

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ
ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1η Εργαστηριακή Άσκηση

Θεωρούμε το εξής πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f, & \text{στο } [a, b] \times [0, T], \\ u_x(a, \cdot) &= u_x(b, \cdot) = 0, & \text{στο } [0, T], \\ u(\cdot, 0) &= u_0, & \text{στο } [a, b]. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $f \in C([a, b] \times [0, T])$.

Γράψτε ένα πρόγραμμα σε Matlab το οποίο να λύνει το πρόβλημα (1) με τη πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Θεωρούμε μια διαμέριση του $[a, b]$ με βήμα $h = (b - a)/(N + 1)$, $x_i = a + ih$, και μια διαμέριση του $[0, T]$ με βήμα $k = T/M$, $t_j = jk$. Για τη διακριτοποίηση της συνοριακής συνθήκης $u_x(a, t) = 0$, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σημείο $x_{-1} = a - h$ και να υποθέσουμε ότι $U_{-1}^j = U_1^j$, οπότε η μέθοδος στο σημείο (x_0, t^j) , για $j \geq 1$, γράφεται

$$(2) \quad \frac{U_0^j - U_0^{j-1}}{k} - 2 \frac{U_1^j - U_0^j}{h^2} = f(x_0, t_j), \quad j = 1, \dots, M.$$

Μια διαφορετική προσέγγιση παίρνουμε αν θεωρήσουμε ότι

$$(3) \quad U_0^j = U_1^j, \quad j = 1, \dots, M.$$

Εφαρμογές:

- Θεωρούμε το πρόβλημα (1) με $a = 0$, $b = 1$, $f = 0$, $u_0(x) = \cos(\pi x/2)$, $T = 1$. Η ακριβής λύση είναι η $u(x, t) = e^{-(\pi/2)^2 t} \cos(\pi x/2)$. Για $N = 2^m - 1$, $M = 2^m$, $m = 2, \dots, 7$, υπολογίστε τις λύσεις U_i^j , $i = 0 \dots, N$, $j = 0, \dots, M$, με την μέθοδο (2) και τυπώστε τα βήματα $h_m = (b - a)/(N + 1)$ και τα σφάλματα $\epsilon_m = \max_{0 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N} |U_i^j - u(x_i, t_j)|$, καθώς και τους λόγους

$$\log\left(\frac{\epsilon_{m+1}}{\epsilon_m}\right) / \log\left(\frac{h_{m+1}}{h_m}\right).$$

- Επαναλάβετε τα παραπάνω για τη μέθοδο (3).

- Επαναλάβετε τα παραπάνω για τις μεθόδους (2) και (3), με $N = 2^m - 1$, $M = 2^{2m+1}$, $m = 2, \dots, 7$.

Εξέταση

Ονομάστε τα πρόγραμμα σας `bwdeuler1XXXXY.m` και `bwdeuler2XXXX.m`, όπου `XXXX` είναι ο αριθμός μητρώου σας. Μην ξεχάσετε να γράψετε τα ονόματα σας σε κάποιο σχόλιο στην αρχή του προγράμματος. Κατά την εξέταση θα πρέπει να είστε σε θέση να απαντήσετε σε τυχόν ερωτήσεις που θα σας τεθούν.

Θα πρέπει να υποβάλετε τα προγράμματα σας στο ηλεκτρονικό σύστημα που βρίσκεται στη σελίδα

<https://euler.math.uoc.gr/%7Emoodle/moodle1415/course/view.php?id=9>.

Για να μπορέσετε να υποβάλετε ηλεκτρονικά την εργασία σας πρέπει να εγγραφείτε πρώτα στο ηλεκτρονικό σύστημα που βρίσκεται στην παραπάνω διεύθυνση και στη συνέχεια και στο μάθημα που βρίσκεται στην παραπάνω σελίδα. Κατά τη διάρκεια της εξέτασης θα σας ζητηθεί να εξηγήσετε το πρόγραμμα σας καθώς και να απαντήσετε και σε άλλες σχετικές ερωτήσεις. Η εξέταση θα πραγματοποιηθεί στις 4/12/2014, (10-11πμ). Σε περίπτωση που δεν μπορείτε την παραπάνω ημερομηνία μπορείτε να εξεταστείτε σε άλλη ημερομηνία, σε συνεννόηση με τον διδάσκοντα.

Ημερομηνία παράδοσης: 3/12/2014.