

Δείκτης καταστάσεως πίνακα

Είχαμε θεωρήσει σε προηγούμενο μάθημα το παρακάτω γραφικό σύστημα.

$$A = \begin{pmatrix} .913 & .659 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} .254 \\ .217 \end{pmatrix}$$

Η ακριβής λύση του $Ax=b$ είναι $x = (1, -1)^T$
και είδαμε ότι σε έναν Η/Υ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων δηλώνεται
σφάλμα στρογγύλευσης και παίρνουμε τη λύση $\tilde{x} = (-.443, -1)^T$

Επίσης είδαμε ότι αν αντί για b , πάρουμε το $\begin{pmatrix} .253 \\ .218 \end{pmatrix}$ παίρνουμε την

ακριβή λύση $\begin{pmatrix} 1.222 \\ -1.693 \end{pmatrix}$, δηλαδή μικρή διαφορά στο δεξί μέλος οδηγεί σε μεγάλη
διαφορά στην ακριβή λύση.

As θεωρούμε τώρα το εξής: Έστω ότι $Ax = b$ και αντί για b προσπαθούμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα με δεξιό μέλος που έχει μεταβληθεί κατά Δb , δηλαδή έχουμε τα 2 γραμμικά συστήματα.

$$Ax = b \quad \& \quad Ay = b + \Delta b$$

όπου x η λύση του πρώτου & y η λύση του δεύτερου.

Συνεπώς αν $\Delta x = y - x$ τότε:

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x + \Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Rightarrow A(\Delta x) = \Delta b$$

Άρα η μεταβολή στη λύση Δx , θα είναι $\Delta x = A^{-1}(\Delta b)$

As θεωρούμε μια νόρμα στον \mathbb{R}^n , $\|\cdot\|$, και την παραγόμενη φυσική νόρμα πινάκων, $\|\cdot\|$, οπότε

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}(\Delta b)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

Επίσης $\|b\| = \|A x\| \leq \|A\| \|x\| \Rightarrow \frac{\|b\|}{\|A\|} \leq \|x\|$

Άρα $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\substack{\uparrow \\ \text{συντελεστή μεταβολής}}} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$

Η ποσότητα $\|A\| \|A^{-1}\|$ είναι ένας αριθμός που υπολογίζεται με
μέγιστη δυνατή σχετική μεταβολή της λ της $\frac{\|D \times\|}{\|x\|}$

Ορισμός: Αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας τότε ο αριθμός
 $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ καλείται δείκτης κατάστασης του A ως προς τη
νόρμα $\|\cdot\|$

Παρατήρηση: Ο $\kappa(A)$ είναι πάντα μεγαλύτερος ή ίσος από 1

Αυτό συμβαίνει διότι για μια φυσική νόρμα πίνακων, $\|\cdot\|$

$$1 = \|\mathbb{I}\| = \|A A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

Θα γείμε ότι ο πίνακας A έχει κακή κατάσταση αν

$$\kappa(A) \gg 1 \quad (\text{πολύ μεγαλύτερο του } 1)$$

Στο παράδειγμα που είχαμε θεωρήσει με $A = \begin{pmatrix} .913 & .654 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}$,

ο δείκτης κατάστασης ως προς $\|\cdot\|_1$ είναι $\kappa(A) \approx \underline{\underline{2.6 \times 10^6}}$

Αυτό σημαίνει ότι η μεταβολή στο δεξιό μέλος $\Delta b = \begin{pmatrix} -.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$ επιφέρει

μεταβολή $\|\Delta x\|_1 \approx 10^3$

Όταν ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα είναι μηδέν,
επειδή των Η/Υ δημιουργούνται θρόμβοι συσσώρευσης,
η λύση που προτείνεται ενδέχεται να απέχει αρκετά
από την ακριβή λύση.