Γραμμικά Συστήματα

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $x, b \in \mathbb{R}^n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να βρούμε $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Ax = b$$

Θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα που έχουν μόνο μια λύση

Θεώρημα: Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να έχει ένα γραμμικό σύστημα μία και μόνο λύση είναι να ικανοποιείται κάποια από τις παρακάτω συνθήκες

(i) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, υπάρχει δηλαδή ο A^{-1}

(ii) $\det(A) \neq 0$

(iii) Το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα $Ax = 0 \in \mathbb{R}^n$ έχει ως μοναδική λύση την τετριμμένη (δηλαδή $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$)

(iv) Οι στήλες ή οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε π.χ. τον κανόνα του Cramer

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \left(\alpha^1 \,\middle|\, \alpha^2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \alpha^n \right), \quad \alpha^i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \dots, n$$

$$A_i = \left(\alpha^1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \alpha^{i-1} \,\middle|\, \underline{\underline{b}} \,\middle|\, \alpha^{i+1} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, \alpha^n \right)$$

Η λύση x του $Ax = b$ προκύπτει

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Φυσικά αν γνωρίζουμε τον A^{-1} τότε άμεσα

$$x = A^{-1} b$$

Υπάρχουν τρόποι για να βρούμε τον A^{-1} (μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας)

Επίσης ένας άλλος τρόπος για να υπολογίσουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος είναι να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss.

Υπολογισμός της λύσης x, $Ax = b$

i) Μέθοδος Cramer
ii) Υπολογισμός του A^{-1}, $(x = A^{-1}b)$
iii) Απαλοιφή Gauss.

Παρατήρηση: Ένας τρόπος υπολογισμού του A^{-1} είναι ο ακόλουθος

Έστω $e^i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-θέση}$, έχει παντού 0 εκτός από την i-θέση που έχει 1.

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $Ax^{(i)} = e^i$, η λύση $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ είναι η i-στήλη του A^{-1}

$$A^{-1} = \left(x^{(1)} \middle| \dots \middle| x^{(n)} \right)$$

Η επίλυση ενός γραμμικού συστήματος στον Η/Υ διαφέρει από αυτή που μαθαίναμε σε ένα μάθημα Γραμμικής άλγεβρας.

Κατ'αρχήν η μέθοδος του Cramer είναι απαγορευτική στον Η/Υ

Ο υπολογισμός της ορίζουσας ενός $n \times n$ πίνακα A, δίνεται από το άθροισμα

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \quad \text{για κάποια στήλη } j, \quad 1 \le j \le n$$

με $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, έχουμε διαγράψει την i-γραμμή & j-στήλη του A

Προκύπτουν $n!\,(n-1)$ πολ/μοί. Ο αριθμός των πράξεων είναι απαγορευτικός

Ο υπολογισμός του A^{-1} αντιστοιχεί στην επίλυση n-γραμμικών συστημάτων και δεν συμφέρει αν θέλουμε να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα.

Η απαλοιφή Gauss είναι μια διαδικασία, η οποία μετά από ένα αριθμό πράξεων (μπορεί να υπολογιστεί ότι είναι $\approx \frac{1}{3}n^3$) οδηγεί στον υπολογισμό της λύσης x

Η βασική ιδέα είναι μετατρέψουμε, με κατάλληλους μετασχηματισμούς, το γραμμικό σύστημα $Ax=b$ σε ένα ισοδύναμο $Ux=y$, όπου ο U είναι άνω τριγωνικός πίνακας. Η διαδικασία ονομάζεται τριγωνοποίηση

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Οδηγούμαστε στη λυση x, λύνοντας πρώτα την τελευταία εξίσωση του

$$Ux = y$$

Ετσι, $x_n = y_n / u_{nn}$, αντικαθιστούμε στην προτελευταία εξίσωση την τιμή x_n και μπορούμε μετά να πάρουμε τη τιμή της x_{n-1}. Συνεχίζουμε με αυτό τον τροπο και ετσι υπολογίζουμε ολο το διανυσμα x.

