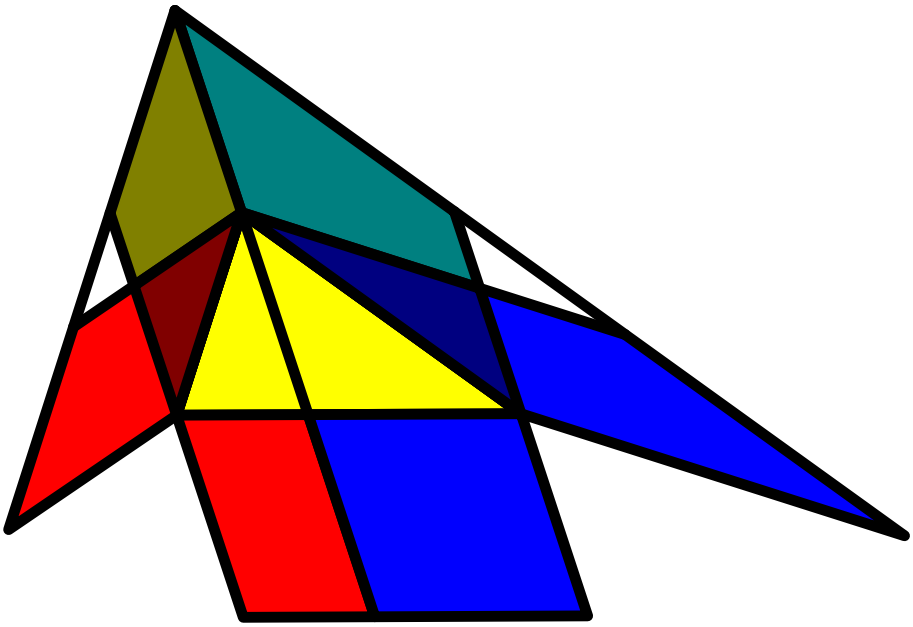


Μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας

Πάρις Πάμφιλος

Copyright: Paris Pamfilos 2000-2024

Στον αγαπημένο μου, αλησμόνητο φίλο και συνάδελφο

Karl Josef Witsch

Πρόλογος

> Με λίγα λόγια, ο άνθρωπος δεν πρέπει να μάθει σκέψεις, αλλά να μάθει να σκέπτεται. Δεν πρέπει να μεταφέρεται αλλά να καθοδηγείται, εάν θέλει να είναι στο μέλλον ικανός να βαδίζει μόνος του.
>
> *I. Kant, Παιδεία*

Η γραμμική άλγεβρα, μαζί με την ανάλυση, είναι βασικά εργαλεία στους κλάδους που χρησιμοποιούν μαθηματικά, και το κίνητρο για τη δημιουργία αυτού του βιβλίου ήταν να προσφέρει μια εύχρηστη παρουσίαση του υλικού που, κατά κάποιο τρόπο, θα οδηγεί τον αναγνώστη να αναπαράγει τη γνώση μόνος του, ξεκινώντας από τα βασικά και αφομοιώνοντας τις λεπτομέρειες μέσω των ασκήσεων.

Στη μέθοδο που ακολουθεί το βιβλίο οδηγήθηκα από την εμπειρία τριάντα χρόνων διδασκαλίας του μαθήματος στο πανεπιστήμιο Κρήτης, σε φοιτητές των τμημάτων Μαθηματικών, Φυσικής και Επιστήμης Υπολογιστών. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου είναι αυτή του πιο πάνω παραθέματος του Kant. Αυτός που πραγματικά θέλει να μάθει, και όχι να επιδιώξει ένα ελάχιστο βαθμό σε κάποια εξέταση, θα πρέπει να ασχοληθεί εντατικά με τις ασκήσεις. Και εννοείται ότι θα ανατρέξει στις υποδείξεις αφού πρώτα σκεφτεί το πρόβλημα μόνος του για κάποιο λογικό χρονικό διάστημα.

Το πρώτο μέρος του βιβλίου καλύπτει το υλικό του πρώτου εξαμήνου και το δεύτερο μέρος αυτό του δευτέρου εξαμήνου. Τα μαθήματα διαπραγματεύονται τις βασικές έννοιες και αφήνουν πολλές λεπτομέρειες στις ασκήσεις. Ένα πλήθος υποδείξεων γι αυτές τις ασκήσεις και σχετικών σημειώσεων αποσκοπούν στο να κάνουν την πορεία προς το γνωστικό αντικείμενο αυτάρκη και κατάλληλη για αυτοδύναμη μελέτη.

Τα μαθήματα προϋποθέτουν μια κάποια στοιχειώδη γνώση των πραγματικών και

μιγαδικών αριθμών, καθώς και κάποια επαφή με τα σύνολα και τις συναρτήσεις. Κάποιες από τις προϋποθέσεις αυτές υλοποιούνται συνήθως στις τελευταίες τάξεις των λυκείων θετικής κατεύθυνσης. Στα τρία παραρτήματα αναλύω επίσης κάποιες βασικές έννοιες που σχετίζονται με *Σώματα* , *Πολυώνυμα* και *Μεταθέσεις*. Μια πιο συστηματική προετοιμασία για το μάθημα προσφέρει το εξαίρετο βιβλίο *Σύνολα και Αριθμοί, Μια εισαγωγή στα Μαθηματικά* του Αντώνη Τσολομύτη [11], τον οποίο και ευχαριστώ, τόσο για την έμπνευση και δημιουργία της γραμματοσειράς *Kerkis* που χρησιμοποιώ εδώ, όσο και για την προθυμία του να με βοηθήσει σε προβλήματα με το *latex*.

Ίνατος, 16 Φεβρουαρίου 2025

Σύμβολα

$1-1$	Ένα προς ένα μετασχ., ένρριψη (Θεωρ. 2.1.1)
$(*_{m,n})$	$m \times n$ γενικός πίνακας (Σημ. 2.4.3)
$\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$	Ένα σύνολο διανυσμάτων (Ορ. 1.5.1)
$\mathbf{a}^*$	Δυική μιας βάσης $\mathbf{a}$ του V (Ασκ. 4.5.5)
$\mathbf{a} \cdot X$ ή και $\mathbf{a}X$	Συνδυασμός διανυσμάτων (Σημ. 2.2.3)
$\mathring{\mathbf{a}}$	Ισομορφ. $\mathbb{F}^n \to V$ μέσω βάσης $\mathbf{a}$ του V (Θεωρ. 2.2.1)
A^*	Συζυγής του πίνακα A (Ορ. 3.1.6)
A^t	Ανάστροφος του πίνακα A (Ορ. 2.2.3)
A^{-1}	Αντίστροφος του πίνακα A (Ορ. 2.2.1)
$\lvert A \rvert$ ή $det(A)$	Ορίζουσα του πίνακα A (Παραγρ. 4.1)
$\lVert A \rVert$	Νόρμα ή μέτρο του πίνακα A (Ορ. 3.1.7)
A_{ij}	Ελάσσων υπο-πίνακας του A (Θεωρ. 4.1.3)
a_{ij}	Το ij-στοιχείο του πίνακα A (Εξισ. 1.2)
$A_{[st]}$	Άνω αριστερά μπλοκ πίνακα A (Σημ. 2.4.3)
c_i^A ή c_i	i-στη στήλη του πίνακα A (Σημ. 2.2.1)
r_i^A ή r_i	i-στη γραμμή του πίνακα A (Σημ. 2.2.1)
AB	Γινόμενο πινάκων $\{A, B\}$ (Παραγρ. 2.2)
$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot M$	Διανύσματα $B_i \in \mathbf{b}$ ως γραμ. συνδ. των $\mathbf{a}$ (Σημ. 2.2.3)
${}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$	Πίνακας παράστασης του μετασχ. f (Ορ. 2.3.1)
$\mathbb{C}$	Το σύνολο (σώμα) των μιγαδικών αριθμών (Παραγρ. 3.1)
δ_{ij}	Δέλτα σύμβολο = 1 αν $i = j$, = 0 αν $i \neq j$ (Θεωρ. 4.1.3)
$deg(p(x))$	Βαθμός του πολυωνύμου $p(x)$ (Ορ. 7.3.1)
$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	$n \times n$ Διαγώνιος πίνακας (Ορ. 1.4.4)
$\mathbf{e} = \{E_1, \dots, E_n\}$	Συνήθης ή κανονική βάση (Ορ. 1.6.2)
$[\epsilon_{ij}]$, $[\epsilon_i^\lambda]$, $[\epsilon_{ij}^\lambda]$	Στοιχειώδεις πίνακες (Παραγρ. 2.4)
$\mathbb{F}$	Γενικό σώμα με άπειρο πλήθος στοιχείων (Ορ. 7.2.1)
f_A	Μετασχηματισμός οριζόμενος από πίνακα A (Εξισ. 2.2)
$\mathbb{F}[x]$	Η άλγεβρα όλων των πολυωνύμων με $x \in \mathbb{F}$ (Παραγρ. 7.3)
$\mathbb{F}^\infty$	Διανυσμ. χώρος ακολουθιών του $\mathbb{F}$ (Ασκ. 1.4.7)
$\mathbb{F}_f^\infty$	Σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών του $\mathbb{F}$ (Ασκ. 1.6.4)
f^*	Συζυγής του ενδομορφισμού f (Ορ. 3.1.5)
$Kern(f), Kern(A)$	Πυρήνας του f, πυρήνας του f_A (Θεωρ. 2.1.1)
$I_{\mathbb{F}}^f$	Ιδεώδες πολυωνύμων $\{p(x) : p(f) = O\}$ (Παραγρ. 5.4)
$I_k^{m,n}$	Πίνακας με μπλοκ (Θεωρ. 2.4.3)
$Im(f), Im(A)$	Εικόνα μετασχ. f, εικόνα του f_A (Θεωρ. 2.1.1)
I_n	$n \times n$ Ταυτοτικός πίνακας (Ορ. 1.4.4)

I_V	Ταυτοτικός ενδομορφισμός (Ασκ. 3.3.2)
$L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$	Σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών (Ορ. 2.1.1)
$M_{\mathbb{F}}(m, n)$	Σύνολο των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από $\mathbb{F}$ (Ορ. 1.4.3)
$[n] = \{1, \dots, n\}$	Σύνολο των πρώτων n φυσικών αριθμών (Θεωρ. 4.1.2)
$O_{m,n}$	$m \times n$ Μηδενικός πίνακας (Σημ. 1.6.1)
O_n	Μηδενικός $n \times n$ πίνακας (Ορ. 3.5.1)
O_V	Μηδενικός ενδομορφισμός του V (Παραγρ. 5.2)
p_W	Προβολή στο χώρο πηλίκον $p_W : V \to V/W$ (Ορ. 2.5.2)
$\mathbb{Q}$	Το σύνολο (σώμα) των ρητών αριθμών (Ορ. 1.4.1)
$\mathbb{R}$	Το σύνολο (σώμα) των πραγματικών αριθμών (Παρ. 7.2.1)
$\mathbb{R}_0^\infty$	Σύνολο ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 (Ασκ. 1.4.10)
$r_i \leftrightarrow r_j$	Εναλλαγή της i-της και j-της γραμμής πίνακα
$r_i \to r_i + \lambda r_j$	Στοιχειώδης πράξη γραμμών (Παραγρ. 1.3)
S_n	Σύνολο όλων των μεταθέσεων του $[n]$ (Ορ. 7.4.1)
V^*	Ο δυϊκός του διανυσματικού χώρου V (Ορ. 2.1.1)
V/W	Χώρος πηλίκον του V ως προς υπόχωρο W (Παραγρ. 2.5)
$V + W$	Άθροισμα υποχώρων διανυσματικού χώρου (Ορ. 3.3.1)
$V \oplus W$	Ευθύ άθροισμα υποχώρων (Ορ. 3.3.2)
$X \cdot Y$	Εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\{X, Y\}$ (Ορ. 3.1.1)
$X \times Y$	Εξωτερικό γινόμενο των $\{X, Y \in \mathbb{F}^3\}$ (Παραγρ. 3.4)
$\|X\|$	Νόρμα ή μέτρο του διανύσματος X (Ορ. 3.2.1)
$[X]_W$	Επισύνολο, στοιχείο του V/W περιέχον το X (Παραγρ. 2.5)
$\mathbb{Z}$	Το σύνολο των ακεραίων (θετικών, αρνητικών, μηδέν)
$\|z\|$	Μέτρο ή απόλυτη τιμή του μιγαδικού αριθμού z
$\overline{z}$	Ο συζυγής μιγαδικός του z
$Re(z)$	Πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z
$Im(z)$	Φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z

