Εξετάσαμε το παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Η ακριβή λύση του $Ax=b$, $x_1 = \dfrac{10000}{9999}$, $x_2 = \dfrac{9998}{9999}$

Εφαρμόζοντας στον Η/Υ τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss οδηγούμαστε σε λάθος λύση (λόγω σφαλμάτων στρογγύλευσης)

Στον Η/Υ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων παίρνουμε τη λύση $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 1$.

Εναλλακτικός αλγόριθμος για την απαλοιφή Gauss)

Ένα ισοδύναμο γραμμικό σύστημα προκύπτει αν αλλάξουμε τη σειρά εξισώσεων

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 10^{-4} x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Η ακριβής λύση δεν έχει αλλάξει.

Τώρα ο οδηγός $a_{11}^{(1)} = 1$ και $m_{21} = \dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 10^{-4}$

Οπότε $a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21} a_{12}^{(1)} = 1 - 10^{-4} = 0{,}1 \times 10^1 - 0.\underbrace{00001}_{5\text{ψηφία}} \times 10^1$

$= 0.09999 \times 10^1$

$\tilde{a}_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(2)}) = 0.1 \times 10^1 = 1$

$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - m_{21} b_1^{(1)} = 1 - 2 \times 10^{-4} = 0.1 \times 10^1 - 0.00002 \times 10^1 = 0.09998 \times 10^1$

$\tilde{b}_2^{(2)} = \underline{1}$

Οπότε στον Η/Υ θα λύσουμε το γραμμικό σύστημα

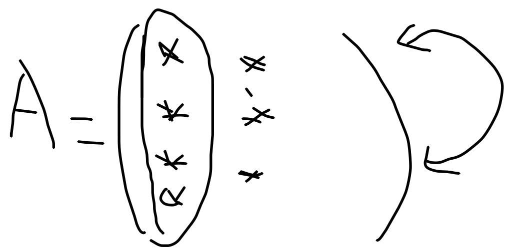
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

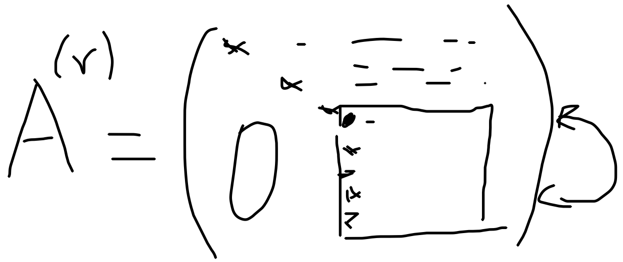
Λύνοντας με οπισθοδρόμηση θα πάρουμε $x_2 = 1$ και $x_1 = 1$.
η οποία είναι πολύ καλύτερη προσέγγιση

# Απαλοιφή Gauss με οδήγηση (μερική)

1ο βήμα: Εξετάζουμε τα στοιχεία της 1ης στήλης, $a_{i1}^{(1)}$, και με εναλλαγή γραμμών μεταφέρουμε ως πρώτη γραμμή αυτή που έχει το μεγαλύτερο κατ' απόλυτη τιμή στοιχείο, στη πρώτη στήλη.

r-βήμα: Εξετάζουμε τα στοιχεία της r-στήλης του υποπίνακα $\hat{A}^{(r)} \in \mathbb{R}^{(n-r+1)\times(n-r+1)}$, $a_{ir}^{(r)}$, $i=r,\dots,n$, και με εναλλαγή γραμμών μεταφέρουμε στη r-γραμμή, αυτή που έχει το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο στην r-στήλη





Υπολογισμός επιπλέον πράξεων

1ο βήμα : $n-1$ πράξεις (συγκρίσεις - διαιρέσεις)

r-βήμα : $n-r$ πράξεις

Συνολικά $(n-1)+(n-2)+\dots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ πράξεις

Οπότε η απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση δεν αλλάζει πολύ το ~~κόστος~~:

Κόστος πράξεων $\dfrac{n^3}{3} + O(n^2)$

# Παραλλαγή της μεθόδου απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση

Ο όρος "μικρός οδηγός" που μας οδήγησε στη μέθοδο της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση είναι ασαφής

<u>Παράδειγμα</u>

$$x_1 + 10^4 x_2 = 10^4$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Έχουμε πολ/σει τη 1η εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος με $10^4$

Η ακριβής λύση παραμένει η ίδια, αλλά ο αλγόριθμος της μερικής οδήγησης που παρουσιάσαμε προηγουμένως, δεν θα δώσει ότι χρειάζεται εναλλαγή γραμμών γιατί ο $a_{11}^{(1)}$ δεν είναι μικρότερος από το $a_{21}^{(1)}$

# Παραλλαγή της μεθόδου απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση

Ο όρος "μικρός οδηγός" που μας οδήγησε στη μέθοδο της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση είναι ασαφής

<u>Παράδειγμα</u>

$$x_1 + 10^4 x_2 = 10^4$$
$$x_1 + x_2 = 2$$

Έχουμε πολ/σει τη 1η εξίσωση του προηγούμενου παραδείγματος με $10^4$

Η ακριβής λύση παραμένει η ίδια, αλλά ο αλγόριθμος της μερικής οδήγησης που παρουσιάσαμε προηγουμένως, δεν θα δώσει ότι χρειάζεται εναλλαγή γραμμών γιατί ο $a_{11}^{(1)}$ δεν είναι μικρότερος από το $a_{21}^{(1)}$

Πραγματοποιώντας πράξεις με την πεπερασμένη ακρίβεια που έχει ο υποθετικός υπολογιστής (κρατάμε 3 δεκαδικά ψηφία), θα οδηγηθούμε στη λύση $\tilde{x}_2 = 1$ και $\tilde{x}_1 = 0$

Πραγματοποιώντας πράξεις με την πεπερασμένη ακρίβεια που έχει ο υποθετικός υπολογιστής ( κρατάμε 3 δεκαδικά ψηφία) , θα οδηγηθούμε στη λύση $\tilde{x}_2 = 1$ και $\tilde{x}_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1$$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - m_{21}^{(1)} a_{12}^{(1)} = a_{22}^{(1)} - a_{21}^{(1)} \frac{a_{12}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 1 - 10^4 = -9999$$

$$\tilde{a}_{22}^{(2)} = fl(a_{22}^{(2)}) = -10^4$$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - m_{21}^{(1)} b_1^{(1)} = 2 - 10^4 = -9998 \quad , \quad \tilde{b}_2^{(2)} = fl(b_2^{(2)}) = -10^4$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα δημιουργείται και πάλι.

Οφείλεται στη διαφορά μεγέθους κατ' απόλυτη τιμή ανάμεσα στους συντελεστές $a_{11}^{(1)}$ & $a_{12}^{(1)}$

Έτσι $\dfrac{|a_{11}^{(1)}|}{|a_{12}^{(1)}|} = 10^{-4}$ ενώ $\left|\dfrac{a_{21}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right| = 1$

Ο λόγος γίνεται μεγαλύτερος στα στοιχεία της δεύτερης γραμμής οπότε αυτό μας οδηγεί να πραγματοποιήσουμε την εναλλαγή γραμμών.

Αλγόριθμος απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση με στάθμιση

Υπολογίζουμε κατ' αρχήν τον αντίστοιχο μέγεθος $S_i$ της $i$-γραμμής του $A$

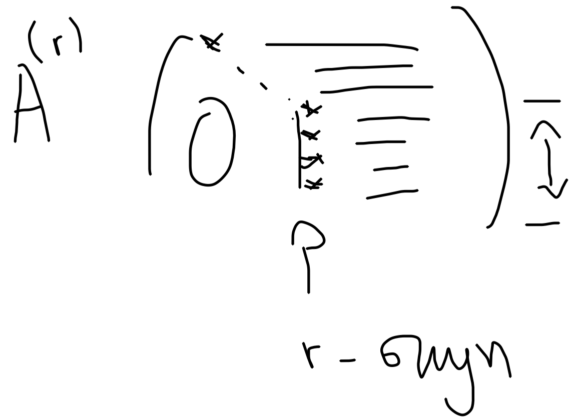
$$S_i = \max_j |a_{ij}^{(1)}| \qquad 1 \le i \le n$$

