Τριδιαγώνια Γραμμικά Συστήματα

Είδαμε ότι για να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα

$$Ax = b$$

βρίσκουμε την ανάλυση LU του A, και στη συνέχεια λύνουμε τα γραμμικά συστήματα

$$Ly = b \;\&\; Ux = b$$

(Αν δεν χρειάζεται να κάνουμε εναλλαγή γραμμών)

Το κόστος των πράξεων είναι $\frac{n^3}{3} + O(n^2)$

π.χ. $n = 10^3 \Rightarrow$ κόστος $\approx \frac{1}{3} 10^9$

Αν ο A είναι διαγώνιος (δηλ. γνωρίζουμε τη δομή του)
δεν χρειάζεται να κάνουμε $n^3/3$ πράξεις αλλά με n-πράξεις

λύνουμε το αντίστοιχο σύστημα.

Φυσικά δεν περιμένουμε να έχουμε διαγώνιους πίνακες, αλλά πολλές φορές οι πίνακες που προκύπτουν από την μοντελοποίηση ενός φυσικού προβλήματος (και θέλουμε να λύσουμε ένα αντίστοιχο γραμμικό σύστημα) έχουν κάποια συγκεκριμένη δομή (π.χ. έχουν πολλά μηδενικά)

Οι πίνακες που έχουν πολλά μηδενικά λέγονται αραιοί

Ένα παράδειγμα αραιού πίνακα είναι ένας τριδιαγώνιος πίνακας

A είναι τριδιαγώνιος αν έχει μηδενικά στοιχεία παντού εκτός από τη κύρια διαγώνιο, στη πάνω και κάτω διαγώνιο από τη κύρια διαγώνιο

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & \beta_1 & & & & \\ \gamma_2 & a_2 & \beta_2 & & O & \\ 0 & \gamma_3 & a_3 & \beta_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & O & & \gamma_{n-1} & a_{n-1} & \beta_{n-1} \\ & & & & \gamma_n & a_n \end{pmatrix}$$

Πίνακες αυτής της μορφής εμφανίζονται στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $Ax=b$, θα γράψουμε τον A ως γινόμενο δύο πινάκων, L και U, L κάτω τριγωνικός και U άνω τριγωνικός.

<u>Προσοχή</u>: Οι πίνακες L και U που θα κατασκευάσουμε <u>δεν</u> είναι οι πίνακες που φτιάχνουμε στην ανάλυση LU, και συνδέονται με την απαλοιφή Gauss.

Υποθέτουμε ότι $A=LU$, με

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ \gamma_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}}_{\text{κάτω τριγωνικός}}, \quad U = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{άνω τριγωνικός}}$$

Πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα στοιχεία δ_i, $i=1,\dots,n$ του L και ε_i, $i=1,\dots,n-1$ του U

Για να κατασκευάσουμε τους πίνακες L και U υποθέτουμε κατ'αρχήν ότι τα στοιχεία του A, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \neq 0$, $|\alpha_1| > |\beta_1|$, $|\alpha_n| > |\gamma_n|$ και $|\alpha_i| \geq |\beta_i| + |\gamma_i|$, $2 \leq i \leq n-1$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν αλγόριθμο για να βρούμε τα στοιχεία των L & U

Βρίσκουμε για τα στοιχεία της 1^{η} γραμμής των L & U

$$\alpha_1 = \delta_1 \cdot 1 \quad \text{και} \quad \beta_2 = \delta_1 \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_1 = \beta_2 / \delta_1$$

Στη συνέχεια για τη 2^{η} γραμμή

$$\alpha_2 = \gamma_2 \varepsilon_1 + \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = \alpha_2 - \gamma_2 \varepsilon_1 \quad \text{και} \quad \beta_2 = \varepsilon_2 \delta_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{\beta_2}{\delta_2}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα στοιχεία των L & U δημιουργούνται σύμφωνα με τον ακόλουθο αλγόριθμο.