Περιεχόμενα

I Βασικές έννοιες και μέθοδοι **1**

1 Βασικές έννοιες και μέθοδοι **3**
1.1 Γραμμικά συστήματα . . . 3
1.2 Ομογενή, μη-ομογενή και τάξη . . . 7
1.3 Αναγωγή συστήματος σε κλιμακωτή μορφή . . . 8
1.4 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$, ο γενικός διανυσματικός χώρος . . . 14
1.5 Γραμμικοί συνδυασμοί, ανεξαρτησία . . . 18
1.6 Βάση και διάσταση . . . 24
1.7 Μηδενόχωρος, χώρος εικόνων . . . 27

2 Γραμμικοί μετασχηματισμοί **31**
2.1 Γραμμικοί μετασχηματισμοί . . . 31
2.2 Γινόμενο πινάκων, ισομορφισμοί . . . 35
2.3 Αλλαγή βάσης, ισοδύναμοι πίνακες . . . 41
2.4 Στοιχειώδεις πίνακες . . . 45
2.5 Χώρος πηλίκον . . . 50

3 Εσωτερικά γινόμενα **53**
3.1 Ερμιτιανό γινόμενο . . . 53
3.2 Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, Ευκλείδειοι χώροι . . . 61
3.3 Άθροισμα και ευθύ άθροισμα υποχώρων . . . 66
3.4 Γεωμετρία του Ευκλείδειου χώρου . . . 69
3.5 Πίνακες διαφόρων ειδών . . . 72

4 Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές **77**
4.1 Ορίζουσες . . . 77
4.2 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα . . . 86
4.3 Ερμιτιανοί και συμμετρικοί πίνακες . . . 88
4.4 Διγραμμικές μορφές . . . 90
4.5 Πρόσθετες ασκήσεις για το πρώτο μέρος . . . 93

II Ενδομορφισμοί ή τελεστές **95**

5 Ενδομορφισμοί ή τελεστές **97**
5.1 Ενδομορφισμοί . . . 97
5.2 Ενδομορφισμοί και πολυώνυμα . . . 99
5.3 Διαγωνιοποιήσιμοι και ημιαπλοί ενδομορφισμοί . . . 102
5.4 Το ελάχιστο πολυώνυμο . . . 108

5.5 Μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί 115
5.6 Κανονική μορφή του Jordan 124
5.7 Μορφή Jordan πραγματικών πινάκων 125
5.8 Η διάσπαση των Jordan-Chevalley 130

6 Εκθετική **133**
6.1 Εκθετική πινάκων 133
6.2 Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων 137
6.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης 139

III Παραρτήματα **143**

Α. Σώματα **145**
7.2 1 145

Β. Πολυώνυμα **147**
7.3 2 147

Γ. Μεταθέσεις **150**
7.4 3 150

Ευρετήριο **153**

Μέρος Ι

Βασικές έννοιες και μέθοδοι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες και μέθοδοι

1.1 Γραμμικά συστήματα

> Η γνώση του συνετού είναι σαν το νερό. Τούτο δεν κυλά στο λάκκο παρακάτω αν δεν γεμίσει τον προηγούμενο ως τα χείλη. Εκείνος δεν ξεκινά να μάθει τα επόμενα πριν κυριαρχήσει πλήρως τα προηγούμενα.
>
> *Κομφούκιος*

Η **Γραμμική άλγεβρα** ξεκίνησε με την προσπάθεια επίλυσης και θεωρητικοποίησης της διαδικασίας εύρεσης των λύσεων **συστημάτων γραμμικών εξισώσεων** ή απλά **γραμμικών συστημάτων**, δηλ. συστημάτων που οι άγνωστοι $\{x_i\}$ εμφανίζονται με βαθμό 1 και **όχι** με ανώτερη δύναμη $x_i^k, k > 1$, στη μορφή:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n & = & b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n & = & b_2\ , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots a_{3n}x_n & = & b_3\ , \\ \dots \quad \dots \quad \dots & & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n & = & b_m\ . \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

Ο ακέραιος m δείχνει το πλήθος των εξισώσεων.
Ο ακέραιος n δείχνει το πλήθος των αγνώστων $\{x_1, \dots, x_n\}$.
Συχνά αναφέρουμε εν συντομία ένα τέτοιο σύστημα λέγοντας **ένα $m \times n$ σύστημα**, δηλαδή σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους. Οι πίνακες με τους αριθμούς

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{1.2}$$

λέγονται αντίστοιχα **πίνακας του συστήματος** και **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος. Ταυτόχρονα το m είναι και το **πλήθος των γραμμών** και το n είναι το

πλήθος των στηλών του A. Οι αριθμοί $\{a_{ij}\ ,\ i = 1..m\ ,\ j = 1..n\}$ είναι τα **στοιχεία** του πίνακα. Ο πρώτος δείκτης δείχνει τη γραμμή και ο δεύτερος την στήλη στην οποία τοποθετείται αυτό το στοιχείο: a_{ij} στην τομή της i-τής γραμμής j-τής στήλης.

Προφανώς, για να καταγράψουμε το σύστημα (1.1) αρκεί να ξέρουμε τον αντίστοιχο *επαυξημένο πίνακα* $A|B$. Όταν ο πίνακας A είναι απλός, τότε το σύστημα λύνεται άμεσα. Για παράδειγμα:

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 = 100 \\ 3x_2 = 45 \\ 6x_3 = 60 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{επαυξημένος } A|B: \\ \text{με } \textbf{διαγώνιο} \\ \text{πίνακα } A\end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 3 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 6 & 60 \end{array}\right).$$

Επίσης για το σύστημα εξισώσεων

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 10\ , \\ x_3 + x_4 = 0\ . \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

παρατηρούμε ότι μπορεί να γραφεί (αν λυθεί ως προς x_1, x_3):

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 10 - 2x_2 - 4x_4\ , \\ x_3 = -x_4\ . \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

Έτσι, δίνοντας στα $\{x_2, x_4\}$ αυθαίρετες τιμές $\{\lambda, \mu\}$ παίρνουμε από τις εξισώσεις (1.4) αντίστοιχες τιμές για τα $\{x_1, x_3\}$ και μ' αυτές όλες τις λύσεις του αρχικού συστήματος (1.3):

$$x_1 = 10 - 2\lambda - 4\mu \quad , \quad x_2 = \lambda \quad , \quad x_3 = -\mu \quad , \quad x_4 = \mu\ .$$

Ο *επαυξημένος* πίνακας του αρχικού συστήματος (1.3) είναι

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Πίνακες αυτής της μορφής ονομάζονται **σε κλιμακωτή μορφή** ή **κλιμακωτοί** πίνακες. Συστήματα των οποίων ο αντίστοιχος πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή λύνονται αμέσως (εφόσον υπάρχει λύση), με ένα τρόπο που υποδεικνύεται από τις εξισώσεις (1.4). Συμβολίζοντας με " * " οιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς, η γενική μορφή ενός *κλιμακωτού πίνακα* είναι:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccccccccccc} 0\ldots0 & p_1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & p_2 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & p_3 & *\cdots* & 0 & 0\ldots0 & 0 & *\cdots* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & p_k & *\cdots* \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \ldots\ 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & \ldots\ 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & \\ & n_1 & & n_2 & & n_3 & & & & n_k & \end{array}\end{array}. \tag{1.6}$$

Για παράδειγμα

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & & & & \uparrow & & \\ & & n_1 = 3 & & n_2 = 5 & & & & & n_3 = 10 & & \end{array}\end{array}. \tag{1.7}$$

Ο κλιμακωτός πίνακας χαρακτηρίζεται απ τις εξής ιδιότητες:

1. Υπάρχουν ακέραιοι $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\}$ έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της n_i στήλης μηδενίζονται, εκτός αυτού της i- γραμμής όπου ευρίσκεται ένας αριθμός $p_i \neq 0$ που ονομάζεται i-στος **οδηγός** του πίνακα.

$$\text{i-θέση (γραμμή)} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ p_i \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Οι στήλες αυτές ονομάζονται **κύριες** ενώ όλες οι άλλες **δευτερεύουσες**.
2. Εάν μία γραμμή του πίνακα περιέχει έναν οδηγό, τότε όλα τα στοιχεία της γραμμής αυτής αριστερά του οδηγού μηδενίζονται.
3. Κάθε γραμμή του πίνακα που δεν περιέχει ένα οδηγό μηδενίζεται (όλα τα στοιχεία της είναι μηδενικά).

Ορισμός 1.1.1. Ο αριθμός k των κυρίων στηλών του πίνακα, που ισούται με το πλήθος των οδηγών, ονομάζεται **τάξη** του κλιμακωτού πίνακα.

Στο τελευταίο παράδειγμα οι 3η, 5η και 10η στήλες είναι κύριες. Οι υπόλοιπες είναι δευτερεύουσες. Η τάξη του πίνακα είναι 3.

Ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με πίνακα σε *κλιμακωτή* μορφή λέγεται **σύστημα σε κλιμακωτή μορφή.** Μια βασική παρατήρηση:

Σημείωση 1.1.1. Σε ένα σύστημα σε κλιμακωτή μορφή καθένας από τους αγνώστους $x_i \in \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}\}$, που αντιστοιχεί σε κύρια στήλη, περιέχεται μόνο στην i-η εξίσωση (i-η γραμμή του πίνακα).

Έτσι, αν θεωρήσουμε το σύστημα με επαυξημένο επιλύοντα πίνακα αυτόν του παραδείγματος (1.7)

$$\left.\begin{aligned} 5x_3 + 2x_4 + 3x_6 + x_8 + 2x_{11} &= 0 \\ -2x_5 + 4x_6 + x_9 + 2x_{11} &= 0 \\ 2x_{10} - x_{11} &= 1 \end{aligned}\right\},$$

βλέπουμε ότι οι εξισώσεις μπορούν να λυθούν ως προς τους αγνώστους $\{x_3, x_5, x_{10}\}$, που αντιστοιχούν στις *κύριες* στήλες του πίνακα (1.7). Με άλλα λόγια, το σύστημα αυτό μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\left.\begin{aligned} 5x_3 &= -2x_4 - 3x_6 - x_8 - 2x_{11} \\ -2x_5 &= -4x_6 - x_9 - 2x_{11} \\ 2x_{10} &= x_{11} + 1 \end{aligned}\right\}.$$

Στους αγνώστους της δεξιάς πλευράς αυτών των εξισώσεων μπορούμε να δώσουμε αυθαίρετες τιμές και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις να ορίσουμε μέσω αυτών τις αντίστοιχες τιμές των $\{x_3, x_5, x_{10}\}$. Μ' αυτό τον τρόπο, θέτοντας επίσης αυθαίρετες τιμές στα $\{x_1, x_2, x_7\}$, που αντιστοιχούν σε μηδενικές στήλες (που είναι επίσης *δευτερεύουσες*), προσδιορίζουμε όλες τις λύσεις του συστήματος.