1ο βήμα : Επιλέγουμε ως πρώτο οδηγό (και κάνουμε την αντίστοιχη εναλλαγή γραμμών) εκείνο για τον οποίο ο λόγος $\dfrac{|a_{i1}^{(1)}|}{S_i}$ γίνεται μεγαλύτερος

Στο r-βήμα :: Επιλέγουμε ως οδηγό, και κάνουμε την αντίστοιχη εναλλαγή γραμμών για την οποία ο λόγος

$$\frac{|a_{ir}^{(r)}|}{s_i}, \quad i=r,\dots,n$$

γίνεται μεγαλύτερος



Συνήθως η μερική οδήγηση ή η μερική οδήγηση με στάθμιση αρκούν για να ελαττώσουν τα σφάλματα στρογγύλευσης

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που αποτυγχάνουν. Τότε μπορούμε να πραγματοποιήσουμε εναλλαγές γραμμών ή και στηλών και να μεταφέρουμε ως οδηγό το μεγαλύτερο κατ' απόλυτο τιμή στοιχείο του υποπίνακα $\hat{A}^{(r)}$

Αυτή η διαδικασία καλείται ολική οδήγηση

Το κόστος της όμως είναι σημαντικό, είναι της τάξης $n^3$,

και για αυτό το λόγο την αποφεύγουμε αν μπορούμε.

$n = 1000$ $\quad 10^3$

$n^2$

# Αναγωγή LU

Ας θεωρήσουμε ένα πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, αντιστρέψιμο, για τον οποίο η τριγωνοποίηση κατά τη διάρκεια της απαλοιφής Gauss γίνεται <u>χωρίς</u> εναλλαγές γραμμών,

τότε υπάρχουν δυο πίνακες, $L$ κάτω τριγωνικός με μονάδες (1) στη διαγώνιο και $U$ άνω τριγωνικός με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο,

τέτοιοι ώστε
$$A = LU$$

Αναλύουμε τον $A$ σε δυο παράγοντες-πίνακες, $L$ και $U$

Θα δείξουμε ότι ο πίνακας $U$ είναι ο άνω τριγωνικός πίνακας $A^{(n)}$ που καταλήγουμε όταν ολοκληρωθεί η τριγωνοποίηση κατά την απαλοιφή Gauss.

Ο πίνακας $L$, θα περιέχει τους πολ/τές που βρίσκουμε κατά την τριγωνοποίηση Gauss

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι $A = L \cdot U$

Υποθέτουμε ότι η τριγωνοποίηση του $A$ γίνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών

Θέτουμε

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ -m_{21} & 1 & & \\ -m_{31} & & \ddots & \\ \vdots & 0 & & \\ -m_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}$$

$m_{i1}$ είναι οι πολλ/τες που βρίσκουμε στο $1^{ο}$ βήμα της τριγωνοποίησης

Μπορούμε να δούμε ότι $M_1 A = A^{(2)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

Ας δούμε για ευκολία ενα $2\times 2$ παράδειγμα.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

$$M_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{11} m_{21} + a_{21} & -m_{21} a_{12} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \underbrace{a_{22} - m_{21} a_{12}}_{a_{22}^{(2)}} \end{pmatrix} = A^{(2)}$$

Θέτουμε τώρα $$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ 0 & -m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -m_{n2} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να δούμε ότι $M_2 A^{(2)} = A^{(3)}$

Θα έχουμε λοιπόν ότι $A^{(3)} = M_2 M_1 A$

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & & \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & \\ & & & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & -m_{r+1\,r} & \ddots & \\ 0 & \vdots & & \vdots & & \\ & 0 & & -m_{nr} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_r A^{(r)} = A^{(r+1)}$$

