Θεώρημα: Έστω $f \in C^2[a, +\infty)$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in [a, +\infty)$ και $f(a) < 0$. Τότε η f έχει μόνο μια πραγματική ρίζα ρ, στο διάστημα $[a, +\infty)$. Για οποιοδήποτε $x_0 \geq a$, η ακολουθία (x_n) που παράγει η μέθοδος του Newton, συγκλίνει στη ρίζα ρ.

Απόδειξη: Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει $b > a$ τ.ω. $f(b) > 0$

Έστω κάποιο σημείο $b > a - \frac{f(a)}{f'(a)} > a$.

Αναπτύσσουμε κατά Taylor με κέντρο το σημείο a,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi)}_{\geq 0}, \quad \xi \in (a,b)$$

Άρα $f(b) > f(a) + (b-a)f'(a) > 0$

Συνεπώς η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (a,b).

Επειδή είναι αύξουσα στο $(a,+\infty)$, θα έχει μοναδική ρίζα στο $(a,+\infty)$, $(\rho > a)$

Είναι φανερό ότι αν $\xi > \rho$ τότε $f(\xi) > 0$ και αν $f(\xi) > 0$ τότε $\xi > \rho$
Επίσης αν $a \leq \xi < \rho$ τότε $f(\xi) < 0$, και αν $(\xi > a$ και $f(\xi) < 0)$ τότε $\xi < \rho$

Έστω $a < x_0 < \rho$, τότε $f(x_0) < 0$ και $f'(x_0) > 0$ άρα

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > x_0$$

Επίσης αν θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το x_0, έχουμε

$$f(x_1) = \underbrace{f(x_0) + (x_1 - x_0) f'(x_0)}_{\equiv 0} + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi_0), \quad \xi_0 \in (x_0, x_1)$$

Άρα $f(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} f''(\xi_0) > 0$

Συνεπώς $\rho < x_1$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 > \rho$.

Παρατηρούμε ακόμα ότι για κάθε $\lambda > \rho$ το επόμενο σημείο που παίρνουμε τη μέθοδο του Νεύτωνα, $\mu = \lambda - \dfrac{f(\lambda)}{f'(\lambda)}$,

θα ικανοποιεί $\mu < \lambda$, διότι $f(\lambda) > 0$ και $f'(\lambda) > 0$

Επίσης $f(\mu) > 0$, γιατί

$$f(\mu) = \underbrace{f(\lambda) + (\mu - \lambda) f'(\lambda)}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ (λόγω του ορισμού του } \mu)} + (\mu - \lambda)^2 \frac{1}{2} f''(\xi), \quad \xi \text{ ανάμεσα στο } \mu \text{ \& } \lambda$$

Οπότε $f(\mu) = (\mu - \lambda)^2 \frac{1}{2} f''(\xi) > 0$ $\quad (f''(x) > 0$ για $x \geq a)$

Συνεπώς αφού $f(\mu) > 0$, θα έχουμε $\rho < \mu$.

Καταλήγουμε λοιπόν στην παρατήρηση ότι αν $\lambda > \rho$ τότε το επόμενο σημείο που δίνει η μέθοδος του Νεύτωνα, μ, $\mu \in (\rho, \lambda)$

Επομένως αν επιλέξουμε $x_0 > \rho$, τότε η ακολουθία (x_n) που προκύπτει με τη μέθοδο του Νεύτωνα είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη

$$\rho < x_{n+1} < x_n, \quad \forall n \geq 0$$

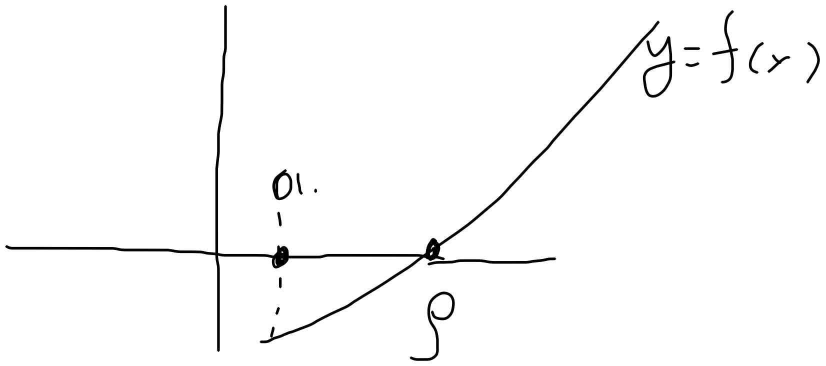
Οπότε η x_n συγκλίνει. Έστω ότι $x_n \to y$, $n \to \infty$

