7ο Εργαστήριο

Για την αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.)

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [a, b], \quad y(0) = y_0$$

μπορούμε να θεωρήσουμε και τις μεθόδους Runge - Kutta. Αυτές οι μέθοδοι είναι μονοβηματικές περιγράφονται από ένα μητρώο Butcher q σταδίων, που δίνεται ως

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & \tau_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & \tau_q \\ \hline \\ b_1 & \dots & b_q & \end{array}$$

και χρησιμοποιούν προσεγγίσεις της ακριβούς λύσης σε σημεία ενδιάμεσα των t_n και t_{n+1}, $t_{n,i} = t_n + \tau_i h$, $i = 1, \dots, q$, ως εξής: Κατασκευάζουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$, σύμφωνα με

$$y_{n,i} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}), \quad i = 1, \dots, q,$$

και

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=1}^{q} b_i f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Αν ισχύει ότι $a_{ij} = 0$, $i \leq j$ τότε έχουμε μια άμεση μέθοδο Runge-Kutta γιατί ο προσδιορισμός των τιμών $y_{n,i}$, $i = 1, \dots q$ γίνεται με άμεσο τρόπο, χωρίς τη λύση κάποιου συστήματος.

Αν η συνάρτηση f είναι μη γραμμική ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της, y, τότε για να προσδιορίσουμε τις τιμές $y_{n,i}$, $i = 1, \dots, q$ χρειάζεται να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα q εξισώσεων με q αγνώστους. Αν $a_{ij} = 0$, $i < j$ και $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, q$ τότε έχουμε μια ημιπεπλεγμένη μέθοδο Runge-Kutta. Αν $a_{ij} \neq 0$, $i < j$ $i = 1, \dots, q$ τότε έχουμε μια πλήρως πεπλεγμένη μέθοδο Runge-Kutta.

Παραδείγματα πεπλεγμένων μεθόδων Runge-Kutta

1. Runge-Kutta 1-σταδίου

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & \\ & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & \\ & 1 \end{array}$$

2. Runge-Kutta 2-σταδίων (Ημιπεπλεγμένες)

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \hline & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

3. Runge-Kutta 2-σταδίων (πεπλεγμένες)

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\ \frac{1}{4}+\mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\mu \\ \hline & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}$$

Ημιπεπλεγμένες Runge-Kutta

Για να υλοποιήσουμε τις ημιπεπλεγμένες Runge-Kutta μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για πεπλεγμενες μεθόδους που συναντησαμε μεχρι τωρα πχ πεπλεγμενη Euler ή τη μέθοδο του τραπεζιου. Για να υπολογίσουμε κάθε ενδιάμεση προσέγγιση $y^{n,1}, y^{n,2}$ πρεπει να λύσουμε μια μη-γραμμική εξίσωση.

Για πρώτη ενδιάμεση προσέγγιση $y^{n,1}$ θα ισχύει

$$y^{n,1} = y^n + h\mu f(t_{n,1}, y_{n,1}).$$

Θέτουμε

$$g_1(s) = y^n + h\mu f(t_{n,1}, s),$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g_1(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως $y_{n,1}$, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \dots,$$

για δοσμένο tol, και $s_0 = y^n$, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n,1} = s_k$$

και προχωράμε για τη προσέγγιση της επόμενης $y^{n,2}$.

Θέτουμε

$$g_2(s) = y^n + h(1-2\mu)f(t_{n,1}, y^{n,1}) + h\mu f(t_{n,2}, s)$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g_1(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως $y_{n,2}$, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \ldots,$$

για δοσμένο tol και $s_0 = y^{n,1}$, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n,2} = s_k$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το y^{n+1} από τη σχέση

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2} f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

Άσκηση 1: θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,10], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}, \quad \mu = \frac{1}{3}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,10]$ σε $N+1$ σημεία, και υλοποιήστε αυτη τη μεθόδο για N=20. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο σφάλμα αν χρησιμοποιήσατε την αμεση μεθοδο του Euler.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι διαγώνια πεπλεγμένη μέθοδος 2 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 2. Όσο και η μέθοδος τραπεζίου. </p>