Με την ίδια ακριβώς μέθοδο μπορούμε να λύσουμε ένα σύστημα που βρίσκεται σε κλιμακωτή μορφή: Λύνουμε διαδοχικά τις εξισώσεις ως προς τους αγνώστους $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$. Τότε στη δεξιά πλευρά των εξισώσεων που προκύπτουν ευρίσκονται αποκλειστικά άγνωστοι που αντιστοιχούν σε *δευτερεύουσες* στήλες του αρχικού πίνακα (έχουμε κατά νου το τελευταίο παράδειγμα). Στους αγνώστους αυτούς μπορούμε να θέσουμε αυθαίρετες τιμές και μέσω των εξισώσεων να προσδιορίσουμε τις τιμές των *κυρίων* μεταβλητών $\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$. Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν όλες οι λύσεις του συστήματος. Αυτές οι παρατηρήσεις αποδεικνύουν και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1. *Όλες οι λύσεις ενός συστήματος σε κλιμακωτή μορφή προκύπτουν θέτοντας αυθαίρετες τιμές στις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δευτερεύουσες στήλες (συχνά ονομαζόμενες* **ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος***), και λύνοντας κατόπιν τις προκύπτουσες εξισώσεις ως προς τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κύριες στήλες.*

Σ' ένα σύστημα σε κλιμακωτή μορφή μπορούμε αμέσως να καταλάβουμε αν λύνεται, ή όπως λέμε είναι **επιλύσιμο**:

Θεώρημα 1.1.2. *Ένα σύστημα σε κλιμακωτή μορφή είναι* **αδύνατο** *ή* **μη-επιλύσιμο***, τότε και μόνον αν ο επαυξημένος πίνακας έχει την τελευταία του στήλη κύρια.*

Για παράδειγμα, αν ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

η τρίτη εξίσωση είναι αδύνατον να ικανοποιηθεί:

$$0 \;=\; 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 2\ .$$

Ανάλογη είναι και η απόδειξη του θεωρήματος: Στην γενική περίπτωση η γραμμή που περιέχει τον οδηγό της τελευταίας στήλης (ο τελευταίος οδηγός είναι $p_k \neq 0$) παράγει την αδύνατον να ικανοποιηθεί εξίσωση $0 = p_k$.

Άσκηση 1.1.1. *Λύσε το σύστημα σε κλιμακωτή μορφή με επαυξημένο πίνακα*

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

και δες ότι οι λύσεις του εξαρτώνται από τρεις αυθαίρετες $\{x_2 = \lambda, x_4 = \mu, x_5 = \upsilon\}$.

Άσκηση 1.1.2. *Ποια είναι η διαφορά των λύσεων του προηγουμένου συστήματος από τις λύσεις των συστημάτων με επαυξημένους πίνακες αντίστοιχα:*

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad , \quad B = \left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

1.2 Ομογενή, μη-ομογενή και τάξη

> Όλα έχουν ειπωθεί, αφού όμως κανείς δεν ακούει, πρέπει να γυρνάμε πίσω και να τ' αρχίζουμε όλα πάλι ξανά και ξανά.
>
> *A. Gide*

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πόσο εύκολα λύνεται ένα σύστημα που ευρίσκεται σε *κλιμακωτή μορφή*. Τα καλά νέα είναι ότι κάθε γραμμικό σύστημα είναι **ισοδύναμο** προς ένα σύστημα σε *κλιμακωτή μορφή*. Λέγοντας *ισοδύναμο* εννοούμε ότι τα δύο συστήματα έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις.

Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε για να βρούμε το ισοδύναμο σύστημα σε κλιμακωτή μορφή λέγεται **Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή** (ή **Αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα** αν δουλεύουμε με πίνακες). Το σύστημα που βρίσκουμε με αυτή την αναγωγή λέγεται **ισοδύναμο σε κλιμακωτή μορφή** του αρχικού συστήματος (αντίστοιχα **ισοδύναμος κλιμακωτός πίνακας**). Με αυτή την αναγωγή στο κλιμακωτό σύστημα λύνουμε ή δείχνουμε την αδυναμία λύσης οποιουδήποτε συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Μάλιστα η διαδικασία αυτής της αναγωγής είναι πολύ απλή και οι συνέπειές της οδηγούν σε διάφορα γενικά συμπεράσματα της γραμμικής άλγεβρας.

Η διαδικασία αυτή είναι ευρέως γνωστή ώς **απαλοιφή του Gauss**, διότι απαλείφει διαδοχικά έναν άγνωστο από κάθε εξίσωση, ανάγοντας σε ένα σύστημα εξισώσεων κάθε μιά από τις οποίες (εξισώσεις) περιέχει λιγότερους άγνωστους από την προηγούμενή της. Ιστορικά, η μέθοδος φαίνεται να ήταν γνωστή στην αρχαία Κίνα, γνωστή επίσης και στον Νεύτωνα πριν από τον Gauss ([8]).

Πριν προχωρήσουμε στη μέθοδο χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.2.1. Το σύστημα γραμμικών εξισώσεων (1.1) λέγεται **ομογενές** όταν συμβαίνει $\{b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0\}$. **Αντίστοιχο ομογενές** λέγεται το σύστημα που προκύπτει από το (1.1) θέτοντας όλα τα $\{b_1, \dots, b_m\}$ ίσα με μηδέν. Όταν ένα τουλάχιστον από τα $\{b_i\}$ είναι μη-μηδενικό, τότε το σύστημα λέγεται **μη-ομογενές**.

Προφανώς κάθε ομογενές σύστημα έχει τη λύση $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\}$ που ονομάζεται **τετριμμένη**.

Άσκηση 1.2.1. *Δώσε ένα παράδειγμα ομογενούς συστήματος που έχει μία ακριβώς λύση (κατ' ανάγκη την τετριμμένη).*

Άσκηση 1.2.2. *Ένα μη-ομογενές σύστημα σε κλιμακωτή μορφή είναι και επιλύσιμο (έχει λύσεις) όταν ακριβώς η τάξη του πίνακά του A είναι ίση με την τάξη του επαυξημένου του πίνακα $A|B$ (δες το θεώρημα 1.1.2).*

Άσκηση 1.2.3. *Δείξε ότι αν* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *και* $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ *είναι λύσεις του μη-ομογενούς συστήματος* (1.1)*, τότε η* **διαφορά** *τους* $(\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_n - \mu_n)$ *είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.*

Άσκηση 1.2.4. *Δείξε ότι αν* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *είναι μια λύση του μη-ομογενούς συστήματος* (1.1) *και* $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ *είναι μια λύση του αντιστοίχου ομογενούς, τότε το* **άθροισμά** *τους* $(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n)$ *είναι μια λύση του μη-ομογενούς 1.1.*

Οι δύο προηγούμενες απλές ασκήσεις συνεπάγονται το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.1. *Η γενική λύση* $(x_1, \dots, x_n)$ *του μη-ομογενούς συστήματος με επαυξημένο πίνακα* $A|B$ *ισούται με ένα* **άθροισμα** *της μορφής* $(\lambda_1 + y_1, \dots, \lambda_n + y_n)$*, όπου* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *είναι κάποια ειδική λύση του μη-ομογενούς και* $(y_1, \dots, y_n)$ *είναι η γενική λύση του ομογενούς με πίνακα* A*.*

Άσκηση 1.2.5. *Η γενική λύση ενός* $m \times n$ *ομογενούς συστήματος σε κλιμακωτή μορφή και τάξης* k *εξαρτάται από* $n - k$ *αυθαίρετες παραμέτρους (δηλαδή τόσες ακριβώς όσες οι δευτερεύουσες στήλες ή οι ελεύθερες μεταβλητές του συστήματος).*

Άσκηση 1.2.6. *Ένα* $m \times n$ *ομογενές σύστημα σε κλιμακωτή μορφή με* $m < n$ *και τάξη* $k = m$ *έχει πάντοτε μια λύση διαφορετική από την τετριμμένη (εφάρμοσε το θεώρημα 1.1.2).*

Άσκηση 1.2.7. *Οι* 3×3 *κλιμακωτοί πίνακες έχουν μία από τις επόμενες μορφές:*

$$\begin{pmatrix} p & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{τάξη 1,}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & * \\ 0 & p_2 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 & * & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{τάξη 2,}$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \quad \text{τάξη 3.}$$

Άσκηση 1.2.8. *Προσδιόρισε τις μορφές όλων των δυνατών* 3×4 *πινάκων σε κλιμακωτή μορφή.*

1.3 Αναγωγή συστήματος σε κλιμακωτή μορφή

> Όλοι οι άνθρωποι έχουν από τη φύση τους έφεση για γνώση. Αυτό φαίνεται από την ιδιαίτερη εκτίμηση που έχουμε για τις αισθήσεις μας. Γιατί, ανεξάρτητα από τη χρησιμότητά τους, μας είναι προσφιλείς οι ίδιες οι αισθήσεις, και περισσότερο απ' όλες η αίσθηση της όρασης.
>
> *Αριστοτέλης, Μεταφυσικά, Βιβλίο Ι-1*

Υπάρχουν δύο πολύ απλές πράξεις μεταξύ των γραμμών (εξισώσεων) του γραμμικού συστήματος (1.1) που οδηγούν σε ένα *ισοδύναμο* σύστημα, δηλαδή σύστημα με

τις ίδιες ακριβώς λύσεις με το αρχικό. Οι πράξεις αυτές ονομάζονται **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών** και είναι οι επόμενες:

1. Εναλλαγή δύο γραμμών $r_i \leftrightarrow r_j$. Προφανώς η πράξη αυτή δεν έχει καμία επίπτωση στις λύσεις του συστήματος.
2. Αντικατάσταση μιάς γραμμής (εξίσωσης) με το άθροισμα αυτής και μιας άλλης γραμμής. Δηλαδή αντικατάστασης $r_i \to r_i + \lambda r_j$. Το νέο σύστημα έχει τις ίδιες γραμμές (εξισώσεις) εκτός της i-ης, που τώρα γίνεται

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n \;=\; r_i + \lambda r_j \;.$$

   Το νέο σύστημα διαφέρει από το αρχικό μόνο κατά την i-η γραμμή. Εάν $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια λύση του αρχικού συστήματος, τότε προφανώς είναι και λύση του νέου συστήματος. Και αντίστροφα, αν $\{x_1, \ldots, x_n\}$ είναι μια λύση του νέου, τότε αφαιρώντας από την i-η γραμμή του νέου το λ πολλαπλάσιο της j-ης γραμμής παίρνουμε την i-η γραμμή του αρχικού και μ' αυτήν την ίδια λύση με αυτή του αρχικού συστήματος.

Σ' αυτά τα μαθήματα, εργαζόμενοι με παραδείγματα και ασκήσεις, προτιμάμε για συντομία, να χρησιμοποιούμε πίνακες και τις γραμμές τους αντί των εξισώσεων ενός συστήματος. Η αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή επιτυγχάνεται με κατ' επανάληψη εφαρμογή των *στοιχειωδών πράξεων γραμμών* 1 και 2 στο σύστημα των εξισώσεων ή τον αντίστοιχο πίνακα του συστήματος. Στην διαδικασία που εκτίθεται παρακάτω χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\to$ με τη σημασία: **αντικατάσταση της γραμμής αριστερά με την γραμμή στα δεξιά**.

Η διαδικασία είναι φυσιολογικά χωρισμένη σε δύο μέρη: (1) την **απαλοιφή** η **αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή**, κατά την οποία ο προκύπτων πίνακας ονομάζεται **κλιμακωτός**, και (2) την **αντίστροφη αντικατάσταση** που οδηγεί στο τελικό σύστημα σε κλιμακωτή μορφή.

Ας ξεκινήσουμε από τον πίνακα του συστήματος (1.1):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Μέρος πρώτο Απαλοιφή ή αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή

Αναζητούμε την πρώτη μη μηδενική στήλη, πες ότι είναι η i-η, που σημαίνει ότι ο πίνακας έχει όντως τη μορφή:

$$\begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ 0 \ldots 0 & a_{2i} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots 0 & a_{mi} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Ορισμός 1.3.1. Εάν η i-η είναι η πρώτη μη μηδενική στήλη, τότε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της από τα πάνω προς τα κάτω: $p_1 = a_{ki} \neq 0$ ονομάζεται πρώτος **οδηγός** του συστήματος (και του πίνακα).

