Πολυβηματικές μέθοδοι: γενική μορφή

Γενικά μια (γραμμική) *$k-$βηματική* μέθοδος για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών περιγράφεται από $2k+2$ σταθερές $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, $\beta_0, \dots, \beta_k$, και είναι της μορφής

$$
\begin{aligned}
& y^0, y^1, \dots, y^{k-1} \quad \text{δεδομένα}, \\
& \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = h\big(\beta_k f^{n+k} + \cdots + \beta_0 f^n\big), \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n = 0, \dots, N-k.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Θα υποθέτουμε συνήθως ότι $\alpha_k = 1$ και ότι $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$, έτσι ώστε να έχουμε πράγματι μια $k-$βηματική μέθοδο.

Ευστάθεια (Βασική Ευστάθεια)

Ορισμός

(Ευστάθεια Πολυβηματικών Μεθόδων.) Θα λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος είναι ευσταθής, *αν*

- *για κάθε ΠΑΤ στο οποίο η f ικανοποιεί την ΟΣ- Lipschitz*
- *και δυο ακολουθίες προσεγγίσεων $y^0, \dots, y^N$, $z^0, \dots, z^N$, οι οποίες παράγονται από την ίδια πολυβηματική μέθοδο αλλά, γενικά, με διαφορετικές αρχικές τιμές , $y^0, \dots, y^{k-1}$ και $z^0, \dots, z^{k-1}$,*

ισχύει

$$\max_{1 \leq n \leq N} |y^n - z^n| \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |y^j - z^j|. \tag{2}$$

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών

Οι ομογενείς γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές είναι της μορφής

$$\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = 0, \quad n \geqslant 0, \tag{3}$$

όπου $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ δεδομένοι αριθμοί.

- Λέμε ότι η εξίσωση (**??**) έχει σταθερούς συντελεστές, γιατί οι συντελεστές $\alpha_k, \ldots, \alpha_0$ δεν εξαρτώνται από το *n*.
- Κάθε ακολουθία $(y^n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$, η οποία πληροί την (**??**), λέγεται λύση της.
- Υποθέτουμε στο εξής, προφανώς χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι οι αριθμοί α_k και α_0 είναι διάφοροι του μηδενός.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών II

- Ο χώρος λύσεων της (**??**) είναι γραμμικός χώρος, δηλαδή αν $\left(y_1^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \left(y_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ είναι δύο λύσεις της και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, τότε και η $\left(\alpha y_1^n + \beta y_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι λύση της.
- Θα δείξουμε παρακάτω ότι η διάσταση του χώρου λύσεων της (**??**) είναι k.
- Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, για οποιαδήποτε αρχικά δεδομένα $y^0, \dots, y^{k-1}$, υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (με πρώτες k συνιστώσες αυτές που έχουμε προκαθορίσει), η οποία είναι λύση της (**??**).
- Έστω $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j = 1, \dots, m$, λύσεις της (**??**). Λέμε ότι αυτές οι λύσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες, αν υπάρχουν σταθερές $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{C}$, όχι όλες μηδέν, τέτοιες ώστε

$$\gamma_1 y_1^n + \cdots + \gamma_m y_m^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

  Αν οι λύσεις αυτές δεν είναι γραμμικά εξαρτημένες, λέμε ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών III

- Θεωρούμε τώρα τις εξής λύσεις $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}, j = 0,\dots,k-1$, της (**??**): Οι αρχικές τιμές των $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι τέτοιες ώστε $y_j^m = \delta_{jm}, j, m = 0,\dots,k-1$.
- Είναι προφανές ότι αυτές οι λύσεις της (**??**) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- Επίσης, κάθε λύση $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ της (**??**) γράφεται στη μορφή

$$y^n = y^0 y_0^n + \cdots + y^{k-1} y_{k-1}^n, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

  Πράγματι, και τα δύο μέλη αυτής της ισότητας δίνουν ακολουθίες, οι οποίες είναι λύσεις της (**??**) και οι πρώτες k συνιστώσες τους είναι ίδιες. Επειδή το πρόβλημα λύνεται μονοσήμαντα, όταν προκαθορίσουμε τις k πρώτες συνιστώσες, οι λύσεις αυτές συμπίπτουν.
- Συνεπώς, η διάσταση του χώρου των λύσεων της (**??**) είναι k.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Θεμελιώδες σύστημα

