Δείκτης κατάστασης πίνακα

Είχαμε θεωρήσει σε προηγούμενο μάθημα το παρακάτω γραμμικό σύστημα.

$$A = \begin{pmatrix} .913 & .659 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} .254 \\ .217 \end{pmatrix}$$

Η ακριβής λύση του $Ax=b$ είναι $x=(1,-1)^T$ και είδαμε ότι σε έναν Η/Υ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων δημιουργείται σφάλμα στρογγύλευσης και παίρνουμε τη λύση $\tilde{x}=(-.443, -1)^T$

Επίσης είδαμε ότι αν αντί για b, πάρουμε το $\begin{pmatrix} .253 \\ .218 \end{pmatrix}$ παίρνουμε την ακριβή λύση $\begin{pmatrix} 1222 \\ -1693 \end{pmatrix}$, δηλαδή μικρή διαφορά στο δεξιό μέλος οδηγεί σε μεγάλη διαφορά στην ακριβή λύση.

Ας θεωρήσουμε τώρα το εξής: Έστω ότι $Ax=b$ και αντί για b προσπαθήσουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα με δεξιό μέλος που έχει μεταβληθεί κατά Δb, δηλαδή έχουμε τα 2 γραμμικά συστήματα.

$$Ax = b \quad \& \quad Ay = b + \Delta b$$

όπου x η λύση του πρώτου & y η λύση του δεύτερου.
Συνεπώς αν $\Delta x = y - x$ τότε·

$$\begin{cases} Ax = b \\ A(x+\Delta x) = b + \Delta b \end{cases} \Rightarrow \qquad A(\Delta x) = \Delta b$$

Άρα η μεταβολή στη λύση Δx, θα είναι $\Delta x = A^{-1}(\Delta b)$

Ας θεωρήσουμε μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$, και την παραγόμενη φυσική νόρμα πινάκων, $\|\cdot\|$, οπότε

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}(\Delta b)\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|$$

Επίσης $\|b\| = \|A x\| \le \|A\| \, \|x\| \Rightarrow \dfrac{\|b\|}{\|A\|} \le \|x\|$

Άρα

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\|}{\frac{\|b\|}{\|A\|}} = \underbrace{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}_{\text{συντελεστής μεταβολής}} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Η ποσότητα $\|A\| \, \|A^{-1}\|$ είναι ένας συντελεστής που υπολογίζει τη μέγιστη δυνατή σχετική μεταβολή της λύσης $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$

<u>Ορισμός</u>: Αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας τότε ο αριθμός $\kappa(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$ λέγεται δείκτης κατάστασης του A ως προς τη νόρμα $\|.\|$

<u>Παρατήρηση</u>: Ο $\kappa(A)$ είναι <u>πάντα</u> μεγαλύτερος ή ίσος από 1

Αυτό συμβαίνει διότι για μια φυσική νόρμα πινάκων, $\|.\|$

$$1 = \|I\| = \|A A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A)$$

Θα λέμε ότι ο πίνακας A έχει κακή κατάσταση αν

$$\kappa(A) \gg 1 \quad (\text{πολύ μεγαλύτερο του } 1)$$

Στο παράδειγμα που είχαμε θεωρήσει με $A = \begin{pmatrix} .913 & .654 \\ .780 & .563 \end{pmatrix}$,

ο δείκτης κατάστασης ως προς $\|.\|_1$ είναι $\kappa(A) \approx \underline{\underline{2.6 \times 10^6}}$

Αυτό εξηγεί γιατί η μεταβολή στο δεξιό μέλος $\Delta b = \begin{pmatrix} -.001 \\ 0.001 \end{pmatrix}$ επιφέρει

μεταβολή $\|\Delta x\|_1 \approx 10^3$

Όταν ο δείκτης κατάστασης ενός πίνακα είναι μεγάλος, επειδή στον Η/Υ δημιουργούνται σφάλματα στρογγύλευσης, η λύση που παίρνουμε ενδέχεται να απέχει αρκετά από την ακριβή λύση.