Εναλλάσσουμε την πρώτη γραμμή με την k-η: $r_1 \leftrightarrow r_k$, και παίρνουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0\dots0 & a_{ki} & \dots & a_{kn} \\ 0\dots0 & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0\dots0 & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0\dots0 & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \leftarrow k\text{-η γραμμή}$$

Εμφανίζουμε κατόπιν την πρώτη κύρια στήλη και τον πρώτο οδηγό $p_1 = a_{ki}$ του κλιμακωτού πίνακα κάνοντας διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών:

$$\left.\begin{array}{c} r_2 \to r_2 - (a_{2i}/a_{ki})r_1 \\ r_3 \to r_3 - (a_{3i}/a_{ki})r_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_m \to r_m - (a_{mi}/a_{ki})r_1 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{που}\\ \text{παράγουν}\\ \text{τον}\\ \text{πίνακα:}\end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & A' & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Ο (υπο) πίνακας A' είναι $(m-1)\times(n-i)$ διαστάσεων και στα αριστερά του όλα τα στοιχεία είναι μηδενικά. Μπορούμε τώρα να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία αυτή τη φορά με τον πίνακα A', και να βρούμε τον πρώτο οδηγό $p_2 \neq 0$ του A' (και δεύτερο οδηγό του αρχικού πίνακα A) παράγοντας αντίστοιχα τον πίνακα

$$A' \to \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_2 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & A'' & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζοντας ξανά την ίδια μέθοδο στον A'', παράγουμε τον πρώτο του οδηγό $p_3 \neq 0$ (που είναι ο τρίτος οδηγός του αρχικού πίνακα A) και τον πίνακα A''', ... κτλ. Καθώς μειώνονται οι διαστάσεις των πινάκων $\{A, A', A'', \dots\}$, είναι βέβαιο ότι μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων θα σταματήσουμε, καταλήγοντας σε *σχεδόν* **κλιμακωτό** πίνακα, δηλαδή πίνακα της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * & * & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_2 & * & \dots & * & * & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_3 & \dots \\ 0 & \dots & & & & \dots & & & & \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & & & & \dots & & 0 & & \dots & & 0 & \dots \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Οι οδηγοί $\{p_1, \dots, p_k\}$ είναι εξ ορισμού μη-μηδενικοί και οι θέσεις τους ορίζουν τις κύριες στήλες του *κλιμακωτού πίνακα*. Λέμε *σχεδόν* γιατί πάνω από τους οδηγούς δεν έχουμε (ακόμη) μηδενικά. Αυτά τα εμφανίζουμε με τις διαδικασίες του δεύτερου μέρους.

Μέρος δεύτερο Αντίστροφη αντικατάσταση

Αρχίζουμε από κάτω, από την k-η γραμμή, που περιέχει τον τελευταίο οδηγό p_k, και κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, μέσω των οποίων αντικαθιστούμε με μηδενικά όλα τα στοιχεία της στήλης πάνω από το p_k. Για ένα τέτοιο στοιχείο x_i ευρισκόμενο στην i-η και γραμμή στην ίδια στήλη πάνω από το p_k, με $i < k$, αντικαθιστούμε την i-η γραμμή με την $r_i \to r_i - \frac{x_i}{p_k} r_k$. Επαναλαμβάνοντας αυτή την

πράξη για όλα τα $i = 1..k-1$ παίρνουμε ένα ισοδύναμο σύστημα (πίνακα) που έχει όλα τα στοιχεία της στήλης πάνω από το p_k μηδενικά.

Επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία για τα $\{(k-1),(k-2),\dots 2\}$ καταλήγουμε στην επιθυμητή μορφή (1.6) του *κλιμακωτού πίνακα.*

Αποδείξαμε λοιπόν μ' αυτά το θεώρημα:

Θεώρημα 1.3.1. *Κάθε γραμμικό σύστημα (ή πίνακας) ανάγεται με κατ' επανάληψη εφαρμογή των στοιχειωδών πράξεων γραμμών 1 και 2 σε ένα ισοδύναμο σύστημα σε κλιμακωτή μορφή (πίνακα της μορφής: 1.6).*

Παράδειγμα 1.3.1. Ας κάνουμε την αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή του επόμενου πίνακα ξεκινώντας από το πρώτο μέρος, την απαλοιφή, μέσω της οποίας βρίσκουμε τους οδηγούς $\{p_1, p_2, p_3\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 \leftrightarrow r_2 \\ \text{παράγει} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} p_1 = 1 \\ r_3 \to r_3 + r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1 \\ \text{παράγει} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} p_2 = 1 \\ r_3 \to r_3 - r_2 \\ \text{παράγει} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} p_3 = 3. \\ \text{Και τώρα} \\ \text{Μέρος 2} \\ \text{αντικατάσταση:} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} r_2 \to r_2 + (2/3)r_3 \\ r_1 \to r_1 - (1/3)r_3 \\ \text{παράγει} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.3.1. *Βρες τους οδηγούς και κάνε αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή στους πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 15 \\ 5 & 0 & 4 & 3 & 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 1.3.2. *Λύσε τις τα τρία πρώτα συστήματα εξισώσεων με επαυξημένους πίνακες $\{A, B, C\}$. Δείξε ότι το σύστημα με επαυξημένο πίνακα D είναι αδύνατο (δεν έχει λύσεις).*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & 4 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -4 & -1 \\ 5 & 10 & 1 & -9 & 8 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 11 \\ 7 & 14 & 2 & -9 & 13 \end{pmatrix}, \quad D = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -4 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Καθώς κάθε γραμμικό σύστημα ανάγεται σε ένα ισοδύναμο σε κλιμακωτή μορφή, με τα δύο συστήματα να έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, οι έννοιες της *τάξης*, *κύριας στήλης*, *δευτερεύουσας στήλης* μπορούν να μεταφερθούν από την κλιμακωτή μορφή του πίσω στο αρχικό σύστημα. Έτσι ορίζουμε:

Ορισμός 1.3.2. Σε ένα γραμμικό σύστημα $A|B$ ονομάζουμε **τάξη** του συστήματος (πίνακα) την τάξη της αντίστοιχης κλιμακωτής μορφής του πίνακα A. Ονομάζουμε **κύρια/δευτερεύουσα** στήλη του συστήματος (πίνακα) τη στήλη που αντιστοιχεί σε κύρια/δευτερεύουσα στήλη του αντιστοίχου πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Ονομάζουμε επίσης **ελεύθερες** τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δευτερεύουσες στήλες του πίνακα A. Τις μεταβλητές που αντιστοιχούν σε κύριες στήλες ονομάζουμε **κύριες** ή **βασικές**.

Θεώρημα 1.3.2. *Ένα γραμμικό σύστημα $m \times n$ διαστάσεων με επαυξημένο πίνακα $A|B$ είναι επιλύσιμο (έχει λύσεις) όταν ακριβώς ο πίνακας A έχει τάξη ίση με την τάξη του $A|B$. Όταν το σύστημα είναι επιλύσιμο και η τάξη αυτών των δύο πινάκων είναι k, τότε στις $n-k$ ελεύθερες μεταβλητές που αντιστοιχούν σε δευτερεύουσες στήλες του A μπορούν να δοθούν αυθαίρετες τιμές. Οι τιμές των k το πλήθος μεταβλητών που αντιστοιχούν σε κύριες στήλες μπορούν τότε να προσδιορισθούν μονοσήμαντα από τις τιμές των ελεύθερων μεταβλητών. Έτσι, όλες οι λύσεις $(x_1, \dots, x_n)$ του συστήματος εξαρτώνται από $n-k$ αυθαίρετες παραμέτρους και είναι της μορφής*

$$(x_1 = s_1 + y_1, \dots, x_n = s_n + y_n)\ , \tag{1.10}$$

όπου $(s_1, \dots, s_n)$ είναι μια κάποια ειδική λύση του μη-ομογενούς συστήματος και $\{(y_1, \dots, y_n)\}$ είναι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος που εξαρτάται από τις $n-k$ ελεύθερες μεταβλητές (παραμέτρους).

Σημείωση 1.3.1. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι ο πίνακας σε κλιμακωτή μορφή A' του πίνακα A μπορεί να έχει κάποιες από τις τελευταίες γραμμές του μηδενικές (παντού μηδενικά). Αυτό σημαίνει ότι το αρχικό σύστημα (πίνακας) έχει κάποιες γραμμές που εξαρτώνται από άλλες. Για παράδειγμα η τελευταία γραμμή του αρχικού συστήματος μπορεί να είναι άθροισμα των δύο πρώτων του γραμμών. Η διαδικασία απαλοιφής θα το ανακαλύψει και θα αποβάλλει, κατά κάποιο τρόπο, την τελευταία γραμμή, ως πλεονάζουσα (διότι ισχύει αυτόματα επειδή ισχύουν οι δύο άλλες), αντικαθιστώντας την με μια μηδενική γραμμή, δηλαδή γραμμή που έχει παντού μηδενικά.

Τελικά, η διαδικασία απαλοιφής συγκεντρώνει όλες τις ουσιαστικές γραμμές (αυτές που περιέχουν κάποιον οδηγό) πάνω και αντικαθιστά τις πλεονάζουσες γραμμές (εξισώσεις) με μηδενικές γραμμές κάτω από τις ουσιαστικές.

Η τάξη k του πίνακα, που ισούται με το πλήθος των κυρίων στηλών, καθώς και με το πλήθος των οδηγών, δείχνει επίσης πόσες γραμμές (εξισώσεις) του αρχικού συστήματος είναι **ανεξάρτητες**, δηλ. δεν προκύπτουν ως συνέπειες των άλλων. Η τάξη είναι επίσης ίση με το πλήθος των μη-μηδενικών γραμμών του αντιστοίχου κλιμακωτού πίνακα, καθώς κάθε γραμμή αυτού του πίνακα που δεν περιέχει έναν οδηγό είναι μηδενική.

Σημείωση 1.3.2. Συχνά σε ένα κλιμακωτό πίνακα διαιρούμε όλα τα στοιχεία της i-γραμμής που περιέχει έναν οδηγό p_i με αυτόν τον οδηγό. Τότε προκύπτει ο λεγόμενος **ανηγμένος κλιμακωτός** πίνακας που στη θέση του οδηγού p_i έχει τον αριθμό 1 που λέγεται **ηγετική μονάδα** αυτής της γραμμής του πίνακα.

Σημείωση 1.3.3. Ανάλογα με τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών θα μπορούσαμε να σκεφτούμε και για τα δύο είδη **στοιχειωδών πράξεων στηλών** ενός πίνακα: (1) εναλλαγή δύο στηλών $c_i \leftrightarrow c_j$, και (2) άθροισμα ενός πολλαπλασίου μιας στήλης σε μια άλλη $c_i \to c_i + \lambda c_j$. Είναι σαφές ότι χρησιμοποιώντας αυτές τις πράξεις θα μπορούσαμε να παραγάγουμε κάποιο ανάλογο του *κλιμακωτού πίνακα* συγκεντρώνοντας όλες τις ουσιαστικές στήλες στην αρχή του πίνακα και αντικαθιστώντας τις πλεονάζουσες με μηδενικές στήλες τοποθετημένες μετά τις ουσιαστικές. Αυτό εντούτοις θα κατέστρεφε την τάξη των μεταβλητών καθώς και τις ίδιες τις μεταβλητές που υπεισέρχονται στις αρχικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, η εναλλαγή των στηλών $c_i \leftrightarrow c_j$ θα τοποθετούσε την x_i μεταβλητή στη θέση της x_j και τούμπαλιν. Η πράξη στηλών $c_i \to c_i + \lambda c_j$ θα αντικαθιστούσε την x_i μεταβλητή με την $x_i + \lambda x_j$ κτλ.

Συνολικά, ο τελικός πίνακας θα αντιστοιχούσε σε σύστημα εξισώσεων, των οποίων οι λύσεις δεν είναι άμεσα σαφές τι σχέση θα έχουν με τις λύσεις του αρχικού συστήματος. Σε αντίθεση μ' αυτό, οι στοιχειώδεις πράξεις **γραμμών** παράγουν σε κάθε βήμα ένα σύστημα ισοδύναμο με το αρχικό, δηλαδή σύστημα που έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με το αρχικό.