- Κάθε βάση του χώρου λύσεων της (**??**) λέγεται *θεμελιώδες σύστημα* της (**??**).
- Έστω $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j = 1, \dots, k$, ένα θεμελιώδες σύστημα της (**??**), και $(\gamma^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια λύση της. Έστω $c_1, \dots, c_k$ η μοναδική λύση του συστήματος
$$\sum_{j=1}^{k} y_j^n c_j = \gamma^n, \quad n = 0, \dots, k-1.$$
Τότε,
$$\gamma^n = \sum_{j=1}^{k} c_j y_j^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Ρίζες πολυωνύμου

- Θεωρητικά κομψότερος, αλλά και πολύ πιο χρήσιμος για τα επόμενα, είναι ο ακόλουθος τρόπος προσδιορισμού ενός θεμελιώδους συστήματος της (**??**):
- Με τους συντελεστές $\alpha_k, \dots, \alpha_0$ της (**??**), θεωρούμε το πολυώνυμο ρ,
$$\rho(z) := \alpha_k z^k + \cdots + \alpha_0.$$
- Οι ρίζες του ρ είναι φυσικά διάφορες του μηδενός, αφού ο σταθερός όρος α_0 δεν είναι μηδέν.
- Αναζητούμε τώρα να προσδιορίσουμε μη τετριμμένες λύσεις της (**??**) (μη τετριμμένη σημαίνει ότι έχει τουλάχιστον έναν μη μηδενικό όρο) της μορφής $(y^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, όπου
$$y^n = z^n$$
(το n είναι στο y δείκτης και στο z εκθέτης).
- Τότε $z \neq 0$ και $\alpha_k z^{n+k} + \cdots + \alpha_0 z^n = 0$, δηλαδή $\rho(z) = 0$. Άρα το z είναι ρίζα του ρ.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Ρίζες πολυωνύμου II

- Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.
  $1\underline{\eta}$ *Περίπτωση*.
- Οι ρίζες $z_1, \ldots, z_k$ του ρ είναι διαφορετικές ανά δύο.
- Όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως (ορίζουσα του Vandermonde!), οι λύσεις $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$,
  $$y_j^n := z_j^n, j = 1, \ldots, k,$$
  της (**??**) αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημά της.

Προκαταρκτικά : Γραμμικές εξισώσεις διαφορών : Ρίζες πολυωνύμου III

$2^{\underline{\eta}}$ *Περίπτωση*.

- Το ρ έχει πολλαπλές ρίζες.
- Έστω z ρίζα του ρ πολλαπλότητας ν.
- Τότε οι ακολουθίες $\left(y_j^n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, j = 1, \ldots, \nu,$

$$\left.\begin{aligned} y_1^n &:= z^n \\ y_2^n &:= nz^n \\ &\vdots \\ y_\nu^n &:= n(n-1)\cdots(n-\nu+2)z^n \end{aligned}\right. \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

είναι λύσεις της (**??**).

Απόδειξη

Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, το z είναι ρίζα πολλαπλότητας ν και του πολυωνύμου $r_n, r_n(x) := x^n \rho(x)$. Άρα $r_n(z) = r_n'(z) = \cdots = r_n^{(\nu-1)}(z) = 0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι

$$
\begin{aligned}
&\alpha_k z^{n+k} + \alpha_{k-1} z^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 z^n = 0, \\
&\alpha_k (n+k) z^{n+k-1} + \alpha_{k-1}(n+k-1) z^{n+k-2} + \cdots + \alpha_0 n z^{n-1} = 0, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&\alpha_k (n+k)(n+k-1)\cdots(n+k-\nu+2) z^{n+k-\nu+1} + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots + \alpha_0 n(n-1)\cdots(n-\nu+2) z^{n-\nu+1} = 0,
\end{aligned}
$$

συνεπώς οι ακολουθίες που δίνονται στην (**??**) είναι λύσεις της (**??**).

