Νόρμες Πινάκων

Θα συμβολίζουμε και τις νόρμες πινάκων $\|\cdot\|$ και θα είναι καθαρό αν αναφερόμαστε σε νόρμα πίνακα ή διανύσματος από το όρισμα που θα χρησιμοποιούμε.

Μια νόρμα πινάκων $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ πληροί τις 3 ιδιότητες που θεωρήσαμε για τις νόρμες διανυσμάτων και επιπλέον και μια τέταρτη ιδιότητα

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Έτσι (i) $\|A\| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0$ (0 μηδενικός πίνακας)

(ii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$

(iii) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στο $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να θεωρήσουμε μια νόρμα πινάκων, η οποία όπως θα δούμε παράγεται από την νόρμα για διανύσματα.

Όλες οι νόρμες πινάκων οι οποίες παράγονται από νόρμα διανύσματος, λέγονται φυσικές νόρμες πινάκων

Ορισμός: Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad \|A\| = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

λέγεται φυσική νόρμα ή νόρμα πινάκων η οποία παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^n$

Να δείξουμε καταρχήν ότι το sup στον ορισμό είναι πραγματικός αριθμός.

Έστω ότι $\|\cdot\|$ μια νόρμα του $\mathbb{R}^n$. Είδαμε ότι αυτή θα είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_\infty$ στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχουν $m, M > 0$ τ.ω

$$m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Τότε, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \frac{M\|Ax\|_\infty}{m\|x\|_\infty} = \frac{M}{m} \frac{\max\limits_{1\leq i\leq n} \left|\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|}{\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|} \leq \frac{M}{m} \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$= C < +\infty$$

Δηλαδή ο λόγος $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ είναι φραγμένος από την ίδια σταθερά για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$

__Παρατήρηση__: Η απεικόνιση που ονομάσαμε φυσική νόρμα πινάκων ορίζει μια νόρμα πινάκων.

i) $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\quad \|A\| = 0 \iff \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = 0$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0, \quad \|Ax\| = 0$$

$$\iff \forall x \in \mathbb{R}^n, \; x \neq 0 \quad Ax = 0 \quad \text{(μηδενικό διάνυσμα)}$$

$$\iff A = 0 \quad \text{(μηδενικός πίνακας)}$$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|\lambda A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|\lambda A x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{|\lambda| \, \|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\lambda| \, \|A\|$$

(iii) $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|A+B\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\| + \|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} + \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| + \|B\|$$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό της φυσικής νόρμας πινάκων έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

άρα $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Για να δείξουμε ότι η φυσική νόρμα πινάκων ορίζει μια νόρμα πινάκων, μένει να δείξουμε την 4η ιδιότητα του ορισμού της νόρμας πινάκων.

(iv) $\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

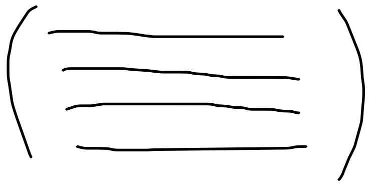
$$\|AB\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|A\| \cdot \|Bx\|}{\|x\|} = \|A\| \cdot \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

Παραδείγματα :

1) Στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη νόρμα μεγίστου $\|\cdot\|_\infty$. Η παραγόμενη από την $\|\cdot\|_\infty$, φυσική νόρμα πινάκων είναι η

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$



$$\|Ax\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, |x_j|$$

$$\le \max_{1 \le i \le n} \left(\|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \|x\|_\infty \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Συνεπώς έχουμε δείξει ότι

$$\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \|A\|_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right) \leq \|A\|_\infty$

Έστω k τέτοιο ώστε $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{kj}| = \max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$

και θεωρούμε $y\in\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$y_j = \begin{cases} \dfrac{a_{kj}}{|a_{kj}|}, & a_{kj}\neq 0 \\ 0, & a_{kj}=0 \end{cases}$$

Προφανώς $\|y\|_\infty = 1$, και

$$\|Ay\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \right| \geq \left| \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j \right|$$

$$\frac{a_{kj}^2}{|a_{kj}|} = |a_{kj}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \max_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Άρα $\|A\|_\infty \geq \dfrac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} \geq \max\limits_{1 \le i \le n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$

2) Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^n$ τη νόρμα $\|\cdot\|_1$. Η παραγόμενη από την $\|\cdot\|_1$ φυσική νόρμα πινάκων, θα είναι

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right) \max_{1\le j\le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

$$= \max_{1\le j\le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) \|x\|_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_j|$$

Έστω k τ.ω. $\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$e^k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$, $\|e^k\|_1 = 1$.

k-θέση

$$\|Ae^k\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

$$\|A\|_1 \geq \frac{\|Ae^k\|_1}{\|e^k\|_1} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|$$

Ορισμός: Η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ είναι το μέγιστο των απολύτων τιμών των ιδιοτιμών του A.

3) Θεωρούμε στον $\mathbb{R}^n$ την ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$

$$\|A\|_2 = \rho(A^T A)^{1/2}$$

Παρατήρηση: Για κάθε φυσική νόρμα πίνακα, $\|\cdot\|$, ο μοναδιαίος πίνακας I, έχει νόρμα, $\|I\| = 1$,

διότι $$\|I\| = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Παρατήρηση: Για κάθε φυσική νόρμα πινάκων, $\|\cdot\|$ ισχύει

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Έστω λ ιδιοτιμή του A και y το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

$$Ay = \lambda y;$$

$$\frac{\|Ay\|}{\|y\|} = \frac{|\lambda|\,\|y\|}{\|y\|} = |\lambda|, \text{ όμως } \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \leq \|A\|.$$

<u>Άσκηση</u>: Προσδιορίστε τις νόρμες $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ του πίνακα.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = \max(1+2,\ 3+4) = 7$$

$$\|A\|_1 = \max(1+3,\ 2+4) = 6$$

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^TA), \quad A^TA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -14 \\ -14 & 20 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές του A^TA είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$\det(A^TA - \lambda I) = \lambda^2 - 30\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 15 + \sqrt{221},\ \lambda_2 = 15 - \sqrt{221}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{15 + \sqrt{221}}$$