Έτσι, σκεπτόμενοι ότι οι πίνακες αντιπροσωπεύουν συστήματα εξισώσεων, οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών είναι οι μόνες που οδηγούν σε ισοδύναμα συστήματα. Σκεπτόμενοι ωστόσο τους πίνακες σαν αυθύπαρκτες οντότητες, ανεξάρτητες από εξισώσεις, οι στοιχειώδεις πράξεις στηλών είναι τόσο σημαντικές, όσο και οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Η επόμενη, σχετική μ' αυτή την παρατήρηση, άσκηση οδηγεί σε μια ιδιότητα πινάκων που θα συναντήσουμε αργότερα (θεώρημα 2.4.3).

Άσκηση 1.3.3. *Για του $m \times n$ διαστάσεων πίνακα A δείξε ότι εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις στηλών στον αντίστοιχο πίνακα A' σε κλιμακωτή μορφή, παίρνουμε ένα $m \times n$ πίνακα B της μορφής:*

$$B = \begin{pmatrix} p_1 & \cdot\cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot\cdot & p_k & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot\cdot & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \textit{δηλαδή ένα } m \times n \\ \textit{πίνακα με όλα τα στοιχεία} = 0, \\ \textit{εκτός των } b_{11} = p_1, \dots, b_{kk} = p_k, \\ \textit{οδηγών του } A. \end{array} \tag{1.11}$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις στηλών (εναλλαγές στηλών) στον A' τοποθετούμε όλες τις κύριες στήλες στις πρώτες k θέσεις της B. Κατόπιν, κάνοντας τις ανάλογες πράξεις αυτών της αναγωγής σε κλιμακωτό πίνακα, αυτή τη φορά με στοιχειώδεις πράξεις στηλών, εμφανίζουμε μηδενικά σε όλα τα στοιχεία των γραμμών που περιέχουν οδηγούς, εκτός των θέσεων των ίδιων των οδηγών.

Παράδειγμα 1.3.2. Ας εφαρμόσουμε την ανάλογη αναγωγής σε κλιμακωτό διαδικασία για στήλες που αναφέρεται στην προηγούμενη άσκηση (υπόδειξη) στον επόμενο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Πρώτα μαζεύουμε όλες τις κύριες στήλες στις

πρώτες θέσεις και κατόπιν κάνουμε την διαδικασία με τις στοιχειώδεις πράξεις στηλών:

$$\begin{pmatrix} ① & 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & ⑥ & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ⑧ & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_2 \leftrightarrow c_3 \\ \text{παράγει} \\ \text{τον} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_3 \leftrightarrow c_5 \\ \text{παράγει} \\ \text{τον} \end{matrix} \begin{pmatrix} ① & 0 & 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & ⑥ & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ⑧ & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_6 \to c_6 - (1/2)c_3 \\ \text{παράγει} \\ \text{τον} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_6 \to c_6 - (1/6)c_2 \\ c_4 \to c_4 - (1/3)c_2 \\ \text{παράγει τον} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} c_5 \to c_5 - 2c_1 \\ c_4 \to c_4 - 4c_1 \\ \text{παράγει τον} \end{matrix} \qquad B = \begin{pmatrix} ① & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ⑥ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ⑧ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.4 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$, ο γενικός διανυσματικός χώρος

> Τώρα τυχαίνουν στιγμές που ξέρω πως αν δουλέψω πολύ, αν επιμείνω χωρίς υποχωρήσεις στη στερεότητα που θέλω, θα μπορέσω να κάνω κάτι, τουλάχιστο παστρικό. Βλέπω πως η βιασύνη είναι ο πιο απατηλός συμβουλάτορας, πως η υπομονή βλάφτει μόνο τα επιπόλαια έργα.
>
> *Γ. Σεφέρης, Μέρες 15/8/1926*

Ξεκινάμε με τον $\mathbb{R}^n$, έναν από τους απλούστερους διανυσματικούς χώρους. Αποτελείται από τις n-άδες $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ πραγματικών αριθμών. Τις ονομάζουμε **διανύσματα** και τις συμβολίζουμε με

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

Οι αριθμοί $\{x_1, \dots, x_n\}$ ονομάζονται **κανονικές** ή **φυσικές** ή **συνήθεις συνεταγμένες** του X. Ισότητα διανυσμάτων σημαίνει ισότητα των συντεταγμένων τους:

$$X = Y \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2 \ , \ \dots \ , \ x_n = y_n \ .$$

Ορίζουμε την **πρόσθεση** και τον **πολλαπλασιασμό** διανύσματος με αριθμό (λέμε συχνά **βαθμωτό**):

$$X + Y = (x_1 + y_1 \ , \ x_2 + y_2 \ , \ \dots \ , \ x_n + y_n) \ ,$$
$$\lambda X = (\lambda x_1 \ , \ \lambda x_2 \ , \ \dots \ , \ \lambda x_n) \ .$$

Επαληθεύονται άμεσα οι επόμενες ιδιότητες αυτών των πράξεων:

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΔΟΜΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΎ ΧΩΡΟΥ :

1. $X, Y \in \mathbb{R}^n$ συνεπάγεται την $X + Y \in \mathbb{R}^n$.
2. $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$. (προσεταιριστική ιδιότητα)

3. $X + Y = Y + X$. (μεταθετική ιδιότητα)
4. $O = (0, \dots, 0)$ ικανοποιεί: $O + X = X + O = X$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$.
5. $-X = (-x_1, \dots, -x_n)$ ικανοποιεί: $-X + X = X + (-X) = O$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$.
6. $\lambda \in \mathbb{R}$ και $X \in \mathbb{R}^n$ συνεπάγεται $\lambda X \in \mathbb{R}^n$.
7. $(\lambda + \mu)X = \lambda X + \mu Y$.
8. $\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y$.
9. $\lambda(\mu X) = (\lambda\mu)X$.
10. $1X = X$.

Έχοντας αυτές τις ιδιότητες σαν οδηγό, ορίζουμε την έννοια του γενικότερου **διανυσματικού χώρου υπεράνω του** $\mathbb{R}$ ή πραγματικού διανυσματικού χώρου ή $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου να είναι ένα μη-κενό σύνολο V τα στοιχεία του οποίου $X \in V$, ονομάζουμε **διανύσματα** και τα οποία ικανοποιούν τυπικά τις παραπάνω ιδιότητες. Η μόνη ουσιαστική διαφορά εμφανίζεται στις ιδιότητες (αξιώματα): 4 και 5. Αυτές πρέπει να αντικατασταθούν με τις επόμενες:

4. Υπάρχει ένα ειδικό διάνυσμα $O \in V$ με την ιδιότητα $O + X = X + O$ για κάθε $X \in V$.
5. Για κάθε $X \in V$ υπάρχει ένα διάνυσμα $-X \in V$ με την ιδιότητα $-X + X = X + (-X) = O$ για κάθε $X \in V$.

Το O λέγεται **μηδενικό διάνυσμα** του V και το $-X$ λέγεται **αντίθετο** ή **αρνητικό** του X.

Άσκηση 1.4.1. *Δείξε ότι το σύνολο V των λύσεων $(x_1, \dots, x_n)$ ενός ομογενούς συστήματος με m εξισώσεις και n αγνώστους συγκροτεί ένα διανυσματικό χώρο (που είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$).*

Άσκηση 1.4.2. *Δείξε ότι το σύνολο των $m \times n$ πινάκων είναι διανυσματικός χώρος με πρόσθεση και πολλαπλασιασμό αντίστοιχα:*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι το ευρύτερο σύνολο στο οποίο περιέχονται οι λύσεις του συστήματος (1.1). Όταν το σύστημα είναι *ομογενές*, τότε, σύμφωνα με την άσκηση 1.4.1, το σύνολο W όλων των λύσεων είναι ένα μη-κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που ταυτόχρονα είναι και διανυσματικός χώρος. Τέτοια υποσύνολα του R^n ονομάζονται **διανυσματικοί υπόχωροι** ή απλά **υπόχωροι** του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.4.1. Γενικότερα, ονομάζουμε **διανυσματικό υπόχωρο** του διανυσματικού χώρου V ένα μη-κενό υποσύνολο $W \subset V$ του οποίου τα στοιχεία ικανοποιούν επίσης τα αξιώματα 1 έως 10 με τις ίδιες πράξεις του V.

Για παράδειγμα, το σύνολο $E = \{(x_1, x_2, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Άσκηση 1.4.3. *Δείξε ότι το μη-κενό υποσύνολο $W \subset V$ του διανυσματικού χώρου V είναι διανυσματικός υπόχωρος, τότε και μόνον τότε, όταν ικανοποιούνται οι δύο επόμενες ιδιότητες:*

1. *Για κάθε $X, Y \in W$ έπεται $X + Y \in W$. (το W είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση)*
2. *Γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $X \in W$ έπεται ότι το $\lambda X \in W$. (το W είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό)*

Άσκηση 1.4.4. *Δείξε ότι οι προηγούμενες δύο ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το W ως διανυσματικό υπόχωρος του V ισοδυναμούν με τη μία και μόνη ιδιότητα:*

$$\text{Για κάθε } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ και κάθε } X, Y \in W \text{ έπεται } \lambda X + \mu Y \in W.$$

Ακόμα γενικότεροι διανυσματικοί χώροι, που ικανοποιούν τα αξιώματα 1 έως 10, με την τροποποίηση των αξιωμάτων 4 και 5 που κάναμε παραπάνω, ορίζονται και για πολλαπλασιασμό με βαθμωτά (=αριθμοί) διαφορετικά των πραγματικών αριθμών. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών έχει τη δομή **σώματος** (ορισμός 7.2.1) ([4, p.38]) και στην άλγεβρα μαθαίνουμε ότι υπάρχουν πολλά και διάφορα *σώματα* περιέχοντα είδη αριθμών που μπορούν να προστεθούν, να πολλαπλασιασθούν, που έχουν μία μονάδα 1 και ένα μηδέν 0 και μπορούν να διαιρεθούν x/y για $y \neq 0$. Τέτοια παραδείγματα είναι το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, και το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών. Παίρνοντας ένα τέτοιο σώμα $\mathbb{F}$ ορίζουμε, κατ' αναλογίαν με το $\mathbb{R}^n$, το σύνολο

$$\mathbb{F}^n = \text{ όλων των n-άδων } (x_1, \dots, x_n) \text{ του } \mathbb{F}. \tag{1.12}$$

Τούτος είναι ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος, δηλ. ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο τα βαθμωτά είναι αριθμοί από το $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1.4.2. Γενικότερα, ονομάζουμε **$\mathbb{F}$-διανυσματικό** χώρο ή **διανυσματικό χώρο υπεράνω του σώματος** $\mathbb{F}$ ένα μη-κενό σύνολο V που ικανοποιεί τα αξιώματα 1 έως 10 με τα τροποποιημένα αξιώματα 4,5, και στο οποίο ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτά γίνεται με αριθμούς από το $\mathbb{F}$.

Ειδικές περιπτώσεις (1.12) είναι (i) ο $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{Q}^n$, (ii) ο $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ και (iii) οι K-διανυσματικοί χώροι υπεράνω **πεπερασμένων σωμάτων**, π.χ. οι K^n που σ' αυτή την περίπτωση περιέχουν πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία (διανύσματα). Στο μάθημα θα χρησιμοποιούμε την έννοια του $\mathbb{F}$-*διανυσματικού χώρου* με το $\mathbb{F}$ να περιέχει άπειρα το πλήθος στοιχεία (ώστε να αποφεύγομε ορισμένες ανωμαλίες που συμβαίνουν όταν το $\mathbb{F}$ είναι πεπερασμένο). Ωστόσο τις περισσότερες φορές θα έχουμε κατά νου έναν $\mathbb{R}$- ή έναν μιγαδικό $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο.

Σημείωση 1.4.1. Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών που έως τώρα, σιωπηρά, υποθέσαμε για πραγματικούς αριθμούς (σώμα $\mathbb{R}$), η έννοια των κυρίων και δευτερευόντων στηλών, το θεώρημα 1.3.1 αναγωγής στον κλιμακωτό πίνακα και το θεώρημα 1.3.2 για τις λύσεις ομογενών και μη-ομογενών συστημάτων , γενικεύονται αυτολεξεί για πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι σε οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{F}$.

