Η Άμεση μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor

Από τον τύπο του Taylor (αναπτύσσοντας την y ως προς το σημείο t^n, έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2).$$

Χρησιμοποιώντας την ΔΕ έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + O(h^2),$$

Αρα, αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης,

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n).$$

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler

Έστω ότι τα $y^n, z^n, 0 \leq n \leq N$, δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= y^n + hf(t^n, y^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ y^0 &= y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

και

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + hf(t^n, z^n), \quad 0 \leq n \leq N-1, \\ z^0 &= z_0, \end{aligned} \tag{2}$$

με αρχικές τιμές $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$.

- Θέλουμε να εκτιμήσουμε το $|y^n - z^n|$ ως προς $|y_0 - z_0|$.

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler II

Θα δείξουμε ότι αν η f ικανοποιεί την Ολική Συνθήκη Lipschitz τότε

$$\max_{1\leq n\leq N} |y^n - z^n| \leq C|y_0 - z_0|, \tag{3}$$

με $C = e^{L(t^n - a)}$.

Ευστάθεια – Βασική ευστάθεια: Euler : Απόδειξη

Απόδειξη.
Αφαιρώντας κατά μέλη τις (2) και (1), λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h\big[f(t^n, y^n) - f(t^n, z^n)\big].$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την Ολική Συνθήκη- Lipschitz, έχουμε

$$|y^{n+1} - z^{n+1}| \leq |y^n - z^n| + hL|y^n - z^n|, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

Συνεπώς, επαγωγικά,

$$|y^n - z^n| \leq (1 + hL)^n |y^0 - z^0| \leq e^{hLn}|y^0 - z^0|, \quad n = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Δηλαδή,

$$|y^n - z^n| \leq e^{L(t^n - a)}|y_0 - z_0|, \quad n = 0, \dots, N, \tag{5}$$

και

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leq e^{L(b-a)}|y_0 - z_0|, \tag{6}$$

Σύγκλιση – Euler– Θεώρημα

Θεώρημα

Έστω $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ *μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την Ολική Συνθήκη- Lipschitz. Υποθέτουμε ότι η λύση του ΠΑΤ y, ικανοποιεί την συνθήκη ομαλότητας* $y \in C^2[a,b]$*. Αν* $y^0, \ldots, y^N$ *είναι οι προσεγγίσεις της μεθόδου του Euler με* $h = (b-a)/N$*, τότε ισχύει*

$$\max_{0 \le n \le N} \left| y(t^n) - y^n \right| \le \frac{M}{2L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) h \tag{7}$$

με

$$M := \|y''\|_\infty = \max_{a \le t \le b} \left| y''(t) \right|$$

και όπου L συμβολίζει την σταθερά Lipschitz.