$$\delta_1 = \alpha_1$$
$$\varepsilon_1 = \beta_1 / \delta_1$$
Για $k = 2, \dots, n-1$
$$\delta_k = \alpha_k - \gamma_k \varepsilon_{k-1}$$
$$\varepsilon_k = \beta_k / \delta_k$$

$$\delta_n = \alpha_n - \gamma_n \varepsilon_{n-1}$$

Για να είναι καλά ορισμένος αυτός ο αλγόριθμος, δηλαδή να ολοκληρώνεται και να παράγει τα στοιχεία δ_i, ε_i, πρέπει $\delta_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$

Σε αυτή την περίπτωση οι L & U είναι αντιστρέψιμοι και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος

Αρχικά, επειδή $\delta_1 = \alpha_1 \neq 0$ και $|\alpha_1| > |\beta_1| \geq 0$ θα έχουμε ότι

$$|\varepsilon_1| = \left|\frac{\beta_1}{\delta_1}\right| = \frac{|\beta_1|}{|\alpha_1|} < 1$$

Στη συνέχεια για να είναι καλά ορισμένο το ε_2, πρέπει $\delta_2 \neq 0$

Παρατηρούμε ότι
$$|\delta_2| = |\alpha_2 - \gamma_2 \varepsilon_1| \geq |\alpha_2| - |\gamma_2 \varepsilon_1|$$
$$= |\alpha_2| - |\gamma_2||\varepsilon_1| > |\alpha_2| - |\gamma_2|$$
$$\geq |\beta_2| \geq 0$$

Λόγω της γνωστής ανισότητας $|\varepsilon_1| < 1$, $|\delta_2| > 0$, $\delta_2 \neq 0$.

Επίσης $|\varepsilon_2| = \dfrac{|\beta_2|}{|\delta_2|} < 1$

Κάνουμε λοιπόν την επαγωγική υπόθεση $\delta_{k-1} \neq 0$ και $|\varepsilon_{k-1}| < 1$
και θα δείξουμε ότι $\delta_k \neq 0$ & $|\varepsilon_k| < 1$

$$|\delta_k| = |a_k - \gamma_k \varepsilon_{k-1}| \geq |a_k| - |\gamma_k||\varepsilon_{k-1}| > |a_k| - |\gamma_k| \geq |\beta_k| \geq 0$$

Άρα $\delta_k \neq 0$. Επιπλέον $|\varepsilon_k| = \dfrac{|\beta_k|}{|\delta_k|} < 1$.

Οπότε έχουμε δείξει το ζητούμενο και $\delta_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$

Στη συνέχεια για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λύνουμε τα $Ly = b$ & $Ux = y$

<u>Η επίλυση $Ly = b$</u>

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & & & 0 \\ \gamma_2 & \delta_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$y_1 = b_1 / \delta_1$$

Για $k = 2, \dots, n$

$$y_k = (b_k - \gamma_k y_{k-1}) / \delta_k$$

Πράξεις $\simeq 2n$.

Στόχος λύνουμε το $Ux=y$.

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_1 & & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon_2 & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = y_n$$

Για $k = n-1, \dots, 2, 1.$

$$x_k = y_k - \varepsilon_k x_{k+1}$$

$\#$Πράξεις $\simeq n.$

Συνολικά χρειαστήκαμε $\simeq 5n$ πράξεις

Αναλυση Cholesky

Ορισμος: Ενας συμμετρικος πινακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(A^T = A)$, καλειται θετικώς ορισμένος αν $x^T A x > 0$, για καθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

Πρόταση: Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ειναι θετικά ορισμένος τοτε ειναι αντιστρέψιμος

Απόδειξη: Αν ο A δεν ειναι αντιστρέψιμος τοτε θα υπαρχει $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ τ.ω. $Ax = 0$. Αφού ο A ειναι θετικά ορισμένος θα πρεπει για αυτό το x να ισχυει $x^T A x > 0$, το οποιο ειναι άτοπο γιατί $Ax = 0 \Rightarrow x^T A x = 0$.

