9ο Εργαστήριο - Runge-Kutta.

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

μπορούμε να θεωρήσουμε και τις μεθόδους Runge - Kutta. Αυτές οι μέθοδοι είναι μονοβηματικές περιγράφονται από ένα μητρώο Butcher q σταδίων, που δίνεται ως

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

και χρησιμοποιούν προσεγγίσεις της ακριβούς λύσης σε σημεία ενδιάμεσα των t_n και t_{n+1}, $t_{n,i} = t_n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$, ως εξής: Κατασκευάζουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$, σύμφωνα με

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \dots, q,$$

και

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Αν ισχύει ότι $a_{ij} = 0$, $i \le j$ τότε έχουμε μια άμεση μέθοδο Runge-Kutta γιατί ο προσδιορισμός των τιμών $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$ γίνεται με άμεσο τρόπο, χωρίς τη λύση κάποιου συστήματος.

Αν η συνάρτηση f είναι μη γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της, y, τότε για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$ χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους.

Άσκηση 1: Έστω $y(t) = (t^2 + 1)^2$, στο $[0, 2]$ η οποία είναι λύση στο

$$y'(t) = 4t(y(t))^{1/2}, \quad t \in [0, 2], \quad y(0) = 1.$$

Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 2]$ σε $N + 1$ σημεία, και για να υλοποιήσετε αυτές τις δύο μεθόδους χρησιμοποιήστε την αρχική τιμή $y_0 = 1$.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 2. Η απλή μονοβηματικη μέθοδος Euler έχει τάξη κατά ένα λιγότερο. </p>

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t,y):
    s=4*t*y**(1/2)
    return s

def y_exact(t):
    s=(t**2+1)**2

    return s


def runge(t,y0):
    ## βελτιωμένη Euler
    a=1/2
    N=len(t)-1
    y=np.zeros(N+1)

    h=t[1]-t[0]
    y[0]=y0

    for i in range(N):
     t2=a # το βήμα για το 2ο ενδιαμεσο σημειο



     ### Υπολογισμός 1ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της f
     ky1=f(t[i],y[i])

     y1=y[i]


    ### Υπολογισμός 2ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της f
     y2=y[i]+h*a*ky1

     ky2=f(t[i]+t2*h,y2)

     #### Υπολογισμος της επομενης προσεγγισης (χρησιμοποιουμε τις ενδιαμεσες προσεγγισεις που εχουμε βρει)
     y[i+1]=y[i]+h*ky2

    return y



N=[20,40,80,160,320]




####Υπολογισμος ταξης ακριβειας

err=np.zeros(len(N))
for j in range(len(N)):
    t=np.linspace(0,2,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]


    y0=1
    y=runge(t,y0)

    err[j]=max(y_exact(t)-y)


print('Runge βελτιωμενη Euler')
for i in range(len(N)-1):