Ορισμός 1.4.3. Συμβολίζουμε με $M_{\mathbb{F}}(m, n)$ το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$.

Άσκηση 1.4.5. *Δείξε ότι το σύνολο $M_{\mathbb{F}}(m,n)$ είναι ένας $\mathbb{F}-$διανυσματικός χώρος.*

Ορισμός 1.4.4. Ένα ζευγάρι ειδικών πινάκων από το $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον: οι **διαγώνιοι πίνακες** που συμβολίζουμε με $diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ και ο **ταυτοτικός** πίνακας που συμβολίζουμε με I_n:

$$diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix} \quad \text{και} \quad I_n=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Και οι δύο έχουν μη-μηδενικά στοιχεία μόνο στην **κύρια διαγώνιο**, της οποίας τα στοιχεία είναι $\{a_{ii}=\lambda_i, i=1..n\}$. Στην περίπτωση του ταυτοτικού πίνακα όλα αυτά τα στοιχεία είναι 1.

Άσκηση 1.4.6. *Δείξε ότι οι μοναδικοί $n\times n$ κλιμακωτοί πίνακες τάξης n είναι οι διαγώνιοι $diag(p_1,\dots,p_n)$ με μη-μηδενικά $\{p_i, i=1..n\}$.*

Άσκηση 1.4.7. *Δείξε ότι το σύνολο $\mathbb{F}^\infty$ όλων των ακολουθιών $\{x_0,x_1,x_2,\dots\}$, με στοιχεία από το σώμα $\mathbb{F}$ είναι ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος.*

Σώματα $\mathbb{F}$ μπορεί να περιέχουν **υποσώματα**, δηλαδή υποσύνολα $\mathbb{F}'\subset\mathbb{F}$ τα οποία είναι αυτούσια σώματα ως προς τις πράξεις του $\mathbb{F}$ που τα περιέχει. Για παράδειγμα το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι ένα υπόσωμα του σώματος $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και το σώμα $\mathbb{R}$ είναι ένα υπόσωμα του σώματος $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.

Άσκηση 1.4.8. *Δείξε ότι ένα σώμα $\mathbb{F}$ είναι επίσης ένας $\mathbb{F}'$-διανυσματικός χώρος υπεράνω κάθε υποσώματος $\mathbb{F}'\subset\mathbb{F}$. Για παράδειγμα το $\mathbb{R}$ είναι ένας $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος, και το $\mathbb{C}$ είναι ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, καθώς επίσης και ένας $\mathbb{Q}$-διανυσματικός χώρος.*

Άσκηση 1.4.9. *Δείξε ότι αν ο V είναι ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος και $\mathbb{F}'\subset\mathbb{F}$ είναι ένα υπόσωμα του $\mathbb{F}$, τότε ο V είναι επίσης και ένας $\mathbb{F}'$-διανυσματικός χώρος. Για παράδειγμα, ο $\mathbb{C}^n$ είναι ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος, ταυτόχρονα όμως και ένας $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος, αφού τα στοιχεία του (διανύσματα) μπορούν να πολλαπλασιασθούν και με πραγματικούς αριθμούς, κτλ.*

Άσκηση 1.4.10. *Δείξε ότι το υποσύνολο $\mathbb{R}^\infty_0$ όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0 είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του χώρου $\mathbb{R}^\infty$ των ακολουθιών πραγματικών αριθμών.*

Άσκηση 1.4.11. *Δείξε ότι η τομή (ακόμη και απείρου πλήθους) διανυσματικών υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου V είναι επίσης ένας υπόχωρος του V. Ποιά είναι η τομή όλων των υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου;*

1.5 Γραμμικοί συνδυασμοί, ανεξαρτησία

Ή που θα φκιάσω ένα Σύστημα ή που θα
σκλαβωθώ στο Σύστημα ενός Άλλου.
Μήτε θα Κρίνω μήτε θα Συγκρίνω:
Δουλειά μου είναι να Δημιουργώ.

W. Blake, Ιερουσαλήμ

Ορισμός 1.5.1. **Γραμμικό συνδυασμό** ενός υποσυνόλου $\mathbf{a}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V, ονομάζουμε ένα διάνυσμα $X \in V$ που μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$X = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k \quad \text{με} \quad \lambda_i \in \mathbb{F} \quad \text{και} \quad A_i \in \mathbf{a} \quad \text{για} \quad i = 1..k\,. \tag{1.13}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι για το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών (1.13) αυτών των διανυσμάτων από το σύνολο $\mathbf{a}$ ισχύουν τα αξιώματα του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου. Τον διανυσματικό αυτό χώρο , που είναι επίσης υπόχωρος του V, συμβολίζουμε με

$$\langle \mathbf{a} \rangle \tag{1.14}$$

και ονομάζουμε **(υπόχωρο) παραγόμενο** από το υποσύνολο $\mathbf{a}$ του V.

Για παράδειγμα, ο παραγόμενος υπόχωρος ενός μοναδικού διανύσματος X ταυτίζεται με το σύνολο των πολλαπλασίων του $\{\lambda X, \lambda \in \mathbb{F}\}$.

Ένα άλλο παράδειγμα, ορίζεται από το σύνολο διανυσμάτων $\{E_i \in \mathbb{R}^n, i = 1..n\}$ που έχουν 1 στην i-θέση και 0 σ' όλες τις άλλες θέσεις και ονομάζεται **κανονική βάση** του $\mathbb{R}^n$:

$$E_1 = (1, 0, \ldots, 0) \;\;,\;\; E_2 = (0, 1, \ldots, 0) \;\;,\;\; \ldots \;\;,\;\; E_n = (0, \ldots, 0, 1)\,.$$

Ο παραγόμενος εξ αυτών χώρος είναι όλο το $\mathbb{R}^n$, αφού κάθε $X = (x_1, \ldots, x_n)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός:

$$X = \sum_i x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ορισμός 1.5.2. Τα διανύσματα $\{A_1, \ldots, A_n\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V ονομάζονται (γραμμικά) **ανεξάρτητα**, όταν ισχύει η συνθήκη (ανεξαρτησίας)

$$\text{δηλαδή η} \quad \sum_i \lambda_i A_i = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_n A_n = O \tag{1.15}$$

να συνεπάγεται την $\{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\}$. Εάν η εξίσωση 1.15 ικανοποιείται από κάποια μη-μηδενικά $\{\lambda_i\}$, τότε τα διανύσματα $\{A_1, \ldots, A_n\}$ λέγονται (γραμμικά) **εξαρτημένα**.

Το υποσύνολο $\mathbf{a} \subset V$ λέγεται **ανεξάρτητο** όταν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathbf{a}$ είναι ανεξάρτητο. Διαφορετικά λέγεται **εξαρτημένο**.

Για παράδειγμα, τα διανύσματα $\{(2, 4), (5, 10) \in \mathbb{R}^2\}$ είναι εξαρτημένα, αφού $2(5, 10) - 5(2, 4) = (0, 0)$.

Από τον ορισμό έπεται ό,τι:

$$\left.\begin{array}{c}\text{τα διανύσματα}\\ \{A_1,\dots,A_n\}\\ \text{είναι εξαρτημένα}\end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c}\text{η εξίσωση}\\ \lambda_1 A_1+\cdots+\lambda_n A_n=O\\ \text{έχει μιά λύση διαφορετική της \textbf{τετριμμένης}:}\\ \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0.\end{array}\right.$$

Στην περίπτωση που $V=\mathbb{R}^m$ μπορούμε να διαπιστώσουμε την *ανεξαρτησία* των $\{A_1,\dots,A_n\}$ λύνοντας ένα γραμμικό ομογενές σύστημα. Πράγματι, γράφοντας τις συντεταγμένες των $\{A_i\}$ σε στήλες έχουμε:

$$\text{για } A_i=\begin{pmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ \vdots\\ a_{mi}\end{pmatrix},\ O=\sum_i \lambda_i A_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\cdots+\lambda_n a_{1n}=0,\\ \lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_n a_{2n}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_1 a_{m1}+\lambda_2 a_{m2}+\cdots+\lambda_n a_{mn}=0.\end{array}\right.$$

Εάν το σύστημα έχει μόνο την **τετριμμένη** λύση $\{\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0\}$, τότε τα διανύσματα είναι ανεξάρτητα. Διαφορετικά, είναι εξαρτημένα. Κατ' αναλογίαν, το ερώτημα: **πότε** και **με πόσους τρόπους** μπορούμε να γράψουμε το $B\in\mathbb{R}^m$ σαν γραμμικό συνδυασμό των $\{A_i\in\mathbb{R}^m, i=1..n\}$, οδηγεί στην αναζήτηση λύσης του συστήματος:

$$\begin{array}{c}\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{12}+\cdots+\lambda_n a_{1n}=b_1,\\ \lambda_1 a_{21}+\lambda_2 a_{22}+\cdots+\lambda_n a_{2n}=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \lambda_1 a_{m1}+\lambda_2 a_{m2}+\cdots+\lambda_n a_{mn}=b_m.\end{array}$$

Παράδειγμα 1.5.1. Εξέτασε εάν το διάνυσμα $(3,2,1,5)\in\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{(1,2,3,3),(1,2,0,3),(1,1,1,2)\}$.

Γράφοντας τα διανύσματα ως στήλες, πρέπει να λύσουμε το σύστημα ως προς $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\\5\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c}\lambda_1 1+\lambda_2 1+\lambda_3 1=3,\\ \lambda_1 2+\lambda_2 2+\lambda_3 1=2,\\ \lambda_1 3+\lambda_2 0+\lambda_3 1=1,\\ \lambda_1 3+\lambda_2 3+\lambda_3 2=5.\end{array}$$

Λύνουμε το σύστημα κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και ανάγοντάς το

σε κλιμακωτή μορφή:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \\ r_4 \to r_4 - 3r_1 \\ \text{προκύπτει} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ \text{προκύπτει} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_4 \to r_4 - r_3 \\ \text{προκύπτει} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_2 \to r_2 - 2r_3 \\ r_1 \to r_1 + r_3 \\ \text{προκύπτει} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_1 \to r_1 + (1/3)r_2 \\ \text{προκύπτει} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x_1 = & -1, \\ x_2 = & 0, \\ x_3 = & 4. \end{array}\right.$$

Άσκηση 1.5.1. *Εξέτασε αν το διάνυσμα* $B = (0,0,0,1)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων* $(1,2,3,3)$, $(1,2,0,3)$ *και* $(1,1,1,2)$.

Υπόδειξη: Σημείωσε ότι τα διανύσματα είναι τα ίδια με αυτά του παραδείγματος και η αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή γίνεται με τις ίδιες πράξεις γραμμών, οι οποίες παράγουν τον ίδιο μη-επαυξημένο πίνακα χωρίς να επηρεάζουν το B. Εφάρμοσε το θεώρημα 1.1.2 για να συμπεράνεις ότι το B δεν είναι γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων.

Άσκηση 1.5.2. *Για τα διανύσματα* $\{A_1, \dots, A_n\}$ *του* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *εξήγησε το νόημα και απόδειξε τις ισότητες των παραγομένων χώρων:*

$$\langle A_1, \dots, A_n \rangle \;=\; \langle A_1, \dots, A_{i-1}, A_i + A_j, A_{i+1}, \dots, A_n \rangle = \langle A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n \rangle \;,$$

γιά κάθε $i,j = 1, .., n$ *και κάθε* $0 \neq \lambda \in F$.

Υπόδειξη: Νόημα: στον παραγόμενο χώρο μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα μέσω του αθροίσματός του με ένα άλλο εξ αυτών χωρίς να αλλοιώσουμε τον παραγόμενο. Επίσης αντικατάσταση οποιουδήποτε διανύσματος με ένα μη-μηδενικό πολλαπλάσιό του δεν αλλοιώνει τον παραγόμενο.

