Χρόνος / Διακριτά χρονικά βήματα

Σκεφτόμαστε την μεταβλητή t ως χρόνο.
Οι αριθμητικοί αλγόριθμοι υπολογίζουν προσεγγίσεις σε *διακριτές χρονικές στιγμές:*

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Θεωρούμε τους διακριτούς χρόνους t^n.
- Αναζητούμε προσεγγίσεις του y στους διακριτούς χρόνους t^n:
$$y(t^i), \quad i = 0, \ldots, N.$$
- Συμβολισμός: Θα λέμε

  y^j την προσέγγιση του y η οποία προκύπτει από τον αριθμητικό μας αλγόρ
- Ή
$$y^j \approx y(t^j), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor

Από τον τύπο του Taylor (αναπτύσσοντας την y ως προς το σημείο t^n, έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + O(h^2).$$

Χρησιμοποιώντας την ΔΕ έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + O(h^2),$$

Αρα, αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης,

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n),$$

δηλαδή την Άμεση μέθοδο του Euler.

Η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor

Από τον τύπο του Taylor (αναπτύσσοντας την y ως προς το σημείο t^{n+1}, έχουμε

$$y(t^n) = y(t^{n+1}) - hy'(t^{n+1}) + O(h^2).$$

Χρησιμοποιώντας την ΔΕ έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big) + O(h^2),$$

Αρα, αγνοώντας όρους δεύτερης τάξης,

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^{n+1}, y^{n+1}),$$

δηλαδή την Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

Μέθοδος Taylor ανώτερης τάξης: Κατασκευή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor

Από τον τύπο του Taylor (αναπτύσσοντας την y ως προς το σημείο t^n, έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(t^n) + O(h^3).$$

Χρησιμοποιώντας την ΔΕ έχουμε

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + \frac{h^2}{2}g(t^n, y(t^n)) + O(h^3),$$

όπου $g(t, y(t)) = \dfrac{d}{dt}f(t, y(t))$. Αρα, αγνοώντας όρους τρίτης τάξης,

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + \frac{h^2}{2}g\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n) + \frac{h^2}{2}g(t^n, y^n).$$

Η μέθοδος αυτή θα καλείτε Μέθοδος Taylor (2)

Παράδειγμα Μεθόδου Taylor (2)

Έστω

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= (1-2t)y(t), \quad t \in [0,1], \\
y(0) &= 1.
\end{aligned}
$$

Τότε

$$g(t, y(t)) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = -2y(t) + (1-2t)y'(t) = [(1-2t)^2 - 2]y(t)$$

Οπότε η Μέθοδος Taylor (2) για το παραπάνω ΠΑΤ γίνεται

$$y^{n+1} - y^n = h(1-2t_n)y_n + \frac{h^2}{2}[(1-2t_n)^2 - 2]y_n.$$

Μέθοδος Taylor ανώτερης τάξης: Κατασκευή χρησιμοποιώντας τον τύπο του Taylor (συνέχεια)

Από τον τύπο του Taylor (μπορούμε να θεωρήσουμε ανάπτυγμα της y ως προς το σημείο t^n, χρησιμοποιώντας όρους ανώτερων παραγώγων, π.χ. μέχρι 3,

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + hy'(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(t^n) + \frac{h^3}{6}y'''(t^n) + O(h^4).$$

Όμοια όπως και πριν χρησιμοποιώντας τη ΔΕ και αγνοώντας όρους 4-ης τάξης, έχουμε

$$y(t^{n+1}) \approx y(t^n) + hf\big(t^n, y(t^n)\big) + \frac{h^2}{2}g_1\big(t^n, y(t^n) + \frac{h^3}{6}g_2\big(t^n, y(t^n)\big),$$

όπου $g_1(t, y(t)) = \frac{d}{dt}f(t, y(t))$ και $g_2(t, y(t)) = \frac{d}{dt}g_1(t, y(t))$. Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n) + \frac{h^2}{2}g_1(t^n, y^n) + \frac{h^3}{6}g_2(t^n, y^n).$$

Η μέθοδος αυτή θα καλείτε Μέθοδος Taylor (3). Γενικά συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε μεθόδους Taylor ανώτερης τάξης $m \geq 2$.

Η Άμεση μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων

Ολοκληρώνοντας την ΔΕ από το t^n έως το t^{n+1}, παίρνουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

δηλ.,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt. \tag{1}$$

Τώρα προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος:

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx hf\big(t^n, y(t^n)\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^n, y^n),$$

δηλαδή την Άμεση μέθοδο Euler.

Η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler: Κατασκευή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων

Ολοκληρώνοντας την ΔΕ από το t^n έως το t^{n+1}, παίρνουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

δηλ.,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt. \tag{2}$$

Τώρα προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος:

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx hf\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = hf(t^{n+1}, y^{n+1}),$$

δηλαδή την Πεπλεγμένη μέθοδο Euler

Η μέθοδος του τραπεζίου: Κατασκευή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων

Ολοκληρώνοντας την ΔΕ από το t^n έως το t^{n+1}, παίρνουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

δηλ.,

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f\big(t, y(t)\big)\,dt. \qquad (3)$$

Τώρα προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος:

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) \approx \frac{h}{2}\Big(f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + f(t^n, y(t^n))\Big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+1} - y^n = \frac{h}{2}\Big(f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\Big).$$

Η μέθοδος αυτή θα καλείται μέθοδος του τραπεζίου.

Η μέθοδος του μέσου: Κατασκευή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων

Ολοκληρώνοντας την ΔΕ από το t^n έως το t^{n+2}, παίρνουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

δηλ.,

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f\big(t, y(t)\big)\,dt. \tag{4}$$

Τώρα προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος:

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx 2h\Big(f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big)\Big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+2} - y^n = 2hf(t^{n+1}, y^{n+1}).$$

Η μέθοδος αυτή θα καλείται μέθοδος του μέσου.

Εφαρμογή μεθόδου του μέσου

- Έστω
$$a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$$
μια διάμεριση του $[a, b]$.
- Μέθοδος του μέσου
$$y^{n+2} - y^n = 2hf(t^{n+1}, y^{n+1}), \quad n = 0, \ldots, N-2.$$
μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν γνωρίζουμε 2 αρχικές προσεγγίσεις y^0, y^1.
- Η y^0 δίνεται από το πρόβλημα. Για την y^1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την τιμή που δίνει π.χ. η άμεση μέθοδος του Euler,
$$y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0)$$

Η μέθοδος του Simpson: Κατασκευή χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις ολοκληρωμάτων

Ολοκληρώνοντας την ΔΕ από το t^n έως το t^{n+2}, παίρνουμε

$$\int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(t)\,dt = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f\big(t, y(t)\big)\,dt,$$

δηλ.,

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} f\big(t, y(t)\big)\,dt. \qquad (5)$$

Τώρα προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος:

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) \approx \frac{h}{3}\Big(f\big(t^{n+2}, y(t^{n+2})\big) + 4f\big(t^{n+1}, y(t^{n+1})\big) + f\big(t^n, y(t^n)\big)\Big).$$

Όπως πριν, αντικαθιστώντας τα $y(t^m)$ από τα y^m και $\approx$ από $=$, λαμβάνουμε

$$y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\Big(f(t^{n+1}, y^{n+1}) + 4f(t^{n+1}, y^{n+1}) + f(t^n, y^n)\Big),$$

Η μέθοδος αυτή θα καλείται μέθοδος του Simpson. Όπως και στη μέθοδο του μέσου, για να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη μέθοδο χρειαζόμαστε 2 αρχικές προσεγγίσεις, y^0, y^1.