και στο τέλος $A^{(n)} = M_{n-1} A^{(n-1)} = \dots = M_{n-1} M_{n-2} \dots M_1 A$

Οι πίνακες $M_r$, $r=1,\dots,n-1$ που θεωρήσαμε είναι αναστρέψιμοι
(γιατί έχουν ορίζουσα, $\det(M_r)=1$)

Οπότε $$A^{(n)} = M_{n-1}\cdots M_1 A \Rightarrow \underline{A = M_1^{-1} M_2^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1} A^{(n)}}$$

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Πράγματι
$$M_1^{-1} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -m_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -m_{n1} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ m_{21}-m_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1}-m_{n1} & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι

$$M_r^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 0 & & m_{(r+1)r} & \ddots & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & m_{nr} & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Τώρα επίσης εύκολα μπορούμε να δούμε ότι

$$M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot \ldots \cdot M_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ m_{21} & 1 & & & \\ \vdots & m_{32} & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} = \boxed{L}$$

$$\boxed{A^{(n)} = U}$$

Συνεπώς δείξαμε ότι αν για τον πίνακα A ολοκληρώνεται η τριγωνοποίηση χωρίς εναλλαγές γραμμών τότε υπάρχουν πίνακες L & U, με L κάτω τριγωνικό με 1 στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικό με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο τ.ω.

$$A = L\,U$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι αυτοί οι 2 πίνακες είναι μοναδικοί. (Άσκηση)

## Στην περίπτωση τώρα που πρέπει να γίνουν εναλλαγές γραμμών.

Αν θεωρήσουμε τον μοναδιαίο πίνακα $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και κάνουμε μία εναλλαγή γραμμών, θα προκύψει ένας πίνακας $P$ (καλείται πίνακας μετάθεσης)

Π.χ. $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και εναλλάζουμε 1η με 3η γραμμή.

παίρνουμε τον $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Πολ/ντας έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με έναν πίνακα μετάθεσης $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ προκύπτει ένας νέος πίνακας που έχει αλλαγές γραμμών του $A$, που περιγράφει ο $P$

Στο παραπάνω παράδειγμα με τον $3\times 3$ πίνακα.

$$PA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

Έστω λοιπόν ότι γνωρίζουμε τις εναλλαγές που πρέπει να γίνουν για να ολοκληρωθεί η τριγωνοποίηση του $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ και $P$ ο πίνακας μετάθεσης που περιγράφει αυτές τις εναλλαγές, τότε για τον $PA$ η τριγωνοποίηση γίνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών.

Συνεπώς υπάρχουν $L$ και $U$, όπως περιγράφονται παραπάνω ώστε

$$\underline{PA = LU}$$

# Εφαρμογή της απαλοιφής Gauss στον Η/Υ.

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα

$$Ax = b$$

(Για ευκολία ας υποθέσουμε ότι δεν χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγές γραμμών)

Είδαμε ότι υπάρχουν δυο πίνακες $L$ & $U$, $L$ κάτω τριγωνικός και $U$ άνω τριγωνικός, τ.ω.

$$A = LU.$$

Ας υποθέσουμε ότι τους γνωρίζουμε.

Το γραμμικό σύστημα γράφεται τώρα ως

$$Ax=b \iff (LU)x=b$$

$$(LU)x=b \quad \text{ή} \quad L(Ux)=b$$

Θέτουμε λοιπόν $y=Ux$, τώρα πρέπει να κάνουμε τα εξής 2 βήματα.

i) Βρίσκουμε $y\in\mathbb{R}^n$, $Ly=b$

ii) Βρίσκουμε $x\in\mathbb{R}^n$, $Ux=y$

Επειδή οι πινακες $L$ και $U$ ειναι κάτω και ανω τριγωνικοί πινακες τοτε τα γραμμικά συστηματα λυνονται ευκολα.

