Euler - 2ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

θεωρήσαμε τη μέθοδο του Euler. Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh, n = 0, \dots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$, υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n), n = 0, \dots, N$, όπου

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, \dots, N-1.$$

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = e^{-\lambda t} + \sin(2t)$, στο $[0, 5]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = -\lambda y(t) + 2\cos(2t) + \lambda \sin(2t), \quad t \in [0, 5], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε ότι $\lambda = 50$. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Euler, δημιουργείστε τη γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα [0,5]. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$

Πειραματική εκτίμηση της τάξης σύγκλισης. Γνωρίζουμε ότι για τη μέθοδο Euler το σφάλμα της μεθόδου ικανοποιεί

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le Ch^p$$

με $p = 1$.

Υπολογίζοντας το σφάλμα

$$err_N = \max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$$

για δύο διαφορετικές διαμερίσεις με $N_1 < N_2$, η πειραματική τάξη σύγκλισης ορίζεται ως

$$p = \frac{\ln\left(\frac{err_{N_2}}{err_{N_1}}\right)}{\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}$$

Άσκηση 2: Θεωρείστε τις διαμερίσεις του $[0, 5]$, με $N = 10, 20, 30, \dots, 100$. Υπολογίστε τα σφάλματα err_N και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Euler. Είναι $p \approx 1$;

Άσκηση 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση αλλά τώρα θεωρείστε τις διαμερίσεις του $[0, 5]$, με $N = 200, 220, 230, \dots, 300$ Υπολογίστε τα σφάλματα err_N και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Euler. Είναι $p \approx 1$;

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Θεωρούμε τώρα το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t), \; t \in [0, 2\pi], x(0) = 1, \; y(0) = 0$$

Η ακριβή λύση είναι απλό να δούμε ότι είναι $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.

Άσκηση 4: Θεωρείστε μια διαμέριση του $[0, 2\pi]$, με $N = 100$ και εφαρμόστε τη μέθοδο του Euler για συστήματα για να βρείτε τις προσεγγίσεις (x_n, y_n) των $(x(t_n), y(t_n))$, $n = 0, \ldots, N$.

1. Δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των λύσεων ως προς το χρόνο t.
2. Επειδή $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, δημιουργείστε τη γραφική παράσταση ανάμεσα στις $(x(t), y(t))$ Παρατηρήστε ότι είναι κύκλος στο πεδίο xy.
3. Βρείτε το $\max_{0 \le n \le N}(x_n^2 + y_n^2)$. Ισχύει $x_n^2 + y_n^2 = 1$; Στη συνέχεια δημιουργείστε τη γραφική παράσταση των 2 προσεγγίσεων (x_n, y_n) στο πεδίο xy. Δημιουργείτε ένας κύκλος;

Μέθοδος Taylor (2)

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

Έστω ένας ομοιόμορφος διαμερισμός του $[a, b]$, στα σημεία $t_n = a + nh$, $n = 0, \ldots, N$, με βήμα $h = \dfrac{b-a}{N}$. θεωρήσαμε τη μέθοδο Taylor (2) όπου υπολογίζουμε τις τιμές y_n που αποτελούν προσεγγίσεις στις τιμές $y(t_n)$, $n = 0, \ldots, N$, σύμφωνα με

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} g(t_n, y_n), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

όπου $g(t, y(t)) = \dfrac{d}{dt} f(t, y(t))$.

Άσκηση 5: Έστω $y(t) = e^{-\lambda t} + \sin(2t)$, στο $[0, 5]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = -\lambda y(t) + 2\cos(2t) + \lambda \sin(2t), \quad t \in [0, 5], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε ότι $\lambda = 50$.

1. Για $N = 50$, κατασκευάστε τις προσεγγίσεις που δίνει η μέθοδος του Taylor (2), δημιουργείστε τη γραφική παράσταση της προσεγγιστικής λύσης και της ακριβούς στο διάστημα [0,5]. Στη συνέχεια βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνεται με το αντίστοιχο σφάλμα για τη μέθοδο του Euler.
2. Θεωρείστε τις διαμερίσεις του $[0, 5]$, με $N = 10, 20, 30, \ldots, 100$. Υπολογίστε τα σφάλματα err_N και βρείτε τους λόγους που χρησιμοποιούμε για την πειραματική τάξη σύγκλισης της μεθόδου του Taylor (2). Είναι $p \approx 2$; Συγκρίνετε τα σφάλματα με τα αντίστοιχα για τη μέθοδο Euler.