Παρεμβολή

Θα ασχοληθούμε με την εύρεση ενός πολυωνύμου το οποίο συμφωνεί ακριβώς με την πληροφορία που έχουμε για μια πραγματική συνάρτηση f (μιας μεταβλητής) σε ορισμένα σημεία

Αυτή η πληροφορία μπορεί να είναι :

- Οι τιμές της f σε ένα πεπερασμένο σύνολο σημείων
  (πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange)

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη, η πληροφορία μπορεί να αφορά επιπλέον και τιμές των παραγώγων (στο ίδιο σύνολο σημείων που γνωρίζω τιμές της f)
  (πολυώνυμο παρεμβολής Hermite)

Ενα συνηθες προβλημα ειναι να εχουμε ενα πινακα τιμων μιας συναρτησης σε ορισμενα σημεια $x_0, x_1, \dots, x_n$

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
$f(x) = y$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

<u>Ερωτημα</u>: Υπάρχει ένας απλος μαθηματικός τυπος (μια συναρτηση) που να δινει τις ιδιες τιμες $y_0, \dots, y_n$ για ολα τα δοσμενα σημεια $x_0, x_1, \dots, x_n$;

<u>Γιατί θελουμε αυτή τη νέα συναρτηση</u>;

- Αν θελουμε να γνωριζουμε την τιμή της f σε κάποιο σημειο διαφορετικό απο τα $x_0, x_1, \dots, x_n$, μπορουμε να βρουμε μια προσεγγιση της
- Μπορουμε επισης να προσεγγισουμε τιμες της παραγωγου ή το ολοκληρωμα της.

Αυτός ο μαθηματικός τύπος μπορεί να βασίζεται σε άλλες συναρτήσεις όπως είναι τα πολυώνυμα, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ή άλλες

Στη περίπτωση που χρησιμοποιούμε μόνο πολυώνυμα για να δημιουργήσουμε τη νέα συνάρτηση, η οποία θα ταυτίζεται με την f στα δοσμένα σημεία, αυτή θα καλείται πολυωνυμική παρεμβολή

Θα δούμε στη συνέχεια ότι η πολυωνυμική παρεμβολή δεν είναι πάντα η καλύτερη λύση και θα δούμε άλλους τρόπους.

Πολυωνυμική Παρεμβολή

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα πολυώνυμο το οποίο να λαμβάνει τις συγκεκριμένες τιμές y_i για κάθε ένα από τα συγκεκριμένα διακριτά $n+1$ σημεία x_i, $i=0,\dots,n$.

Το πολυώνυμο p για το οποίο $p(x_i)=y_i$, $i=0,1,2,\dots,n$ λέμε ότι παρεμβάλει τις τιμές του πίνακα.

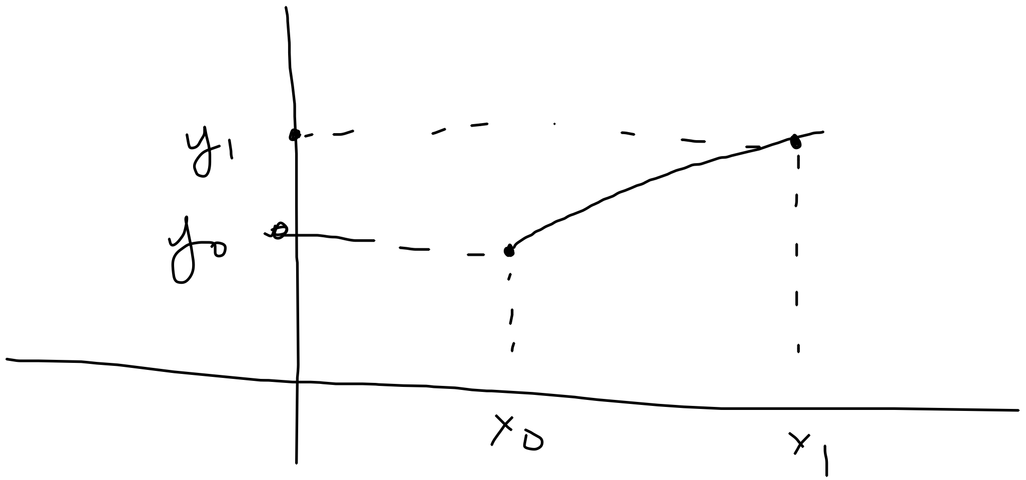
x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Τα σημεία x_i καλούνται <u>κόμβοι</u>