    print(np.log(err[i+1]/err[i])/np.log(N[i]/N[i+1]))
```

Άσκηση 2: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 3-σταδίων

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & \end{array}$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 3 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 3. </p>

Άσκηση 3: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη μέθοδο Runge-Kutta 4-σταδίων

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \end{array}$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια άμεση μονοβηματική μέθοδος 4 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 4. </p>

Πεπλεγμένες μέθοδοι Runge-Kutta

Οι πεπλεγμένες μέθοδοι Runge-Kutta, με στοιχεία $a_{ij} \ne 0$, $i \le j$, χωρίζονται σε δύο είδη

1. στις ημιπλεγμένες, με μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο $a_{ii} \ne 0$ και μηδενικά στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο, $a_{ij} = 0$, $i
2. και στις πλήρως πεπλεγμένες

Ημιπεπλεγμένες μέθοδοι

Στην περίπτωση των ημιπεπλεγμένων μεθόδων χρειάζεται να λύσουμε μια μη γραμμική εξίσωση q φορές, για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$. Αν έχουμε προσδιορίζει τα $y_{n,j}$ για $j = 1, \dots, i-1$ τότε το $y_{n,i}$ είναι η λύση της μη-γραμμικής εξίσωσης

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}) + h a_{ii} f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Την $y_{n,i}$ την προσδιορίζουμε με ανάλογο τρόπο όπως υλοποίησαμε τις πεπλεγμένες μεθόδους μέχρι τώρα. Αφού βρούμε όλες τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$, ο υπολογισμός της y_{n+1} είναι άμεσος.

Άσκηση 4: Επαναλάβατε την προηγούμενη άσκηση για τις ακόλουθες ημιπεπλεγμένες μεθόδους Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

για $\mu = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια ημιπεπλεγμενη μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων και είναι η τάξη ακρίβειας είναι 2 για $\mu = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ και 3 για $\mu = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$.

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(t,y):
    s=4*t*y**(1/2)
    return s

def y_exact(t):

    s=(t**2+1)**2

    return s


def runge_im(t,y0):
    ## 2 σταδιων
    m=1/2-np.sqrt(3)/6
    a_11=m;a_21=1-2*m;a_22=m
    b1=1/2;b2=1/2;t1=m;t2=1-m



    #### Εφαρμόζουμε μια διαδικασια σταθερου σημειου όπως κάναμε για τις πεπλεγμένες μεθόδους
    #### π.χ. Euler, Τραπεζιου, BDF
    #### Για καθε ενα ενδιάμεσο βήμα ορίζουμε την κατάλληλη συνάρτηση για να βρουμε το σταθερο σημείο.

    def g1(t1,yn,x):
        s=yn+h*a_11*f(t1,x)
        return s

    def g2(t2,yn,k1,x):
        s=yn+h*(a_21*k1+a_22*f(t2,x))
        return s



    N=len(t)-1
    y=np.zeros(N+1)

    h=t[1]-t[0]
    y[0]=y0
    tol=1.e-5
    Nmax=100

    for i in range(N):



     ### υπολογισμός 1-σταδιου
     tn1=t[i]+t1*h

     tn2=t[i]+t2*h;#print(tn1,tn2)

     x0=y[i] #αρχική προσέγγιση στο i-βημα
     k=0
     err=1. #θετουμε αρχικά το σφάλμα ίσον με 1 για να ξεκινήσει η διαδικασία

     while (err>tol) and (k<=Nmax):
        x=g1(tn1,y[i],x0)  # επόμενη προσέγγιση
        err=abs(x-x0) #σφάλμα
        k=k+1 # αυξάνουμε τον μετρητή βημάτων
        x0=x

     y1=x;  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγιση που βρηκαμε
    ###########   ως την προσεγγιση της λύσης στο σημείο t[i+1]
     k1=f(tn1,y1)

    ### υπολογισμός 2-σταδιου


     x0=y[i] #αρχική προσέγγιση στο i-βημα
     k=0
     err=1. #θετουμε αρχικά το σφάλμα ίσον με 1 για να ξεκινήσει η διαδικασία

     while (err>tol) and (k<=Nmax):
        x=g2(tn2,y[i],k1,x0)  # επόμενη προσέγγιση
        err=abs(x-x0) #σφάλμα
        k=k+1 # αυξάνουμε τον μετρητή βημάτων
        x0=x;

     y2=x;  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγιση που βρηκαμε
    ###########   ως την προσεγγιση της λύσης στο σημείο t[i+1]
     k2=f(tn2,y2)

     y[i+1]=y[i]+h*(b1*k1+b2*k2)

    return y



N=[20,40,60,80,100,120]




### υπολογισμος ταξης ακριβειας

err=np.zeros(len(N))
for j in range(len(N)):
    t=np.linspace(0,2,N[j]+1)
    h=t[1]-t[0]


    y0=1
    y=runge_im(t,y0)
    #print(y_exact(t)-y)
    err[j]=max(abs(y_exact(t)-y))
    print(err[j])

print('Runge 2 σταδιων πεπλεγμενη παραδειγμα')
for i in range(len(N)-1):

    print(np.log(err[i+1]/err[i])/np.log(N[i]/N[i+1]))
```

Πλήρως πεπλεγμένες μεθόδοι

Στην περίπτωση των πλήρως πεπλεγμένων μεθόδων Runge-Kutta για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$ χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους. Δεν προσδιορίζουμε τις τιμές $y_{n,i}$ μία κάθε φορά, αλλά όλες μαζί. Λύνουμε δηλαδή μια διανυσματική μη- γραμμική εξίσωση.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $Y \in \mathbb{R}^q$, $Y_i = y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$. Τότε λύνουμε τη μη-γραμμική εξίσωση

$$Y = F(t_n, Y)$$

όπου

$$F(t_n, Y) = \begin{pmatrix} y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{1j} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \\ \vdots \\ y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{qj} f(t_{n,j}, y_{n,j}) \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για την ακόλουθη πεπλεγμένη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \mu & \frac{1}{2} - \mu \\ \frac{1}{4} + \mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

για $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι μια πεπλεγμενη μονοβηματική μέθοδος 2 σταδίων με τάξη ακρίβειας $p = 4$.

In [ ]:

```
##### Κανετε αναλογα όπως με όλες τις πεπλεγμενες μεθόδους

##### Οι ενδιάμεσες προσεγγίσεις είναι ενα σταθερο σημείο (διάνυσμα τωρα) μια διανυσματικής συνάρτησης.
######

##### Εφαρμόζετε τη διαδικασια σταθερου σημειου για αυτη τη διανυσματική συναρτηση, η οποια ορίζετε
######  σύμφωνα με το μητρώο που περιγράφει τη μέθοδο Runge Kutta
```