Προβλήματα Αρχικών Τιμών

Έστω $a, b \in \mathbb{R}, a < b, f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, και $y_0 \in \mathbb{R}$. Ένα τυπικό *πρόβλημα αρχικών τιμών* είναι:
Αναζητείται $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t)\big), \quad a \le t \le b, \\ y(a) &= y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

- f συνεχής $(t, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$. ($f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$.)
- Η συνάρτηση y ορισμένη στο $[a, b]$, $y \in C^1[a, b]$, η οποία ικανοποιεί την (**??**) και την αρχική συνθήκη α$y(a) = y_0$, λέγεται *λύση* του ΠΑΤ (**??**).
- αν η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b] \times \mathbb{R}$, τότε η λύση y είναι $m + 1$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$.

Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \dots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε
y^i την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^i \approx y(t^i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Υψηλής τάξης πολυβηματικές μέθοδοι

Σε αυτήν την παράγραφο θα εισαγάγουμε μια δεύτερη κατηγορία μεθόδων για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, τις λεγόμενες πολυβηματικές μεθόδους. Ακριβέστερα, θα ασχοληθούμε με τις *γραμμικές* πολυβηματικές μεθόδους.
Θεωρούμε πάλι το εξής πρόβλημα αρχικών τιμών: Ζητείται συνάρτηση $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &y' = f(t, y), \quad a \leqslant t \leqslant b, \\ &y(a) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

με δεδομένο $y_0 \in \mathbb{R}^m$ και $f : [a, b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Έστω $N \in \mathbb{N}$, $h := \frac{b-a}{N}$ και $t^n := a + nh, n = 0, \ldots, N$. Χάριν συντομίας, θα γράφουμε στη συνέχεια f^k αντί $f(t^k, y^k)$. Βασικές αρχές:

- προσεγγίσεις ενδιάμεσων σημείων του $[t^n, t^{n+1}]$
- κανόνες ολοκλήρωσης υψηλής τάξης
- *συνδυασμός ενδιάμεσων προσεγγίσεων με τους κανόνες ολοκλήρωσης υψηλής τάξης* για την κατασκευή της προσέγγισης y^{n+1} υψηλής τάξης ακρίβειας.

Πολυβηματικές μέθοδοι: κατασκευή / παραδείγματα

Ένα παράδειγμα πολυβηματικής (διβηματικής) μεθόδου είναι το σχήμα

$$\begin{aligned} &y^0, y^1 \quad \text{δεδομένα}, \\ &y^{n+2} - y^n = 2hf^{n+1}, \quad n = 0, \dots, N-2, \end{aligned} \tag{3}$$

Μπορούμε να κατασκευάσουμε την μέθοδο (**??**) προσεγγίζοντας την $y'(t^{n+1})$ με το πηλίκο διαφορών $\frac{y(t^{n+2})-y(t^n)}{2h}$.

Πολυβηματικές μέθοδοι: κατασκευή / παραδείγματα

Ένα άλλο παράδειγμα πολυβηματικής (διβηματικής) μεθόδου είναι το σχήμα του Simpson

$$\begin{aligned} &y^0, y^1 \quad \text{δεδομένα},\\ &y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\big(f^{n+2} + 4f^{n+1} + f^n\big), \quad n = 0, \dots, N-2, \end{aligned} \tag{4}$$

Η μέθοδος του Simpson είναι *πεπλεγμένη*, αφού για τον προσδιορισμό του y^{n+2} απαιτείται σε κάθε βήμα η επίλυση μιας μη γραμμικης εξίσωσης. Αντίθετα, η μέθοδος (**??**) είναι *άμεση*.

Πολυβηματικές μέθοδοι: κατασκευή / παραδείγματα

Ένα άλλο παράδειγμα πολυβηματικής (διβηματικής) μεθόδου είναι το σχήμα

$$\begin{aligned} &y^0, y^1 \quad \text{δεδομένα}, \\ &y^{n+2} - y^{n+1} = \frac{h}{2}\big(3f^{n+1} - f^n\big), \quad n = 0, \dots, N-2, \end{aligned} \tag{5}$$

Η παραπάνω μέθοδος ανήκει σε μια οικογένεια μεθόδων που καλείται Adams - Bashforth και επειδή είναι 2-βηματική καλείται Adams - Bashforth (2) (AB2) και είναι *άμεση*.