Στη περιπτωση που ο πινακας έχει δυο ζευγη τιμων

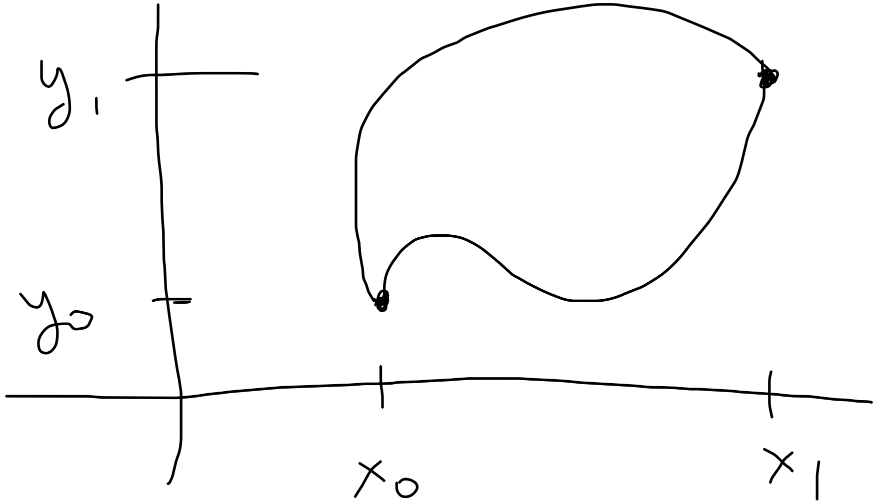
x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

υπαρχει μονο μια ευθεια που περνάει από 2 σημεια του επιπέδου
(Πολυωνυμο 1ου βαθμου)



Υπαρχουν πολλές καμπυλες που περνούν από δυο σημεία.

Πολυωνυμα βαθμου μεγαλυτερα 1 ειναι πολλά



Θεώρημα : (Παρεμβολή Lagrange) : Έστω $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ είναι διαφορετικά ανά δύο σημεία και $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p, βαθμού το πολύ n, γράφουμε $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = y_i \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

Απόδειξη: Αν θέσουμε $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές $a_0, a_1, \dots, a_n$.
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$p(x_i) = y_i, \qquad i = 0, \dots, n$$

προκύπτει ένα γραμμικό σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (n+1)\times(n+1) \text{ γραμμικό σύστημα.}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(ομογενές σύστημα)}$$

Για να εξετάσουμε αν το γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση αρκεί να θεωρήσουμε το αντίστοιχο ομογενές γραμμικό σύστημα, δηλαδή να θέσουμε στο δεξιό μέλος 0

Έτσι θα προκύψει ότι αναζητούμε τους συντελεστές ενός πολυωνύμου $q \in \mathbb{P}_n$ το οποίο στα σημεία x_i, $i=0,\dots,n$ έχει τιμή 0

$$q(x_i) = 0, \quad i=0,\dots,n$$

Προφανώς ένα πολυώνυμο βαθμού n με $n+1$ ρίζες θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Οπότε το αρχικό γραμμικό σύστημα λύνεται μοναδικά.

<u>Ορισμός</u>: Αν f μια πραγματική συνάρτηση και $p \in \mathbb{P}_n$ τ.ω.

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

όπου $x_0, \dots, x_n$ ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους, τότε λέμε ότι το πολυώνυμο p παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0, \dots, x_n$.

Το πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ (το οποίο υπάρχει και είναι μοναδικό) λέγεται πολυώνυμο παρεμβολής της f στα σημεία x_i, $i = 0, \dots, n$