Απόδειξη (συνέχεια)

Έστω τώρα $z_1, \ldots, z_m, m < k$, οι ανά δύο διαφορετικές ρίζες του ρ και $p_1, \ldots, p_m$ οι πολλαπλότητές τους. Σύμφωνα με τα προηγούμενα οι ακολουθίες $\left(y_j^n\right)_{n \in \mathbb{N}_0}, j = 1, \ldots, k,$

$$\begin{aligned}
y_1^n &:= z_1^n \\
y_2^n &:= n z_1^n \\
&\vdots \\
y_{p_1}^n &:= n(n-1)\cdots(n-p_1+2) z_1^n \\
y_{p_1+1}^n &:= z_2^n \\
&\vdots \\
y_{p_1+p_2}^n &:= n(n-1)\cdots(n-p_2+2) z_2^n \\
&\vdots \\
y_k^n &:= n(n-1)\cdots(n-p_m+2) z_m^n,
\end{aligned}$$

είναι λύσεις της (**??**). Αποδεικνύοντας ότι κάποιος κατάλληλος πίνακας είναι αντιστρέψιμος, μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι αυτές οι λύσεις αποτελούν ένα θεμελιώδες σύστημα της (**??**). Δεν θα δώσουμε εδώ την απόδειξη.

Ευστάθεια : συνθήκη των ριζών

Ορισμός

Λέμε ότι η πολυβηματική μέθοδος (**??**) *πληροί τη* συνθήκη των ριζών, *αν για το* χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ρ, *που ορίζεται ως*

$$\rho(z) := \alpha_k z^k + \cdots + \alpha_0,$$

ισχύουν

$$\rho(z) = 0 \implies |z| \leqslant 1,$$
$$\rho(z) = \rho'(z) = 0 \implies |z| < 1,$$

δηλαδή όλες οι ρίζες του ρ *έχουν απόλυτη τιμή (μέτρο) όχι μεγαλύτερη της μονάδας, εκείνες δε που έχουν απόλυτη τιμή ένα είναι απλές.*

Ευστάθεια : συνθήκη των ριζών : Θεώρημα

Θεώρημα

Μια πολυβηματική μέθοδος είναι ακριβώς τότε ευσταθής, όταν πληροί τη συνθήκη των ριζών.

Ευστάθεια συνεπάγεται την συνθήκη των ριζών : Απόδειξη

Θέτουμε $f = 0$ στην (**??**) και $z^i = 0, i \in \mathbb{N}_0,$ στην (**??**), οπότε η (**??**) λαμβάνει τη μορφή

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |y^n| \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |y^j|,$$

η οποία πρέπει να ισχύει για τις λύσεις της γραμμικής εξίσωσης διαφορών

$$\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \cdots + \alpha_0 y^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

βλ. την (**??**) για $f = 0,$ με σταθερά C ανεξάρτητη του N.

Ευστάθεια συνεπάγεται την συνθήκη των ριζών : Απόδειξη II

- Έστω z μια ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ρ. Τότε η ακολουθία $y^n := z^n$ (το n είναι στο y δείκτης και στο z εκθέτης), $n \in \mathbb{N}_0$, είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών, και επομένως πρέπει να ισχύει

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} |z|^n \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |z^j|.$$

- Αυτή η σχέση δεν μπορεί να ισχύει για $|z| > 1$, αφού τότε $|z|^N \to \infty$, $N \to \infty$. Αν λοιπόν η μέθοδος είναι ευσταθής, τότε πρέπει $|z| \leqslant 1$.
- Έστω τώρα z μια πολλαπλή ρίζα του ρ. Τότε, η ακολουθία $y^n := nz^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, είναι λύση της εξίσωσης διαφορών και επομένως πρέπει να ισχύει

$$\max_{0 \leqslant n \leqslant N} (n|z|^n) \leqslant C \max_{0 \leqslant j \leqslant k-1} |jz^j|.$$

- Αν $|z| = 1$, αυτή η σχέση δεν μπορεί να ισχύει για καμμία σταθερά C, επομένως πρέπει να έχουμε $|z| < 1$.

Συνοψίζοντας, αποδείξαμε ότι, αν η μέθοδος είναι ευσταθής, τότε το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο ικανοποιεί τη συνθήκη των ριζών.