Επειδή $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow \lim x_{n+1} = \lim x_n - \dfrac{f(\lim x_n)}{f'(\lim x_n)}$

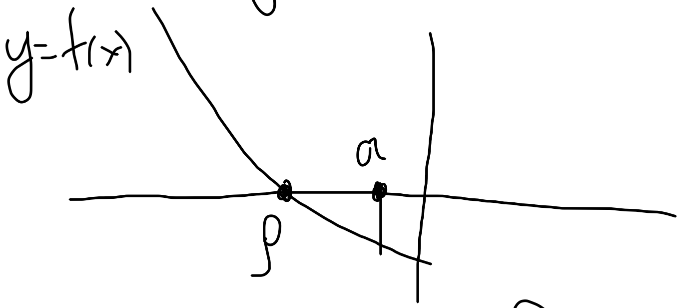
δηλ $y = y - \dfrac{f(y)}{f'(y)} \Rightarrow f(y) = 0$

Επειδή η f έχει μοναδική ρίζα $\rho > a$, τότε $y = \rho$

Παρατήρηση: Η συμπεριφορά της συνάρτησης f που θεωρούμε στο προηγούμενο θεώρημα είναι αυτή που δίνει η "εικόνα"



Μια ανάλογη "εικόνα" είναι η



Προσπαθήστε να τροποποιήσετε την απόδειξη του θεωρήματος, ώστε αν $f(\alpha)<0$, $f'(x)<0$ για $x\leq \alpha$ και $f''(x)>0$, για $x\leq\alpha$, τότε για $x_0\leq \alpha$, η ακολουθία $x_n \to \rho$.

<u>Παρατήρηση</u>: Είδαμε ότι αν $f(x^*)=0$ και $f'(x^*)\neq 0$, η ακολουθία (x_n) που προκύπτει με τη μέθοδο του Νεύτωνα $x_n \to x^*$ με ταχύτητα σύγκλισης 2, αν x_0 είναι "κοντά" στο x^*.

Αν η x^* είναι ρίζα της f τάξης m, δηλαδή

$$f(x^*)=f'(x^*)=\dots=f^{(m-1)}(x^*)=0, \quad f^{(m)}(x^*)\neq 0,$$

τότε αν x_0 είναι "κοντά" στο x^* και $x_n \to x^*$, η σύγκλιση θα είναι γραμμική.
Αν υποθέσουμε ότι η f είναι m-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη κοντά στο x^*, από το ανάπτυγμα Taylor

$$f(x_n)=f(x^*)+(x_n-x^*)f'(x^*)+\dots+\frac{(x_n-x^*)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m-1)}(x^*)+\frac{(x_n-x^*)^m}{m!}f^{(m)}(\xi_n)$$

Επίσης $f'(x_n) = f'(x^*) + \dots + \frac{(x_n - x^*)^{m-2}}{(m-2)!} f^{(m-1)}(x^*) + \frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(J_n)$

Οπότε $x_{n+1} - x^* = x_n - x^* - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{(x_n - x^*) f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$= \frac{\frac{(x_n - x^*)^m}{(m-1)!} f^{(m)}(J_n) - \frac{(x_n - x^*)^m}{m!} f^{(m)}(\xi_n)}{\frac{(x_n - x^*)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(J_n)}$$

$$= (x_n - x^*)\left(1 - \frac{1}{m} \frac{f^{(m)}(\xi_n)}{f^{(m)}(J_n)}\right)$$