Άσκηση 1.5.3. *Έστω* $\{A_1, \dots, A_n, B\}$ *τα διανύσματα of* $\mathbb{R}^m$ *με συντεταγμένες τις στήλες του πίνακα του συστήματος* (1.1). *Δείξε ότι το σύστημα αυτό είναι επιλύσιμο όταν ακριβώς το* $B \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$.

Άσκηση 1.5.4. *Έστω* $A_1 = (1,2,3,4,5), A_2 = (1,0,1,0,5), A_3 = (0,1,1,1,0)$ *και* $B_1 = (0,1,0,1,1)$, $B_2 = (0,2,1,0,1), B_3 = (1,0,0,0,1)$. *Βρες την τομή των δύο παραγομένων υποχώρων* $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle \cap \langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ *λύνοντας την εξίσωση*

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = y_1 B_1 + y_2 B_2 + y_3 B_3,$$

που οδηγεί στο ομογενές σύστημα με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Επαλήθευσε ότι η τομή αυτή συμπίπτει με του παραγόμενο $\langle A_1 - A_2 - 3A_3 \rangle$ *καθώς επίσης και με του* $\langle B_1 - B_2 \rangle$.

Άσκηση 1.5.5. *Εξέτασε ως προς την ανεξαρτησία τους τα διανύσματα*

$$\{(1,1,1,1,0),(1,0,2,0,0),(1,1,0,0,1)\}.$$

Δες κατόπιν αν το $(1,1,3,1,1)$ *είναι ένας γραμμικός συνδυασμός τους.*

Άσκηση 1.5.6. *Δείξε ότι το* $\mathbb{R}$ *είναι ένας* $\mathbb{Q}$*-διανυσματικός χώρος στον οποίο τα διανύσματα* $1 \in \mathbb{R}$ *και* $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ *είναι ανεξάρτητα.*

Άσκηση 1.5.7. *Δείξε ότι τα διανύσματα* $\{A_1, \dots, A_n\}$ *του* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *είναι ανεξάρτητα, όταν κάθε* X *από του παραγόμενο* $X \in \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ *γράφεται ως συνδυασμός* $X = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n$ *με ένα και μοναδικό τρόπο.*

Άσκηση 1.5.8. *Δείξε ότι τα διανύσματα* $\{A_1, \dots, A_n\}$ *του* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *είναι εξαρτημένα, όταν ακριβώς κάποιο απ' αυτά γράφεται ως συνδυασμός των υπολοίπων.*

Σαφώς ό,τι είπαμε για συστήματα εξισώσεων, αναγωγή σε κλιμακωτούς πίνακες, λύσεις συστημάτων κτλ. εργαζόμενοι με πραγματικούς αριθμούς, γενικεύεται αυτολεξεί και για αριθμούς από οποιοδήποτε σώμα $\mathbb{F}$. Οι $m \times 1$ πίνακες με στοιχεία από το $\mathbb{F}$ δηλ. πίνακες από το $M_{\mathbb{F}}(m,1)$ λέγονται **στηλοδιανύσματα**. Οι $1 \times n$ πίνακες, δηλ. στοιχεία του $M_{\mathbb{F}}(1,n)$ λέγονται **γραμμοδιανύσματα**. Ένας $m \times n$ πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ ορίζει με τις στήλες του n στηλοδιανύσματα και m γραμμοδιανύσματα.

Άσκηση 1.5.9. *Δείξε ότι οι κύριες στήλες ενός κλιμακωτού πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ *είναι ανεξάρτητα στηλοδιανύσματα και οι δευτερεύουσες στήλες του* A *είναι γραμμικοί συνδυασμοί των κυρίων στηλοδιανυσμάτων.*

Υπόδειξη: Συμβολίζοντας με $\{p_1, \dots, p_k\}$ τους οδηγούς, δες ότι η συνθήκη εξάρτησης για τις κύριες στήλες $\{c_{i_1}, \dots, c_{i_k}\}$: $x_1 c_{i_1} + \cdots + x_k c_{i_k} = 0$ ισοδυναμεί με την: $x_1 p_1 = \cdots = x_k p_k = 0$. Δες επίσης ότι για κάθε δευτερεύουσα στήλη c_j, η εξίσωση $x_1 c_{i_1} + \cdots + x_k c_{i_k} = c_j$ έχει μια λύση.

Άσκηση 1.5.10. *Δείξε ότι οι πρώτες* k *γραμμές του κλιμακωτού πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ *τάξης* k *είναι ανεξάρτητα γραμμοδιανύσματα.*

Υπόδειξη: Η συνθήκη εξάρτησης για τα γραμμοδιανύσματα οδηγεί πάλι στην

$$x_1 p_1 = \cdots = x_k p_k = 0.$$

Θεώρημα 1.5.1. *Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ *δεν αλλοιώνουν την ανεξαρτησία/εξάρτηση ενός υποσυνόλου των στηλοδιανυσμάτων του.*

Απόδειξη. Αυτό σημαίνει, ότι αν ο πίνακας B προκύπτει από τον A μέσω στοιχειωδών πράξεων γραμμών, τότε ένα υποσύνολο στηλοδιανυσμάτων $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_k}\}$ του B είναι εξαρτημένα/ανεξάρτητα τότε ακριβώς όταν τα στηλοδιανύσματ $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ του A είναι εξαρτημένα/ανεξάρτητα. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι οι εξισώσεις

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = 0 \quad \text{και} \quad x_1 B_1 + \cdots + x_n B_n = 0\ ,$$

βάζοντας $x_j = 0$ για $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις. □

Πόρισμα 1.5.1. *Ορισμένα στηλοδιανύσματα του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ είναι ανεξάρτητα, τότε ακριβώς, όταν τα αντίστοιχα αυτών στηλοδιανύσματα του κλιμακωτού πίνακα είναι ανεξάρτητα.*

Πόρισμα 1.5.2. *Οι κύριες στήλες $\{A_{n_1}, \dots, A_{n_k}\}$ ενός πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ τάξης k είναι ανεξάρτητες και κάθε μια από τις δευτερεύουσες είναι γραμμικός συνδυασμός των κυρίων στηλών.*

Θεώρημα 1.5.2. *Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ τάξης k έχει ακριβώς: k το πλήθος οδηγούς $\{p_1, \dots, p_k\}$, k ανεξάρτητες στήλες και k ανεξάρτητες γραμμές.*

Απόδειξη. Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί έπονται από το πόρισμα 1.5.1, την άσκηση 1.5.9 και τον ορισμό της τάξης. Ο ισχυρισμός για τις γραμμές έπεται από την αναγωγή του πίνακα σε κλιμακωτή μορφή. Σ' αυτή την διαδικασία ή εναλλάσσουμε δύο γραμμές: $r_i \leftrightarrow r_j$, που προφανώς δεν αλλάζει την ανεξαρτησία των γραμμών, η αντικαθιστούμε μια γραμμή: $r_i \to r_i + \lambda r_j$. Το οποίο πάλι δεν αλλάζει την ανεξαρτησία των γραμμών. Πράγματι, αν $\{r_1, \dots, r_k\}$ είναι ανεξάρτητες γραμμές $\lambda \neq 0$, τότε

$$\begin{gathered}
x_1 r_1 + \cdots + x_k r_k = O \;\Rightarrow\; x_1 = \cdots = x_k = 0 \quad \text{και} \\
y_1 r_1 + \cdots + y_i(r_i + \lambda r_j) + \cdots + y_j r_j + \cdots + y_k r_k = O \quad \Rightarrow \\
y_1 r_1 + \cdots + y_i r_i + \cdots + (y_i \lambda + y_j) r_j + \cdots + y_k r_k = O \quad \Rightarrow \\
y_s = 0 \quad \text{for} \quad s \neq j \quad \text{και} \quad y_i \lambda + y_j = 0 \quad \text{λόγω ανεξαρτησίας των} \quad \{r_1, \dots, r_k\} \;\Rightarrow \\
y_1 = \cdots = y_k = 0 \quad \text{που δείχνει την ανεξαρτησία των} \quad \{r_1, \dots, r_i + \lambda r_j, \dots, r_k\}.
\end{gathered}$$

Στη διαδικασία αναγωγής σε κλιμακωτή μορφή χρησιμοποιούμε τέτοιες πράξεις $\{r_i \to r_i + \lambda r_j\}$ and $\{r_i \leftrightarrow r_j\}$ για να σχηματίσουμε τα πρώτα k γραμμοδιανύσματα που φέρουν τους οδηγούς του πίνακα. Αυτά, κατά την άσκηση 1.5.10 είναι ανεξάρτητα, ενώ τα τελευταία γραμμοδιανύσματα μηδενίζονται. Κάνοντας διαδοχικά τις αντίστροφες πράξεις και πηγαίνοντας πίσω, από την κλιμακωτή μορφή στον αρχικό πίνακα A, βλέπουμε ότι έχει k ακριβώς ανεξάρτητα διανύσματα. □

Πόρισμα 1.5.3. *Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ έχει ανεξάρτητα στηλοδιανύσματα, τότε ακριβώς, όταν ο αντίστοιχος κλιμακωτός πίνακας* **δεν** *έχει δευτερεύουσες στήλες.*

Άσκηση 1.5.11. *Δείξε ότι $k < n$ ανεξάρτητα διανύσματα $\{A_1, \dots, A_k \in \mathbb{F}^n\}$ ορίζουνε τις στήλες ενός $n \times k$ πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{k2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \textit{που μετατρέπεται} \\ \textit{μέσω πράξεων γραμμών} \\ \textit{στον κλιμακωτό} \\ \textit{πίνακα} \end{matrix} \quad B = \left(\begin{array}{cccc} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & p_k \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right),$$

όπου $\{p_1, \dots, p_k\}$ είναι οι οδηγοί του A. Ειδικά, για $k = n$ και n ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{F}^n$ ο κλιμακωτός πίνακας είναι διαγώνιος: $B = diag(p_1, \dots, p_n)$.

Υπόδειξη: Ο $n \times k$ πίνακας B, λόγω της ανεξαρτησίας των στηλών του A, έχει αποκλειστικά και μόνο κύριες στήλες και οι τελευταίες $m = n - k$ γραμμές αποτελούνται από μηδενικά.

Πόρισμα 1.5.4. *Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ με $m < n$ έχει αναγκαστικά στηλοδιανύσματα που είναι εξαρτημένα.*

Πράγματι, αφού στον κλιμακωτό πίνακα δεν μπορούν να υπάρχουν περισσότερες από m κύριες στήλες (οι οδηγοί τους πρέπει να είναι σε διαφορετικές γραμμές) και ο κλιμακωτός πίνακας περιέχει τουλάχιστον $n-m$ δευτερεύουσες στήλες.

Άσκηση 1.5.12. *Δείξε ότι στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{F}^n$ δεν υπάρχουν περισσότερα από n ανεξάρτητα διανύσματα.*

Υπόδειξη: Γράψε $n+k$ διανύσματα του $\mathbb{F}^n$ σαν στήλες πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n+k)$ και εφάρμοσε το προηγούμενο πόρισμα.