Τα γραμμικά συστήματα με συμμετρικούς και θετικά ορισμένους πίνακες μπορούν να επιλυθούν με απλή απαλοιφή Gauss χωρίς εναλλαγές γραμμών

Άρα από την αναλυση LU, υπάρχουν δυο πίνακες, L κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο και U άνω τριγωνικός τ.ώ.

$$A = LU$$

Στη περίπτωση που ο A είναι συμμετρικός & θετικά ορισμένος υπάρχει μια νέα ανάλυση του A σε γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού και ενός άνω τριγωνικού

Θα ισχύει τώρα ότι $A = LL^T$, όπου L κάτω τριγωνικός με μη-μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο. (Αναλυση Cholesky)

Θεώρημα (Ανάλυση Cholesky): Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ένας συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Τότε υπάρχει μοναδικός κάτω τριγωνικός πίνακας L, με θετικά διαγώνια στοιχεία (όχι αναγκαστικά 1) τέτοιος ώστε

$$A = LL^T$$

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει επαγωγικά ως προς τη διάσταση του πίνακα A.

Αρχικά δείχνουμε ότι ισχύει για $n=1$.

Για $n=1$ $A=[a_{11}]$ και επειδή ο A είναι θετικά ορισμένος θα πρέπει $x^T A x = a_{11} x_1^2 > 0$, δηλαδή $a_{11} > 0$. Είναι απλό να δούμε ότι ο $L = [\sqrt{a_{11}}]$ είναι ο ζητούμενος πίνακας.

Υποθέτουμε τώρα ότι για κάθε συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα $\mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ισχύει το θεώρημα, και θα δείξουμε ότι ισχύει και για πίνακες του $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Έστω λοιπόν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.
Χωρίζουμε τώρα τον πίνακα A σε υποπίνακες με τον ακόλουθο τρόπο

$$A = \begin{pmatrix} d & u^T \\ u & \tilde{H} \end{pmatrix}$$

, όπου $d = a_{11}$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$

Το στοιχείο a_{11} είναι προφανώς θετικό, διότι για $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $x^T A x = a_{11} > 0$.

Μπορούμε να γράψουμε τον A ως γινόμενο των ακόλουθων πινάκων.

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & \mathbb{0}^T \\ \frac{u}{\sqrt{d}} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0}^T \\ \mathbb{0} & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d} & u^T/\sqrt{d} \\ \mathbb{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

όπου $H = \tilde{H} - \frac{1}{d} u u^T$, $\mathbb{0} \in \mathbb{R}^n$ μηδενικό διάνυσμα

Ενδεχομένως βλέπουμε ότι

$$\begin{pmatrix} \sqrt{d} & \mathbb{0}^T \\ \frac{u}{\sqrt{d}} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0}^T \\ \mathbb{0} & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & \mathbb{0}^T \\ \frac{u}{\sqrt{d}} & H \end{pmatrix}$$

Και επίσης

$$\begin{pmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ \frac{u}{\sqrt{d}} & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d} & u^T/\sqrt{d} \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & u^T \\ u & \frac{uu^T}{d} + H \end{pmatrix}$$

Ο $\tilde{H}$ είναι προφανώς συμμετρικός και θετικά ορισμένος

Επίσης και ο $\frac{uu^T}{d} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ είναι επίσης συμμετρικός $(uu^T)^T = (u^T)^T u^T = uu^T$

και θετικά ορισμένος $x^T u u^T x = (u^T x)^T (u^T x) > 0$, για $x \neq 0$.

Συνεπώς ο H είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας ως άθροισμα συμμετρικών & θ. ορισμένων πινάκων.

Εύκολα βλέπουμε ότι ο H είναι συμμετρικός και για $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x \neq 0$.