$Ly = b$ ($L$ κατω τριγωνικος)

Χρησιμοποιουμε εναν αλγοριθμο αναλογο με την οπισθοδρομηση, αλλά ξεκιναμε από την $1^{η}$ γραμμη ($1^{η}$ εξισωση του συστηματος)

Στη συνεχεια λυνουμε το

$Ux = y$ ($U$ ανω τριγωνικος)

Χρησιμοποιουμε τον αλγοριθμο της οπισθοδρομησης.

# Αλγόριθμος κατασκευής των L & U της αναγωγής LU

Θέλουμε να βρούμε τα στοιχεία των L και U. Υποθέτουμε ότι δεν χρειάζονται εναλλαγές γραμμών, έτσι.

$$A = L\,U$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & O \\ l_{21} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n-1\,n} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ O & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ειναι προφανές οτι με βαση τον πολ/μο πινακων θα ισχυει

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} u_{kj} \quad , \quad i,j=1,\dots,n$$

Ομως ο $L$ ειναι κάτω τριγωνικός ($l_{ik}=0$ για $i<k$)
και ο $U$ ειναι άνω τριγωνικος ($u_{kj}=0$ για $j<k$)

Συνεπως $$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} u_{kj} \quad , \quad i,j=1,\dots,n$$

Αυτη η παρατηρηση οδηγει στον ακολουθο αλγοριθμο

Κατασκευάζουμε τους L & U κατά γραμμές

1η γραμμή

$$a_{1j} = \sum_{k=1}^{\min(1,j)} \ell_{1k} u_{kj} = \ell_{11} u_{1j} \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

Επειδή $\ell_{11} = 1$ μπορούμε τη 1η γραμμή του $U$, τα στοιχεία $u_{1j}$, $j = 1, \dots, n$

$$u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1, \dots, n$$

2η γραμμή

$$a_{2j} = \sum_{k=1}^{\min(2,j)} \ell_{2k} u_{kj} \quad , \quad j = 1, \dots, n.$$

για $j = 1$ $\quad a_{21} = \ell_{21} u_{11} \Rightarrow \ell_{21} = a_{21} / u_{11}$ (Γνωρίζουμε το $u_{11}$ από το προηγούμενο βήμα)

για $j = 2, \dots, n$ $\quad a_{2j} = \ell_{21} u_{1j} + \ell_{22} u_{2j}$

$$= \ell_{21} u_{1j} + u_{2j} \Rightarrow u_{2j} = a_{2j} - \ell_{21} u_{1j}$$

Μέχρι σε αυτό το σημείο έχουμε βρει τα στοιχεία των 2 πρώτων γραμμών και των 2 πινάκων L & U.

Συνεχίζουμε ανάλογα και στην $3^{\eta}$ γραμμή οπότε

$$a_{3j} = \sum_{k=1}^{\min(3,j)} l_{3k} u_{kj} \quad , \quad j = 1,\dots,n$$

Πρώτα βρίσκουμε τα στοιχεία της 3ης γραμμής του L

$$a_{31} = l_{31} u_{11} \Rightarrow l_{31} = a_{31} / u_{11}$$

$$a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31} u_{12}) / u_{22}$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι $l_{33} = 1$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τα στοιχεία της $3^{\eta}$ γραμμής του U

$$a_{3j} = l_{31} u_{1j} + l_{32} u_{2j} + l_{33} u_{3j} \Rightarrow u_{3j} = a_{3j} - l_{31} u_{1j} - l_{32} u_{2j} \quad , \quad j = 3,\dots,n$$

Αλγόριθμος αναγωγής LU (κατά γραμμές)

Για $i=1$ έως $n$

Για $j=1$ έως $i-1$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\right) / u_{jj}$$

$$l_{ii} = 1$$

Για $j=i$ έως $n$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$$

Υπάρχει ανάλογος αλγόριθμος που σχηματίζουμε τους πίνακες $L$ & $U$ κατά στήλες.

Στην περίπτωση που πρέπει να γίνουν εναλλαγές γραμμών ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να υπολογίζουμε και τον πίνακα μετάθεσης $P$.