Θεώρημα: Έστω $\|.\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και η παραγόμενη από αυτήν φυσική νόρμα πινάκων στον $\mathbb{R}^{n\times n}$. Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αντιστρέψιμος, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $b, \Delta b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$. Τότε για $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ έχουμε

(i) Αν $Ax = b$ και $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$ τότε

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

(ii) Αν $Ax = b$, $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b$ και $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$ τότε ο $A + \Delta A$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

(iii) Αν $Ax = b$, $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b+\Delta b$ και $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| < 1$ τότε $A+\Delta A$ αντιστρέψιμος

και

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} \left\{ \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right\}$$

Απόδειξη: Την (i) την έχουμε ήδη αποδείξει

Για τη (ii) δείχνουμε κατ' αρχήν ότι αν $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τότε ισχύει η ακόλουθη πρόταση

Αν υπάρχει $c > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|Bx\| \geq c\|x\|$ τότε ο B είναι αντιστρέψιμος και $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Για να δείξουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος, παρατηρούμε ότι αν $Bx = 0$ τότε $0 = \|Bx\| \geq c \cdot \|x\|$, δηλαδή $\|x\| = 0$ και άρα $x = 0$, Τώρα, έστω $y \in \mathbb{R}^n$, τότε για το $B^{-1}y$ έχουμε

$$c \cdot \|B^{-1}y\| \leq \|B(B^{-1}y)\| = \|y\|$$

Συνεπώς $\dfrac{\|B^{-1}y\|}{\|y\|} \leq \dfrac{1}{c}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, $y \neq 0$

Άρα $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c}$.

Τώρα μπορούμε να επιστρέψουμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

Από τις υποθέσεις του θεωρήματος έχουμε για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\|y\| = \|A^{-1}(Ay)\| \leq \|A^{-1}\| \, \|Ay\| \quad \& \quad \|(\Delta A)y\| \leq \|\Delta A\| \, \|y\|$$

Οπότε $\|(A+\Delta A)y\| \geq \|Ay\| - \|(\Delta A)y\| \geq \dfrac{\|y\|}{\|A^{-1}\|} - \|\Delta A\| \cdot \|y\|$

$$= \frac{1}{\|A^{-1}\|}\left(\|y\| - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| \, \|y\|\right)$$

$$= \frac{1}{\|A^{-1}\|}\left(1 - \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|\right)\|y\|$$

Επειδή $\|A^{-1}\| \, \|\Delta A\| < 1$, θα έχουμε ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ τ.ω.

$\|(A+\Delta A)y\| \geq c\|y\|$, $\quad c = (1 - \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|)/\|A^{-1}\|$

Συνεπώς ο $A+\Delta A$ είναι αντιστρέψιμος και $\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{c} = \dfrac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|}$

Για να δείξουμε το (ii) έχουμε τώρα.

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) = b \end{array}\right\} \quad (A+\Delta A)\Delta x = -(\Delta A)x$$
$$\Rightarrow \Delta x = -(A+\Delta A)^{-1}((\Delta A)x)$$

Οπότε $\quad \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \, \|\Delta A\| \, \|x\|$

Άρα $\quad \dfrac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \, \|\Delta A\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|} \|\Delta A\|$

$$= \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \, \|\Delta A\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$$

Για να δείξουμε το (iii), έχουμε ότι

$$\left.\begin{aligned} Ax &= b \\ (A+\Delta A)(x+\Delta x) &= b+\Delta b \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A+\Delta A)\,\Delta x = \Delta b - (\Delta A)\,x$$

$$\Rightarrow \quad \|\Delta x\| \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \left(\|\Delta b\| + \|\Delta A\|\,\|x\| \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|(A+\Delta A)^{-1}\| \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|x\|} + \|\Delta A\| \right)$$

Επειδή $\|(A+\Delta A)^{-1}\| \leq \dfrac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|}$ και $\|x\| \geq \dfrac{\|Ax\|}{\|A\|} = \dfrac{\|b\|}{\|A\|}$

έχουμε $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\|\,\|\Delta A\|} \left(\frac{\|\Delta b\|}{(\|b\|/\|A\|)} + \frac{\|A\|\,\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$

Οπότε $$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\Delta A\|} \cdot \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right)$$