Θεωρούμε $y \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{d} x^T u \\ x \end{pmatrix}$

Γνωρίζουμε ότι $y^T A y > 0$.

Επίσης $y^T A y = y^T \begin{pmatrix} d & u^T \\ u & \tilde{H} \end{pmatrix} y$

$$= \left(-\frac{1}{d} x^T u,\ x^T\right) \begin{pmatrix} d & u^T \\ u & \hat{H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/d\, x^T u \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{d} x^T u,\ x^T\right) \begin{pmatrix} -x^T u + u^T x \\ -\frac{1}{d} u(x^T u) + \hat{H} x \end{pmatrix} = \frac{1}{d}(x^T u)(x^T u - u^T x) - \frac{1}{d} x^T\left(u(x^T u) - \hat{H} x\right)$$

$$= -\frac{1}{d} x^T u u^T x + x^T \hat{H} x = x^T H x.$$ Άρα $x^T H x > 0$.

Από την επαγωγική υπόθεση τώρα, επειδή ο H ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας L_H με θετικά διαγώνια στοιχεία τ.ω.

$$H = L_H L_H^T.$$

Συνεπώς, επειδή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0^T \\ 0 & L_H^T \end{pmatrix}$$

έχουμε ότι ο A γράφεται τώρα

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{d} & \mathbb{0}^T \\ \frac{u}{\sqrt{d}} & I_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0}^T \\ \mathbb{0} & L_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{0}^T \\ \mathbb{0} & L_H^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{d} & u^T/\sqrt{d} \\ \mathbb{0} & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{d} & 0 \\ \frac{u}{\sqrt{d}} & L_H \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{d} & u^T/\sqrt{d} \\ 0 & L_H^T \end{pmatrix}}_{L^T} = L L^T$$

Δηλαδή υπάρχει L κάτω τριγωνικός με θετικά διαγώνια στοιχεία τ.ω.

$$A = L L^T$$

Για να δείξουμε τη μοναδικότητα της αναλυσης, υποθέτουμε οτι υπάρχει M κάτω τριγωνικός με θετικά διαγώνια στοιχεία τ.ω.

$$A = LL^T = MM^T$$

ώστε $L^T = L^{-1}MM^T$ και $L^T(M^T)^{-1} = L^{-1}M$

Ο L^{-1} θα είναι κάτω τριγωνικός και άρα ο $L^{-1}M$ θα είναι κάτω τριγωνικός

Επίσης ο $L^T(M^T)^{-1}$ θα είναι άνω τριγωνικός. Συνεπώς επειδή οι δυο

πίνακες είναι ίσοι, θα είναι διαγώνιοι πίνακες. Οπότε υπάρχει διαγώνιος πίνακας D τ.ω. $L^{-1}M = D \Rightarrow M = LD$

Τα διαγώνια στοιχεία θα είναι ίσα, άρα $M_{ii} = L_{ii}D_{ii}$ και ανάλογα

$$L^T(M^T)^{-1} = D \Rightarrow L^T = DM^T \Rightarrow L_{ii} = D_{ii}M_{ii}$$

Συνεπώς, λύνοντας ως προς D_{ii}, $D_{ii} = \frac{M_{ii}}{L_{ii}} = \frac{L_{ii}}{M_{ii}}$, οπότε $M_{ii}^2 = L_{ii}^2$

Επειδή οι M & L έχουν θετικά διαγώνια στοιχεία. $L_{ii} = M_{ii}$

Έτσι $D = I$ και άρα $L = M$.

