



ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΠΑΡΙΣ ΠΑΜΦΙΛΟΥ
ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ
ΠΑΝ. ΚΡΗΤΗΣ

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ
Εκδόσεις Τροχαλία
Γριβαίων 5 (Πάροδος Σκουφά 64)
10 680 Αθήνα Τηλ. 36 46 426

Copyright 1989 Πάρις Πάμφιλος

ΑΙΤΗΣΗ

ΚΑΤΑΧΩΡΗΣΗ
ΠΑΡ ΠΑΡΟΝΤΩΝ
ΕΠΙΧ. ΚΑΦΕΛΙΝΗ
ΠΑΡ ΚΑΤΗΣ

Στην Αvva

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΕΥΣΗ
Εκδόσεως Τροχαίου
1 ημιλίου 2 (Παρόδος) Έκτα 26 841
10 880 Αθήνα Τηλ. 36 43 478

Copyright 1989 Papir Printing

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Οιον μιν τινα τούτων έχεις επιμαστόν αλήτην,
αίτου και οίνου κεχρημένον, ουδέ τι έργων
εμπαιον ουδέ βίης, άλλ αυτώσ αχθός αρουρήσ.
Οδυσσεια Υ 377

Οι σημειώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν αρκετές φορές στο μάθημα "εισαγωγή στην γεωμετρία" που διδάξα στο πανεπιστήμιο Κρήτης. Αν και είναι πολύ σύντομες και απαιτούν αρκετή δουλειά από τον αναγνώστη, ελπίζω να βοηθήσουν σε κάποιο προσανατολισμό των ενδιαφερομένων. Η ελληνική βιβλιογραφία είναι, δυστυχώς, πολύ περιορισμένη.

Ξεκινώ με μια ανασκόπηση των αξιωμάτων της Ευκλείδειας γεωμετρίας και των "Στοιχείων" του Ευκλείδη. Στόχος μου είναι να εξετάσω τις μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες με τα μέσα της Ευκλείδειας. Αυτό είναι δυνατόν διότι για κάθε μια τέτοια γεωμετρία μπορούν να ορισθούν "μοντέλα" τα οποία ικανοποιούν τα αξιώματα της αντιστοιχίας γεωμετρίας. Τα μοντέλα είναι είτε υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου είτε πιο αφηρημένα σύνολα (προβολικό επίπεδο) που σχετίζονται με αυτόν.

Αντί της χρήσης συγκεκριμένου μοντέλου θα μπορούσε κανείς να κάνει αξιωματική ανάπτυξη της αντιστοιχίας γεωμετρίας. Και οι δύο μέθοδοι παρουσιάζουν προτερήματα και μειονεκτήματα. Η αξιωματική (ή συνθετική) μέθοδος δίνει βαθειά αίσθηση της επαγωγικής δομής και των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών της αντιστοιχίας γεωμετρίας, είναι όμως χρονοβόρα. Αντίθετα, η χρήση μοντέλου τονίζει κάποια κοινά στοιχεία μεταξύ των διαφόρων γεωμετριών και επιτρέπει γρήγορη πρόσβαση σε ουσιαστικά αποτελέσματα. Η τελευταία μέθοδος, εκτός του ότι είναι πιο κοντά στον σύγχρονο τρόπο της έρευνας, παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την δική μας παραδοχή: Προσφέρεται για ωραιότερες εφαρμογές ειδικών κεφαλαίων της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Σε πολλά σημεία του χειρογράφου είχα καταγράψει παραθεμάτα αρχαίων και νεωτέρων δασκάλων από παράλληλα διαβάσματα μου. Αποφάσισα να τα διατηρήσω και δώ. Αποτελούν κι αυτά ένα είδος Σχημάτων (Σχημα: αντίθετο του Ασχημου) μιας ανώτερης γεωμετρίας που επεκτείνει και ωμορφαινει την Ευκλείδεια.