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y_exact(t):
    s=t/(1+t**2)
    return s

def f(t,y):
    s=1/(1+t**2)-2*y**2
    return s

N=20
y=np.zeros(N+1)
y0=0
tol=1.e-8
Nmax=100

## Μια διαγώνια πεπλεγμένη Runge-Kutta 2 σταδιων

t=np.linspace(0,10,N+1)
h=t[1]-t[0]
y[0]=y0

#Ορισμός της μεθόδου - Πίνακας A
mu=1./3
a11=mu
```

```
a21=1-2*mu
a22=mu

for i in range(N):

     t1=t[i]+mu*h # το  1ο ενδιαμεσο σημειο
     t2=t[i]+(1-mu)*h #το 2ο ενδιαμεσο σημειο

     ### Υπολογισμός 1ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της 
     x0=y[i] #αρχική προσέγγιση στο i-βημα για το y_{n,1}



        ####### Δημιουργούμε μια επαναληπτική διαδικασια με παρομοιο τροπο
        ##### για να βρουμε το y_{n,1}
        ### x0 ειναι η προηγουμενη προσεγγιση για το y_{n,1} και x ειναι η



     y1=x  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγισ
    ###########   ως την προσεγγιση y1=y_{n,1} της λύσης





    ### Υπολογισμός 2ου ενδιαμεσου βηματος και της αντίστοιχης τιμης της f
     x0=y1 #αρχική προσέγγιση στο i-βημα για το y_{n,2}


      ####### Δημιουργούμε μια επαναληπτική διαδικασια με παρομοιο τροπο όπ
        ##### για να βρουμε το y_{n,2}
        ### x0 ειναι η προηγουμενη προσεγγιση για το y_{n,2} και x ειναι η

     y2=x  #τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγισ
    ###########   ως την προσεγγιση y2=y_{n,2} της λύσης

     #### Υπολογισμος της επομενης προσεγγισης y_{n+1}
    ###### (χρησιμοποιουμε τις ενδιαμεσες προσεγγισεις y1, y2 που εχουμε βρ