Τα βήματα για τον υπολογισμό της λύσης του $Ax=b$

1) Βρίσκουμε τους πίνακες $P, L, U$ ώστε $PA = LU$ (Αναλυση $LU$)
2) Λύνουμε το $Ly = Pb$ ($L$ είναι κάτω τριγωνικός)
3) Λύνουμε το $Ux = y$ ($U$ είναι άνω τριγωνικός)

$\underline{Ax=b}$, $PAx = Pb$ ή $(LU)x = Pb$

## Παράδειγμα

Έστω ότι
$$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

Εδώ η απαλοιφή Gauss ολοκληρώνεται χωρίς εναλλαγές γραμμών $(P=I)$

$$A=LU=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε ότι $l_{ii}=1$, $i=1,2,3,4$

$1^{\eta}$ γραμμή (Σύμφωνα με τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε)

$$u_{11} = a_{11} = 6 \,, \quad u_{12} = a_{12} = -2 \,, \quad u_{13} = 2 \,, \quad u_{14} = 4 \,, \quad \ell_{11} = 1.$$

$2^{\eta}$ γραμμή

$$\ell_{21} = a_{21} / u_{11} = 12/6 = 2 \,, \quad \ell_{22} = 1$$

$$a_{22} = \ell_{21} u_{12} + 1 \cdot u_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - \ell_{21} u_{12} = -8 - 2(-2) = -8+4 = -4$$

$$a_{23} = \ell_{21} u_{13} + 1\, u_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - \ell_{21} u_{13} = 6 - 2 \cdot 2 = 6-4 = 2$$

$$a_{24} = \ell_{21} u_{14} + 1 \cdot u_{24} \Rightarrow u_{24} = a_{24} - \ell_{21} u_{14} = 10 - 2 \cdot 4 = 2$$

3η γραμμή

$$a_{31} = l_{31} u_{11} \Rightarrow l_{31} = a_{31} / u_{11} = 3/6 = 1/2$$

$$a_{32} = l_{31} u_{12} + l_{32} u_{22} \Rightarrow l_{32} = (a_{32} - l_{31} u_{12}) / u_{22} = \frac{-13 - \frac{1}{2}(-2)}{(-4)} = 3$$

$$a_{33} = l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23} + 1 \cdot u_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - l_{31} u_{13} - l_{32} u_{23} = 2$$

$$a_{34} = l_{31} u_{14} + l_{32} u_{24} + 1\, u_{34} \Rightarrow u_{34} = a_{34} - l_{31} u_{14} - l_{32} u_{24} = -5$$

4η γραμμή

$$l_{41} = -1, \quad l_{42} = -1/2, \quad l_{43} = 2, \quad l_{44} = 1.$$

$$u_{44} = -3.$$

Οπότε

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{U}$$

Για να λύσουμε τώρα το γραμμικό σύστημα $Ax = b$

λύνουμε πρώτα το $Ly = b$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 \\ 26 \\ -19 \\ -34 \end{pmatrix}}_{b}$$

$y_1 = 16$

$y_2 = b_2 - l_{21} y_1 = 26 - 2 \cdot 16 = -6$

$y_3 = b_3 - l_{31} y_1 - l_{32} y_2 = -19 - \frac{1}{2} 16 - 3(-6) = -9$

$y_4 = b_4 - l_{41} y_1 - l_{42} y_2 - l_{43} y_3 = -34 - (-1)\, 16 - (-1/2)(-6) - 2(-9) = -3$

Γενικά η λύση $x$ του $Ax=b$ προκύπτει λύνοντας το $Ux=y$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}}_{y}$$

$$x_4 = y_4 / U_{44} = -3/(-3) = 1$$

$$x_3 = (y_3 - U_{34} x_4)/U_{33} = \frac{-9-(-5)1}{2} = -2$$

$$x_2 = (y_2 - U_{23}x_3 - U_{24}x_4)/U_{22} = \dots = 1$$

$$x_1 = (y_1 - U_{12}x_2 - U_{13}x_3 - U_{14}x_4)/U_{11} = \dots = 3$$