Ηρακλείο, Αυγούστος 1989

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

§ 1.	ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ	1
§ 2.	ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	9
§ 3.	ΤΟ ΑΞΙΩΜΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ	17
§ 4.	ΑΠΟ ΤΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ	21
§ 5.	ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	29
§ 6.	Η ΣΥΜΒΙΒΑΣΤΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ	35
§ 7.	ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	39
§ 8.	ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ	49
§ 9.	ΑΠΟ ΤΗΝ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	55
§ 10.	ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ	63
§ 11.	ΑΠΟ ΤΗΝ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	68
§ 12.	ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ	73
§ 13.	ΓΩΝΙΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ	79
§ 14.	ΔΕΣΜΕΣ ΚΥΚΛΩΝ	87
§ 15.	ΑΠΛΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ	93
§ 16.	ΜΕΡΙΚΕΣ ΑΞΙΟΛΟΓΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	99
§ 17.	ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΕΜΒΑΔΟΝ	106
§ 18.	ΤΟ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	110
§ 19.	ΔΙΠΛΟΣ ΛΟΓΟΣ	115
§ 20.	ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ	122
§ 21.	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ	134

αυτῆ ψυχῆ σοφωτάτῃ καὶ ἀριστῇ

Ἡρακλείτου 88.

1. ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Διαφορες ιδιοσυγκρασιες, διαφορες αντιδρασεις, ισως, αλλα κατα βαθος δυο τρεις μανιες, που βαζουν σε κινηση ολοκληρο το λογικο τους συστημα. Αν κατορθωσης να επισημανεις τις μανιες (και δεν ειναι δυσκολο) μπορεις να πεις απο τα πριν τι θα σκεπτονται σ ολη τους τη ζωη.

Γ. Σεφερη Μερεις Β, 9.7.1932

Μεσα στο πλεγμα των προτασεων της Ευκλειδειας γεωμετριας υπαρχουν ορισμενες απλες, των οποιων η αληθεια μας φαινεται τοσο προφανης που την δεχομαστε αναποδεικτα. Τετοιες προτασεις λεγονται αξιωματα. Στηριζομενοι σ ενα επαρκη αριθμο αξιωματων, μπορουμε ν αποδειξουμε ολες τις αλλες προτασεις. Μ αυτη την μεθοδο ανεπτυξε ο Ευκλειδης το υλικο που ειχε συγκεντρωσει στην εποχη του.

Σαν αξιωματα, ο Ευκλειδης, παιρνει ορισμενες προτασεις που υπαγορευονται απο την φυσικη εμπειρια. Χωρις να χρονοτριβηση στην θεμελιωση, προχωρα γρηγορα στην αναπτυξη του υλικου του. Η νεωτερη ερευνα βρηκε τα κενα και συμπληρωσε τα αξιωματα του σε ενα πληρες συστημα. Η αυστηρη θεμελιωση της γεωμετριας χρειαζεται την θεωρια συνολων και την εννοια του οριου, πραγματα που ξεκαθαριστηκαν 2.200 χρονια μετα τον Ευκλειδη. Τα κενα λοιπον, που αφησε ο Ευκλειδης, ειναι φυσιολογικα και δεν μπορουν να θιξουν την ωμορφια του σωματος των "Στοιχειων" του.

Ας δουμε τα αξιωματα του.

- α) Ηιτησθω απο παντος σημειου επι παν σημειον ευθειαν γραμμην αγαγειν. (Απαιτησε, απο καθε σημειο και προς καθε αλλο σημειο, να αγεται ευθυγραμμο τμημα)
- β) Και πεπερασμενην ευθειαν κατα το συνεχες επ ευθειας εκβαλειν. (και πεπερασμενο ευθυγραμμο τμημα να προεκτεινεται επ απειρον)
- γ) Και παντι κεντρω και διαστηματι κυκλον γραφεισθαι. (και με τυχον κεντρο και τυχουσα ακτινα, να γραφεται κυκλος)
- δ) Και πασας τας ορθας γωνιας ισας αλληλαις ειναι. (και ολες οι ορθες γωνιες να ειναι ισες μεταξυ τους)