Συνεπώς $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \dfrac{1}{m}$

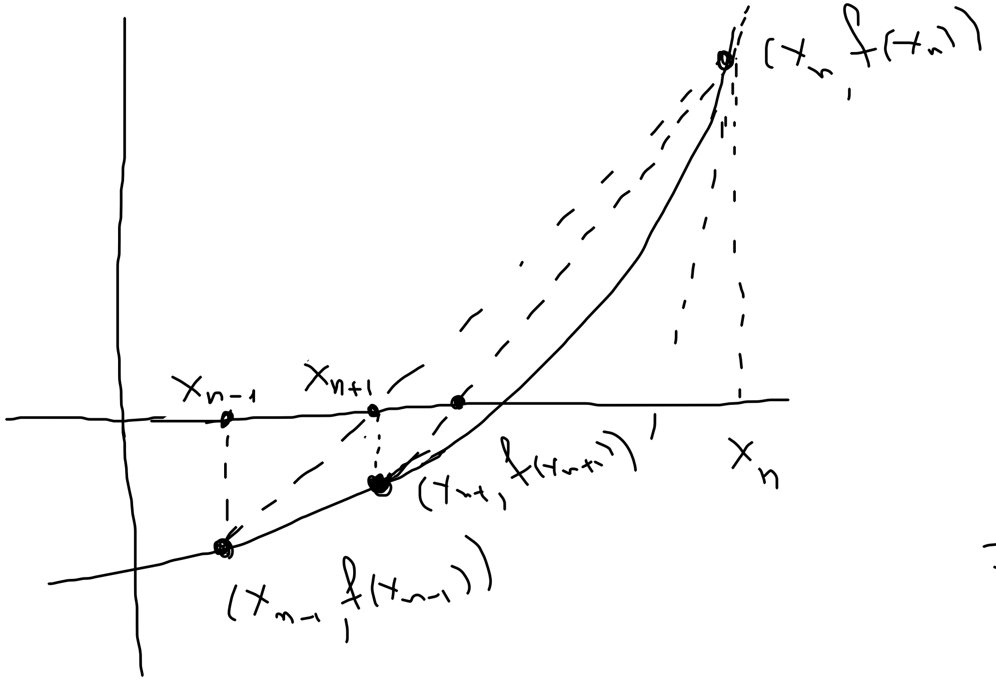
Οπότε για $m \neq 1$, η τάξη σύγκλισης είναι $\underline{1}$.

Συνεπώς $\dfrac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \dfrac{1}{m}$

Οπότε για $m \neq 1$, η τάξη σύγκλισης είναι $\underline{1}$.

Μέθοδος της τέμνουσας

Αν θέλουμε να προσεγγίσουμε τη ρίζα μιας συνάρτησης f, αλλά δεν γνωρίζουμε την f' ή είναι δύσκολο να υπολογιστεί τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο που μοιάζει με τη μέθοδο Νεύτωνα, τη μέθοδο της τέμνουσας.



$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Μέθοδος της τέμνουσας : Χρειαζόμαστε δυο αρχικές προσεγγίσεις x_0, x_1

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

<u>Θεώρημα</u> : Έστω x^* ρίζα της f, $x^* \in (a,b)$, $f \in C^2(a,b)$, $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$

Ώστε υπάρχει ενα διαστημα $I \subset (a,b)$ τέτοιο ωστε $x^* \in I$ και για $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$ η ακολουθια (x_n) που προκυπτει με τη μεθοδο της τέμνουσας ειναι καλως ορισμενη και συγκλινει στο x^*. Η ταχυτητα (τάξη) σύγκλισης ειναι $p = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.62$

Παραλλαγή της μεθόδου Νεύτωνα

Έστω ότι f έχει το x^* ως ρίζα πολλαπλότητας $m \geq 2$

Είδαμε ότι η μέθοδος Νεύτωνα θα συγκλίνει γραμμικά (ταχύτητα 1 σύγκλισης)

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το x^* είναι απλή ρίζα της μ $(\mu(x^*)=0,\ \mu'(x^*) \neq 0)$

Ώστε αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Νεύτωνα για τη συνάρτηση μ, η σύγκλιση θα είναι τετραγωνική (ταχύτητα 2)

Ο τύπος θα είναι $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\mu(x_n)}{\mu'(x_n)}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\, f'(x_n)}{(f'(x_n))^2 - f(x_n)\, f''(x_n)}$$

$$f(x) = (x - x^*)^m q(x) \quad , \; \mu \leftarrow q(x^*) \neq 0$$

$$\mu(x) = \frac{(x-x^*)^m q(x)}{m(x-x^*)^{m-1} q(x) + (x-x^*)^m q'(x)} = \frac{(x-x^*)\, q(x)}{m\, q(x) + (x-x^*) q'(x)}$$

$$\mu(x^*) = 0$$

$$\mu'(x) = \frac{\left(q(x) + (x-x^*) q'(x)\right)\left[m q(x) + (x-x^*) q'(x)\right] - (x-x^*) q(x)\left[m q(x) + (x-x^*) q'(x)\right]'}{\left[m q(x) + (x-x^*) q'(x)\right]^2}$$

$$\mu'(x^*) = \frac{m q^2(x^*)}{m^2 q^2(x^*)} = \frac{1}{m} \neq 0$$