Αυτή η διαδικασια ονομάζεται οπισθοδρόμηση

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{array}{l} u_{11}x_1 + \dots + u_{1n}x_n = y_1 \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad u_{nn}x_n = y_n \end{array}$$

Αλγόριθμος οπισθοδρόμησης

$x_n = y_n / u_{nn}$

Για $k = n-1, n-2, n-3, \dots, 2, 1$

$$x_k = \left(y_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j\right) / u_{kk}$$

Πράξεις: Πολ/μοι + Διαιρέσεις

$$\left.\begin{array}{l} n : \text{Διαιρέσεις} \\ 1+2+\dots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2} : \text{Πολ/μοι} \end{array}\right\} \quad \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = O(n^2)$$

Το πλήθος των προσθέσεων-αφαιρέσεων $\approx$ το πλήθος των πολ/μων – διαιρέσεων

Αν το γραμμικό σύστημα $Ax=b$, έχει πίνακα A που είναι

(i) διαγώνιος

(ii) άνω τριγωνικός

μπορούμε να υπολογίσουμε τη λύση (π.χ. χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο οπισθοδρόμησης)

Για πίνακα A (γενική μορφή) πρέπει να τον μετατρέψουμε σε άνω τριγωνικό (τριγωνοποίηση πίνακα).

Δημιουργούμε τους πίνακες $A = A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)} = U$ (U άνω τριγωνικός)

Υποθέτουμε κατα αρχήν $a_{11} = a_{11}^{(1)} \neq 0$ (Επειδή $\det(A) \neq 0$ με εναλλαγές γραμμων αυτό ειναι εφικτό)

Ορίζουμε τους πολλ/στές $m_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$, $i = 2, 3, \dots, n$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα $A^{(2)}$. Η πρωτη γραμμη παραμενει η ίδια

$$a_{1i}^{(2)} := a_{1i}^{(1)} \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Οι υπόλοιπες ορίζονται ως

$$a_{ij}^{(2)} := a_{ij}^{(1)} - m_{i1} a_{1j}^{(1)} \quad , \quad i,j = 2, \dots, n$$

Ανάλογα, για το δεξιό μέλος b

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1} b_1^{(1)} \quad , \quad i = 2, \dots, n$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τον υποπίνακα $\tilde{A}^{(2)} = (a_{ij}^{(2)})_{i,j=2}^{n}$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία που κάναμε προηγουμένως.

Έτσι στο r-βήμα θα έχουμε κατασκευάσει τον $A^{(r)}$ και εξετάζουμε τον

$\tilde{A}^{(r)}$ υποπίνακα

$$\tilde{A}^{(r)} = (a_{ij}^{(r)})_{i,j=r}^{n}$$

$$A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(r)} & \cdots & & \cdots & a_{1n}^{(r)} \\ 0 & a_{22}^{(r)} & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ & 0 & \vdots & & \vdots \\ & & a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nr}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{matrix}}_{\tilde{A}^{(r)}}$$

Θεωρούμε τους πολ/τες

$$m_{ir} = \frac{a_{ir}^{(r)}}{a_{rr}^{(r)}}, \quad i=r+1,\dots,n, \quad a_{rr}^{(r)} \neq 0$$

$$a_{ij}^{(r+1)} = 0, \quad i=r+1,\dots,n, \quad j=1,\dots,r$$

$$a_{ij}^{(r+1)} = a_{ij}^{(r)} - m_{ir} a_{rj}^{(r)}, \quad i,j=r+1,\dots,n$$

και $$b_i^{(r+1)} = b_i^{(r)} - m_{ir} b_r^{(r)}, \quad i=r+1,\dots,n$$

Στο τέλος, για $r=n-1$, θα έχουμε καταλήξει σε ένα άνω τριγωνικό πίνακα $A^{(n)}$ και το αρχικό γραμμικό σύστημα θα είναι ισοδύναμο με το

$$A^{(n)}x = b^{(n)}$$

Υπολογισμός πράξεων.

