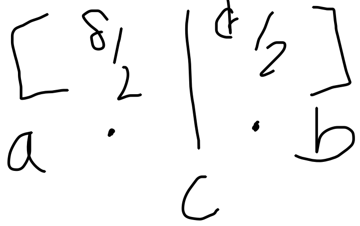
Αλγόριθμος Διχοτόμησης

Ο αλγόριθμος θεωρεί δεδομένα τα άκρα του διαστήματος [a, b] τον αριθμό ε (το μέγιστο σφάλμα που δεχόμαστε να έχει η προσέγγιση της ρίζας, μικρός θετικός αριθμός)

Θεωρούμε ότι για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος $f(a)f(b) \le 0$.

Ψευδοκώδικας

Αν $f(a)=0$ ή $f(b)=0$ τότε βρήκαμε μια ρίζα και τερματίζουμε τον αλγόριθμο.



$\delta = b-a$

$c = a+\delta/2$, Υπολογίζουμε το $f(c)$

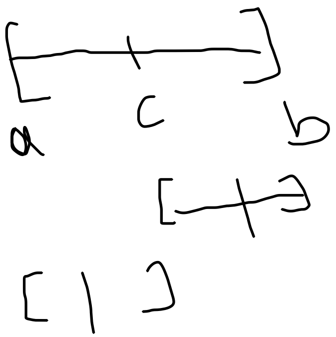
Αν $\delta/2 \leq \varepsilon$ ή $f(c)=0$ τότε τερματίζουμε τον αλγόριθμο και η c αποτελεί την προσέγγιση της ρίζας της f.

διαφορετικά αν $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(c)$ [sgn(): συνάρτηση πρόσημου]

θέτουμε $a=c$

αλλιώς θέτουμε $b=c$

Επιστρέφουμε στην αρχή και επαναλαμβάνουμε



Ψευδοκώδικας

Αν $f(a)=0$ ή $f(b)=0$ τότε βρήκαμε μια ρίζα και τερματίζουμε τον αλγόριθμο.

$\delta = b-a$

$c = a + \delta/2$, Υπολογίζουμε το $f(c)$

Αν $\delta/2 \leq \varepsilon$ ή $f(c)=0$ τότε τερματίζουμε τον αλγόριθμο και η c αποτελεί την προσέγγιση της ρίζας της f.

διαφορετικά αν $\operatorname{sgn} f(a) = \operatorname{sgn} f(c)$ [sgn(): συνάρτηση πρόσημου]
θέτουμε $a=c$
αλλιώς θέτουμε $b=c$
Επιστρέφουμε στην αρχή και επαναλαμβάνουμε

Πρόταση: Έστω $f \in C[a,b]$ και $\operatorname{sgn} f(a) \neq \operatorname{sgn} f(b)$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία των προσεγγίσεων με τη μέθοδο της διχοτόμησης (δηλαδή τα μέσα των διαδοχικών διαστημάτων). Τότε, αν x^* ρίζα της f στο $[a,b]$, είτε $x_N = x^*$ για κάποιο N είτε $x_n \to x^*$, $n\to\infty$

Επίσης $|x_n - x^*| \leq \dfrac{b-a}{2^n}$, $n = 1,2,\dots$

Απόδειξη: Θέτουμε $a_1 = a$, $b_1 = b$, $I_1 = [a_1, b_1]$ και $x_1 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$, το μέσο του I_1

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο, και a_i, b_i, $i = 1,2,\dots$, τα άκρα των διαστημάτων που προκύπτουν από τη μέθοδο, με $I_i = [a_i, b_i]$ και $x_i = \dfrac{a_i+b_i}{2}$ το μέσον του I_i

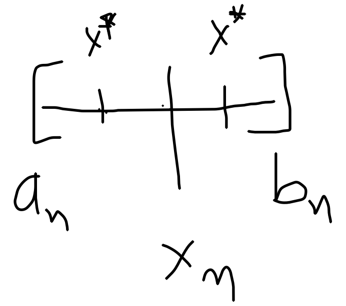
Προφανώς $I_{i+1} \subset I_i$. Επειδή σε κάθε I_i υπάρχει μια ρίζα της f, τότε υπάρχει μια ρίζα x^* της f που περιέχεται σε όλα τα διαστήματα.

Αν υπάρχει N τ.ω. $x_N = x^*$ τότε έχουμε ολοκληρώσει την αναζήτηση σε πεπερασμένα βήματα.

Αλλιώς έχουμε άπειρα το πλήθος x_i, $i=1,2,3,\dots$

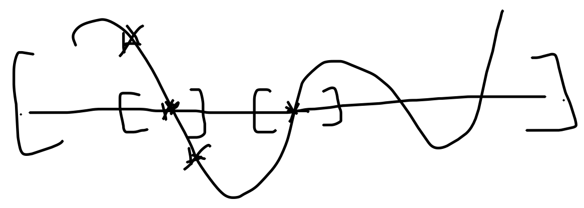
Σε κάθε διάστημα $[a_n, b_n]$

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1}-a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{b_{n-2}-a_{n-2}}{2} = \dots = \frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$



και $x_n = \frac{1}{2}(a_n+b_n)$, $x^* \in [a_n, b_n]$

Οπότε προφανώς $|x_n - x^*| \le \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^n}$



<u>Παρατήρηση</u>: Σύμφωνα με τη προηγούμενη πρόταση μπορούμε εκ των προτέρων να υπολογίσουμε των αριθμό των βημάτων που θα χρειαστούμε, ώστε να έχουμε μια συγκεκριμένη ακρίβεια

<u>Π.χ.</u>

Αν θέλουμε το σφάλμα $|x_n - x^*| < 10^{-5}$, τότε μπορούμε να βρούμε για ποιον όρο της ακολουθίας αυτό θα πραγματοποιηθεί.