####Υπολογισμος ταξης ακριβειας
```

Άσκηση 2: θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών της προηγούμενης άσκησης:

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,10], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} \mu & 0 & \mu \\ 1-2\mu & \mu & 1-\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}, \quad \mu = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,10]$ σε $N+1$ σημεία, και υλοποιήστε αυτη τη μεθόδο για N=20. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο σφάλμα αν χρησιμοποιήσατε την αμεση μεθοδο του Euler.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\leq n\leq N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι διαγώνια πεπλεγμένη μέθοδος 2 σταδίων και είναι τάξη ακρίβειας είναι 3. </p>

πεπλεγμένες Runge-Kutta

Για να υλοποιήσουμε τις ημιπεπλεγμένες Runge-Kutta μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για πεπλεγμενες μεθόδους που συναντησαμε μεχρι τωρα πχ πεπλεγμενη Euler ή τη μέθοδο του τραπεζιου. Για να υπολογίσουμε κάθε ενδιάμεση προσέγγιση $y^{n,1}, y^{n,2}$ πρεπει να λύσουμε μια μη-γραμμική εξίσωση.

Για πρώτη ενδιάμεση προσέγγιση $y^{n,1}$ θα ισχύει

$$y^{n,1} = y^n + h\mu f(t_{n,1}, y_{n,1}).$$

Θέτουμε

$$g_1(s) = y^n + h\mu f(t_{n,1}, s),$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g_1(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως $y_{n,1}$, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \dots,$$

για δοσμένο tol, και $s_0 = y^n$, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n,1} = s_k$$

και προχωράμε για τη προσέγγιση της επόμενης $y^{n,2}$.

Θέτουμε

$$g_2(s) = y^n + h(1-2\mu)f(t_{n,1}, y^{n,1}) + h\mu f(t_{n,2}, s)$$

και αναζητούμε $s^\star$ τέτοιο ώστε

$$s^\star = g_1(s^\star).$$

Επειδή μπορούμε μόνο να προσεγγίσουμε το $s^\star$, την προσέγγιση s_k που θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την επαναληπτική διαδικασία του σταθερού σημείου, θα θέσουμε ως $y_{n,2}$, δηλαδή θεωρούμε την ακολουθία

$$s_{k+1} = g(s_k), k = 0, \dots,$$

για δοσμένο tol και $s_0 = y^{n,1}$, υπολογίζουμε το s_k τέτοιο ώστε $|s_k - s_{k-1}| \leq tol$ και θέτουμε

$$y_{n,2} = s_k$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το y^{n+1} από τη σχέση

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{q} \frac{1}{2} f(t^{n,i}, y^{n,i})$$

Άσκηση 3: θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών της προηγούμενης άσκησης:

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0, 10], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \mu & \frac{1}{2} - \mu \\ \frac{1}{4} + \mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \mu \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}, \quad \mu = \frac{1}{3}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0, 10]$ σε $N+1$ σημεία, και υλοποιήστε αυτη τη μεθόδο για N=20. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο σφάλμα αν χρησιμοποιήσατε την αμεση μεθοδο του Euler.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος 2 σταδίων και έχει τάξη ακρίβειας είναι 2. </p>

In [ ]:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def y_exact(t):
    s=t/(1+t**2)
    return s

def f(t,y):
    s=1/(1+t**2)-2*y**2
    return s

N=20
y=np.zeros(N+1)
y0=0
tol=1.e-8
Nmax=100

## Μια πλήρως πεπλεγμένη Runge-Kutta 2 σταδιων

t=np.linspace(0,10,N+1)
h=t[1]-t[0]
y[0]=y0


#Ορισμός της μεθόδου - Πίνακας A   ####
mu=1./3
```

```
a11=1/4
a12=1/4-mu
a21=1/4+mu
a22=1/4


for i in range(N):


     t1=t[i]+(1/2-mu)*h # το  1ο ενδιαμεσο σημειο
     t2=t[i]+(1/2+mu)*h #το 2ο ενδιαμεσο σημειο



     ### Υπολογισμός των ενδιαμεσων βηματων ως λύση ενος γραμμικού συστημα



      #αρχική προσέγγιση στο i-βημα
     x01=y[i];x02=y[i]# αρχικες προσεγγισεις για τα y1, y2

    ####### Δημιουργούμε μια επαναληπτική διαδικασια με παρομοιο τροπο όπως
        ##### για να βρουμε ταυτοχρονα τα y_{n,1} και y_{n,2}
        ### x01 ειναι η προηγουμενη προσεγγιση για το y_{n,1}
        #### και x02 ειναι η προηγουμενη προσεγγιση για το y_{n,2}
        #### x1 ειναι η καινουργια προσεγγιση για το y_{n,1}
        #### και x2 ειναι η προηγουμενη προσεγγιση για το y_{n,2}

     y1=x1
     y2=x2#τελειώνει η επαναληψη σταθερου σημειου και θέτουμε τη προσεγγισ
    ###########   ως την προσεγγιση y1, y2 της λύσης






     #### Υπολογισμος της επομενης προσεγγισης (χρησιμοποιουμε τις ενδιαμε






####Υπολογισμος ταξης ακριβειας
```

Άσκηση 4: θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών της προηγούμενης άσκησης:

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 2(y(t))^2, \quad t \in [0,10], \quad y(0) = 0.$$

Η ακριβή λύση του προβλήματος είναι $y(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$. Θεωρείστε τη μέθοδο Runge-Kutta 2-σταδίων

$$\begin{array}{cc|c} \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\mu & \frac{1}{2}-\mu \\ \frac{1}{4}+\mu & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}+\mu \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{array}, \quad \mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Θεωρήστε ένα διαμερισμό του $[0,10]$ σε $N+1$ σημεία, και υλοποιήστε αυτη τη μεθόδο για N=20. Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N}|y_n - y(t_n)|$ και συγκρίνετε με το αντίστοιχο σφάλμα αν χρησιμοποιήσατε την αμεση μεθοδο του Euler.

Βρείτε το σφάλμα $\max_{0\le n\le N}|y_n - y(t_n)|$, για $N = 20, 40, 80, 160$ καθώς και την προσεγγιστική τάξη σύγκλισης p.

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι πλήρως πεπλεγμένη μέθοδος 2 σταδίων και έχει τάξη ακρίβειας είναι 4. </p>

In [ ]:

```

```