Για τον σχηματισμό του $A^{(n)}$

Στο 1ο βήμα:

Για τον υπολογισμό των m_{i1} : $(n-1)$ πράξεις (διαιρέσεις)

Για τον υπολογισμό των $a_{ij}^{(2)}$: $(n-1)^2$ πολ/μοί + $(n-1)^2$ προσθέσεις

Επομένως εύκολα παρατηρούμε στο r-βήμα : $(n-r)^2+(n-r)$ πράξεις (πολ/μοί + διαιρέσεις)

Συνολικά για τον $A^{(n)}$ κάνουμε $\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2+(n-i)$

$$= \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)(n)}{2} = \frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$$

Υπολογισμός διανύσματος $b^{(n)}$

Στο 1ο βήμα : $(n-1)$ πολ/μοί + $(n-1)$ προσθέσεις

Συνολικά βλέπουμε ότι συνολικά για το $b^{(n)}$ θα χρειαστούμε

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{(n-1)\,n}{2} \quad \text{πολ/μούς}$$

Συνολικά για τον σχηματισμό $A^{(n)}$ & $b^{(n)}$ θέλουμε

$$\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} = \frac{n^3}{3} + O(n^2) \quad \text{πράξεις (πολ/μοί)}$$

Συνολικά θα χρειαστούμε

$\frac{n^3}{3} + O(n^2)$: τριγωνοποίηση

$\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$: οπισθοδρόμηση (επίλυση)

Σύνολο: $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$ πράξεις (πολ/μοι – διαιρέσεις)

Σφάλματα στον Η/Υ κατά την διαδικασία της απαλοιφής Gauss

Τα στοιχεία $a_{ii}^{(i)}$ που δημιουργούνται στο i-βήμα του αλγορίθμου καλούνται <u>οδηγοί</u>

Αν οι οδηγοί είναι πολύ μικροί σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία του $A^{(i)}$ οδηγούμαστε σε σφάλματα στρογγύλευσης

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{10000}{9999}$$

$$x_2 = \frac{9998}{9999}$$

Ας υποθέσουμε ότι στον Η/Υ κάνουμε πράξεις με 3 δεκαδικά ψηφία και $-L = U = 20$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\left.\begin{aligned} 10^{-4}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Μοναδική λύση

$$x_1 = \frac{10000}{9999}$$

$$x_2 = \frac{9998}{9999}$$

Ας υποθέσουμε ότι στον Η/Υ κάνουμε πράξεις με 3 δεκαδικά ψηφία και $-L = U = 20$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Για τον υπολογισμό του $A^{(2)}$

Ο οδηγός $a_{11}^{(1)} = 10^{-4}$ είναι μικρός σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^{4}$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21} a_{12}^{(1)} = 1 - 10^{4} \cdot 1 = -9999$$

$$\tilde{a}_{22}^{(2)} = fL(a_{22}^{(2)}) = -fL(9999) = -fL(0.9999 \times 10^{4}) = -1 \times 10^{4} = -0.1 \times 10^{5}$$

$$b_{2}^{(2)} = b_{2}^{(1)} - m_{21} b_{1}^{(1)} = 2 - 10^{4} = -9998$$

$$\tilde{b}_{2}^{(2)} = fL(b_{2}^{(2)}) = -fL(9998) = -fL(0.9998 \times 10^{4}) = -1 \times 10^{4} = -0.1 \times 10^{5}$$

Συνεπώς στον <u>Η/Υ</u>

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 0 & -10^{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -10^{4} \end{pmatrix}$$

Οπότε η οπισθοδρόμηση δίνει $x_2 = 1$ και $x_1 = 0$

Προφανώς αυτό είναι μια κακή προσέγγιση

Επειδή ο οδηγός $a_{11}^{(1)}$ είναι πολύ μικρός σε σχέση με τα υπόλοιπα στοιχεία, ο πολλ/της m_{21} γίνεται πολύ μεγάλος (κατ' απόλυτη τιμή)