Επειδή $|x_n - x^*| \le \frac{b-a}{2^n}$, αν βρούμε για ποιο n $\frac{b-a}{2^n} < 10^{-5}$ θα έχουμε το ζητούμενο. Π.χ. αν $b-a=1$ τότε

$$\frac{1}{2^n} < 10^{-5} \Rightarrow 2^n > 10^5 \Rightarrow n \cdot \log_{10} 2 > 5 \Rightarrow n > \frac{5}{\log_{10} 2} \simeq 16.6$$

Οπότε από για τον x_{17}, $|x_{17} - x^*| < 10^{-5}$.

Προτερήματα της μεθόδου

(i) Συγκλίνει πάντα αν η f είναι συνεχής και υπάρχει εναλλαγή προσήμου της f στα άκρα ενός διαστήματος

(ii) Μπορούμε να προσδιορίσουμε από την αρχή (εκ των προτέρων) τον αριθμό των βημάτων, για μια ορισμένη ακρίβεια.

Μειονεκτήματα

(i) Είναι αργή η σύγκλιση

(ii) Συνολικό κόστος υπολογισμών της f είναι υψηλό (Υπολογίζουμε τιμές της f πολλές φορές)

Κριτήρια τερματισμού

Είδαμε ότι ένα κριτήριο τερματισμού είναι το μήκος του διαστήματος $[a_n, b_n]$ να είναι μικρότερο από ε

Θα μπορούσε αυτό το κριτήριο να αντικατασταθεί από άλλα κριτήρια, (τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και σε άλλους αλγορίθμους που θα δούμε στη συνέχεια)

Αν ένας αλγόριθμος παράγει μια ακολουθία x_n για να προσεγγίσει τη ρίζα x^* μιας συνάρτησης f, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διάφορα κριτήρια για να τερματίσουμε τον αλγόριθμο.

Τα πιο συνηθισμένα είναι, να επιλέξουμε ένα αποδεκτό σφάλμα $\varepsilon > 0$

(i) $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

ii) $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$

iii) $|f(x_n)| < \varepsilon$

Υπάρχουν παραδείγματα που δείχνουν ότι καθένα από τα κριτήρια μπορεί να μην είναι ο καλύτερος τρόπος για να αποφασίσουμε αν έχουμε βρει καλή προσέγγιση της ρίζας που θέλουμε.

<u>Π.χ.</u> αν $f(x)=(x-1)^{10}$. Είναι φανερό ότι $x=1$ είναι η ζητούμενη ρίζα.

Έστω ότι μια μέθοδος παράγει την ακολουθία $x_n = 1+\frac{1}{n}$.

Αν χρησιμοποιήσουμε ως κριτήριο τερματισμού $|f(x_n)| < \varepsilon$, με $\varepsilon = 10^{-3}$

τότε εύκολα παρατηρούμε ότι $f(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{10}$

Όμως για κάθε $n>1$ ισχύει ότι $|f(x_n)| < 10^{-3}$

γιατί $\left(\frac{1}{n}\right)^{10} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10} < \frac{1}{1000}$, διότι $2^{10} = 1024$

Επίσης για αυτή την ακολουθία,

$$|x - x_n| = |1 - (1 + \tfrac{1}{n})| = \frac{1}{n} < \varepsilon = 10^{-3}$$, για $n > 1000$

Ένα άλλο παράδειγμα μας δείχνει το πρόβλημα που μπορεί να συναντήσουμε από το κριτήριο τερματισμού

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Αν δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι η ακολουθία μας συγκλίνει σε μια ρίζα της f, το κριτήριο αυτό μπορεί να μας οδηγήσει σε λάθος συμπεράσματα.

Έστω ότι έχουμε την ακολουθία $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$,

Προφανώς $|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{n}$, και για κάποιο n, θα

έχουμε ότι $\frac{1}{n} < \varepsilon$, για όποιο ε επιλέξουμε, όσο μικρό και αν είναι

διότι $1/n \to 0$, $n \to \infty$

Όμως η ακολουθία x_n <u>δεν συγκλίνει</u>

και άρα από το κριτήριο σε αυτή την περίπτωση αποτυγχάνει

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = x_n.$$

$$\parallel$$

$$\log(n+1) \longrightarrow +\infty, \quad n \to \infty$$

Αν δεν γνωρίζουμε για την f και τη ρίζα της x, τότε η καλύτερη επιλογή που έχουμε για κριτήριο τερματισμού είναι

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$$

Επειδή πλησιάζει στην έννοια του σχετικού σφάλματος.

Επίσης σε κάθε υλοποίηση αλγορίθμου θα πρέπει να προσθέσουμε ένα μέγιστο αριθμό επαναλήψεων που θα επιτρέψουμε τον αλγόριθμο να εκτελέσει

Διάφορα πράγματα στον Η/Υ μπορεί να δημιουργηθούν και ο αλγόριθμος να μην μπορεί να σταματήσει