Αλγόριθμος κατασκευής του πίνακα L

$$
\begin{pmatrix}
l_{11} & 0 & & & \\
l_{21} & l_{22} & & 0 & \\
l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\
 & l_{22} & & \vdots \\
 & 0 & \ddots & \\
 & & & l_{nn}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
$$

Εξισώνουμε τα στοιχεία της 1ης γραμμής του A

$$l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (\text{θέλουμε τη θετική})$$

Συνέχεια για τη 2η γραμμή

$$l_{21} l_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = a_{21} / l_{11}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

Γενικα θα εχουμε για $j \le i$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} + l_{ij} l_{jj}$$

Συνεπως για $j<i$: $l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$

και για $j=i$ $\quad l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}$

Δηλαδη έχουμε τον ακολουθο αλγοριθμο

Για $i = 1, \ldots, n$

Για $j = 1, \ldots, i-1$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$$

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2}$$

Υπολογισμός πράξεων

Για να υπολογίσουμε το l_{ij} στοιχείο κάνουμε

$(j-1)$ πολ/μους + 1 διαίρεση.

και για το l_{ii},

$(i-1)$ πολ/μους.

Οπότε για την i-γραμμή

$$\sum_{j=1}^{i-1} j + (i-1) \quad \text{πολ/μους \& διαιρέσεις}$$

Γενικά: $\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} j\right)+i-1\right)=\dots=\frac{n^3+3n^2-4n}{6}$ πολ/μους & διαιρέσεις

Επιπλέον πρέπει να κάνουμε και $\underline{\underline{n}}$ τετραγωνικές ρίζες

<u>Παρατήρηση</u>: Για να είναι καλά ορισμένος ο αλγόριθμος θα πρέπει τα διαγώνια στοιχεία του L, επειδή προκύπτουν με την εξαγωγή μιας τετραγωνικής ρίζας, να είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή

$$a_{ii} > \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2$$

Το γεγονός αυτό, όμως ισχύει ως αποτέλεσμα του Θεωρήματος που δείξαμε, δηλαδή, αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Αν γνωρίζουμε ότι ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας και κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου στον Η/Υ, προκύψει ότι

για κάποιο i, $a_{ii} \leq \sum_{k=1}^{i-1} (l_{ik})^2$, αυτό θα οφείλεται σε

σφάλματα λόγω της πεπερασμένης αριθμητικής που έχει ο Η/Υ.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν για κάποιο συμμετρικό πίνακα A, ολοκληρωθεί ο αλγόριθμος

Cholesky και βρίσκουμε ένα κάτω τριγωνικό πίνακα L με θετικά διαγώνια στοιχεία τ.ω. $A = LL^T$ τότε ο A είναι θετικά ορισμένος

$$x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T (\underbrace{L^T x}_{y}) = y^T y > 0 \text{ , για } x \neq 0.$$

Για τη λυση ενός γραμμικού συστηματος $Ax=b$, στον Η/Υ, οπου A ειναι συμμετρικος και θετικά ορισμενος, αφού πρωτα υπολογισουμε τον πινακα L, συμφωνα με τον αλγοριθμο που δειξαμε λυνουμε τα γραμμικα συστηματα $Ly=b$ & $L^T x = y$

<u>Παράδειγμα</u>: Βρείτε την ανάλυση Cholesky LL^T του πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$$

1η γραμμή L $\quad l_{11}^2 = a_{11} \Rightarrow l_{11} = \sqrt{4} = 2$

2η γραμμή L $\quad l_{21} l_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -1/2$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{4.25 - 1/4} = 2$$

3η γραμμή $\quad \ell_{31}\ell_{11} = a_{31} \Rightarrow \ell_{31} = a_{31}/\ell_{11} = 1/2$

$$\ell_{31}\ell_{21} + \ell_{32}\ell_{22} = a_{32} \Rightarrow \ell_{32} = (a_{32} - \ell_{31}\ell_{21})/\ell_{22} = \left(2.75 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)/2 = \frac{3}{2}$$

$$\ell_{31}^2 + \ell_{32}^2 + \ell_{33}^2 = a_{33} \Rightarrow \ell_{33} = \sqrt{a_{33} - \ell_{31}^2 - \ell_{32}^2} = \sqrt{3.5 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4}} = 1$$

Άρα $\quad L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$