Άσκηση 1.5.13. *Δείξε ότι αν τα διανύσματα $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι ανεξάρτητα, τότε και κάθε $k < n$ εξ αυτών είναι ανεξάρτητα. Ένα είδος αντιστρόφου είναι το εξής: Εάν αυτά τα διανύσματα $\mathbf{a}$ είναι εξαρτημένα, τότε και κάθε σύνολο διανυσμάτων που τα περιέχει είναι επίσης εξαρτημένο.*

Άσκηση 1.5.14. *Δείξε ότι ο παραγόμενος χώρος $\langle \mathbf{a} \rangle$ ενός συνόλου διανυσμάτων του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V ισούται με την τομή όλων των διανυσματικών υποχώρων $W \subset V$ που περιέχουν το $\mathbf{a}$.*

Σημείωση 1.5.1. Παρατηρούμε, ότι δοθέντος πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$, ή άσκηση 1.5.2 δείχνει, ότι οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, ενώ μεταβάλλουν τις m γραμμές $\{r_1, \dots, r_m \in \mathbb{F}^n\}$, δεν αλλοιώνουν εν τούτοις τον παραγόμενο από αυτές υπόχωρο $\langle r_1, \dots, r_m \rangle$. Αυτός παραμένει αναλλοίωτος καθ' όλη την διάρκεια της αναγωγής στον κλιμακωτό πίνακα. Έτσι, οι μη-μηδενικές γραμμές $\{r'_1, \dots, r'_k\}$ του κλιμακωτού πίνακα που προκύπτει, όπου k η τάξη του A, έχουν τον ίδιο παραγόμενο με αυτόν των γραμμών του A:

$$\langle r_1, \dots, r_m \rangle \;=\; \langle r'_1, \dots, r'_k \rangle \,.$$

Ωστόσο, οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών όντως μεταβάλλουν τον παραγόμενο από τα στηλοδιανύσματα $\{c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}^m\}$ χώρο, παρόλο που διατηρούν τη διάστασή του. Αυτό το διαπιστώνουμε αμέσως σε απλά παραδείγματα:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{με} \\ \text{κλιμακωτό} \\ \text{πίνακα} \end{matrix} \quad B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Η επίδραση των στοιχειωδών πράξεων γραμμών πάνω στις στήλες δεν αλλοιώνει την εξάρτηση ή ανεξαρτησία τους, όπως φαίνεται στους παραπάνω πίνακες A and B. Στο παράδειγμα, η τρίτη στήλη και στους δύο πίνακες γράφεται σαν συνδυασμός $c_3 = 2c_2 - c_1$. Ωστόσο οι παραγόμενοι υπόχωροι από τις στήλες των δύο πινάκων είναι διαφορετικοί $\langle c_1, c_2 \rangle \neq \langle c'_1, c'_2 \rangle$ (γιατί;)

1.6 Βάση και διάσταση

Δεν ξέρει τίποτα, και νομίζει ότι τα ξέρει όλα. Αυτό δείχνει σαφώς κατεύθυνση πολιτικής καριέρας.

G.B. Shaw, Major Barbara

Ορισμός 1.6.1. **Βάση** ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V λέγεται ένα υποσύνολο $\mathbf{u} \subset V$ μέσω του οποίου *κάθε* $A \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός κάποιων $\{U_1, \dots, U_n\}$ από το $\mathbf{u}$:

$$A = x_1 U_1 + \cdots + x_n U_n \quad \text{με ένα και μοναδικό τρόπο.}$$

Οι μονοσήμαντα ορισμένοι αριθμοί $\{x_i \in \mathbb{F}, i = 1..n\}$ λέγονται **συντεταγμένες του A ως προς τη βάση $\mathbf{u}$**.

Ορισμός 1.6.2. Τα διανύσματα $\{E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), i = 1..n\}$ του $\mathbb{F}^n$ με 1 στην i-στή συντεταγμένη και 0 στις υπόλοιπες, ορίζουν την **κανονική** ή **φυσική** ή **συνήθη** βάση $\mathbf{e}$ και τις αντίστοιχες **κανονικές** ή **φυσικές** ή **συνήθεις** συντεταγμένες του $\mathbb{F}^n$, αφού κάθε $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$X = x_1 E_1 + \cdots + x_n E_n .$$

Λήμμα 1.6.1. *Κάθε πεπερασμένο υποσύνολο μιας βάσης* $\mathbf{u}$ *ενός* $\mathbb{F}$*- διανυσματικού χώρου* V *αποτελείται από ανεξάρτητα διανύσματα.*

Απόδειξη. Προφανώς, αν τα διανύσματα $\{U_1, \dots, U_n \in \mathbf{u}\}$ ήταν εξαρτημένα, τότε η εξίσωση

$$X = x_1 U_1 + \cdots + x_n U_n = O$$

θα είχε εκτός από την τετριμμένη λύση $x_1 = \cdots = x_n = 0$ και μία δεύτερη, και θα είχαμε δύο παραστάσεις του $X = O$ ως γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων της βάσης, πράγμα που αντιφάσκει στον ορισμό της βάσης. □

Λήμμα 1.6.2. *Το υποσύνολο* W *του* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *είναι βάση του* V*, όταν ακριβώς είναι ανεξάρτητο και μέγιστο, δηλ. δεν υπάρχει άλλο ανεξάρτητο υποσύνολο* W' *του* V *περιέχον το* W*.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν το W είναι βάση του V, τότε $\langle W \rangle = V$. Συνεπώς δεν υπάρχει διάνυσμα του V που δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του W. Έτσι, το W είναι μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο. Αντίστροφα, αν το W είναι μέγιστο ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε κάθε $X \in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του W, διαφορετικά το $W' = W \cup \{X\}$ θα ήταν μεγαλύτερο ανεξάρτητο υποσύνολο από το W, μια αντίφαση. □

Οι $\mathbb{F}$-διανυσματικοί χώροι διαιρούνται σε δύο κατηγορίες: Αυτούς που έχουν μια *πεπερασμένη* βάση, και αυτούς που έχουν μια *άπειρη* βάση. Σ' αυτό το σημείο δεχόμαστε χωρίς απόδειξη ότι:

Κάθε διανυσματικός χώρος έχει μια βάση.

Αυτό μπορεί ν' αποδειχθεί με τη βοήθεια του λήμματος του *Zorn* της συνολοθεωρίας ([3, vol. I, p.524]). Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{F}^n$. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι χώροι των ακολουθιών $\mathbb{F}^\infty$, οι χώροι $\mathbb{F}[x]$ των πολυωνύμων μιας μεταβλητής με συντελεστές από το σώμα $\mathbb{F}$, γενικότεροι χώροι συναρτήσεων κτλ.

Σ' αυτά τα μαθήματα ασχολούμεθα κυρίως με διανυσματικούς χώρους της πρώτης κατηγορίας, δηλ. χώρους που έχουν μια **πεπερασμένη** βάση.

Θεώρημα 1.6.1. *Εάν μια βάση του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V έχει n στοιχεία, τότε και κάθε άλλη βάση του V θά έχει επίσης n στοιχεία. Τον αριθμό n ονομάζουμε* **διάσταση** *του V και συμβολίζουμε με $dim(V)$.*

Απόδειξη. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο βάσεις $\{A_j, i = 1..n\}$ και $\{B_i, i = 1..k\}$ με $k > n$. Γράφουμε τα $\{B_i\}$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των $\{A_j\}$:

$$B_i = c_{1i}A_1 + \cdots + c_{ni}A_n \quad \text{για} \quad i = 1..k\ .$$

$$\text{Τότε η σχέση εξάρτησης είναι:} \quad x_1B_1 + \cdots + x_kB_k = O \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ji}A_j \right) = O \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} c_{ji}x_i \right) A_j = O \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1k}x_k &= 0, \\ c_{21}x_1 + \cdots + c_{2k}x_k &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nk}x_k &= 0. \end{aligned}$$

Το τελευταίο σύστημα προκύπτει από την προηγούμενη απ' αυτό εξίσωση, επειδή τα $\{A_j, j = 1..n\}$ είναι ανεξάρτητα. Το σύστημα αυτό, εν τούτοις, έχει πάντοτε μη-τετριμμένες λύσεις, λόγω του ότι $k > n$ (πόρισμα 1.5.4). Αυτό δείχνει ότι τα διανύσματα $\{B_i, i = 1..k\}$ είναι εξαρτημένα. Μια αντίφαση. Παρόμοια δείχνουμε ότι η $k < n$ οδηγεί επίσης σε αντίφαση, συνεπώς η μόνη δυνατότητα είναι η $k = n$. □

Άσκηση 1.6.1. *Δείξε ότι στον χώρο των πινάκων $M_{\mathbb{F}}(m, n)$ το υποσύνολο των πινάκων $\{S_{ij}\}$ με 1 στη διασταύρωση της i-τής γραμμής και j-τής στήλης και μηδενικά σ' όλες τις άλλες θέσεις, αποτελούν μια βάση του $M_{\mathbb{F}}(m, n)$ και η διάστασή του είναι mn.*

Άσκηση 1.6.2. *Δείξε ότι στον $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο των πολυωνύμων $\mathbb{F}[x]$ το (άπειρο) υποσύνολο $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$ είναι μια βάση. Δείξε επίσης ότι το υποσύνολο των πολυωνύμων βαθμού μικρότερου ή ίσου με n είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{F}[x]$ διάστασης $n + 1$, ενώ το υποσύνολο των πολυωνύμων βαθμού n δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{F}[x]$.*

Άσκηση 1.6.3. *Στο χώρο $\mathbb{F}^\infty$ των ακολουθιών του $\mathbb{F}$ θεώρησε το σύνολο των ειδικών ακολουθιών $U = \{E_1, E_2, ...\}$ με $E_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$: 1 στην i-στή θέση και 0 σ' όλες τις άλλες θέσεις. δείξε ότι το U είναι ανεξάρτητο αλλά δεν αποτελεί βάση του $\mathbb{F}^\infty$.*

Άσκηση 1.6.4. *Σε συνέχεια της προηγούμενης άσκησης, δείξε ότι το υποσύνολο $\mathbb{F}_f^\infty \subset \mathbb{F}^\infty$ των* **πεπερασμένων** *ακολουθιών, δηλ. ακολουθιών που έχουν μόνο ένα*

πεπερασμένο πλήθος μη-μηδενικών όρων είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{F}^\infty$ *και το υποσύνολο* $U \subset \mathbb{F}^\infty$ *της προηγουμένης άσκησης είναι μια βάση του διανυσματικού χώρου* $\mathbb{F}^\infty_f$ *.*

Άσκηση 1.6.5. *Στον* $\mathbb{F}$*-διανυσματικό χώρο* V *πεπερασμένης διάστασης* n *θεώρησε ένα ανεξάρτητο υποσύνολο* $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_k\}$ *με* $k < n$*. Δείξε ότι υπάρχουν* $m = n - k$ *άλλα ανεξάρτητα διανύσματα* $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_m\}$ *έτσι ώστε τα* $\mathbf{a}$ *μαζί με τα* $\mathbf{b}$ *να αποτελούν βάση του* V*.*

Υπόδειξη: $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle \neq V$, διότι διαφορετικά τα $\mathbf{a}$ θα ήταν βάση του V. Υπάρχει λοιπόν κάποιο $B_1 \in V$ ανεξάρτητο από τα $\{A_i, i = 1..k\}$. Επανάλαβε το ίδιο βήμα με το $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a} \cup \{B_1\}$ που είναι ανεξάρτητο και πρόσθεσε σ' αυτό ένα ανεξάρτητο του $\mathbf{a}_1$ διάνυσμα B_2. Θεώρησε κατόπιν το $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1 \cup \{B_2\} = \mathbf{a} \cup \{B_1, B_2\}$ και κάνε παρόμοια βήματα προσθέτοντας διανύσματα $B_3, B_4, \dots, B_m$.

Σημείωση 1.6.1. Η τελευταία άσκηση προσφέρεται για μια βελτίωση της επιδεξιότητας εκτέλεσης στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές πινάκων. Πράγματι, στην περίπτωση $V = \mathbb{F}^n, k < n$ ανεξάρτητα διανύσματα $\{A_1, \dots, A_k\}$ ορίζουν τις στήλες ενός $n \times k$ πίνακα A, του οποίου ο κλιμακωτός πίνακας είναι (άσκηση 1.5.11):

$$A' = \begin{pmatrix} diag(p_1, \dots, p_k) \\ \hline O_{n-k,k} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \text{όπου ο } (n-k) \times k \text{ πίνακας} \\ O_{n-k,k} \text{ έχει παντού μηδενικά.} \end{array}$$

Για να δημιουργήσουμε τη συμπλήρωση των διανυσμάτων $\{A_1, \dots, A_n\}$ σε μια βάση, προσθέτουμε στον τελευταίο πίνακα $m = n - k$ τις στήλες ενός $n \times m$ πίνακα του οποίου του κάτω μέρος είναι ο **ταυτοτικός** $m \times m$ πίνακας $I_{m,m}$.

$$\begin{array}{c} \text{συμπληρώνοντας τον B} \\ \text{σε διαγώνιο} \\ n \times n \\ \text{κλιμακωτό πίνακα} \end{array} \qquad C = \left(\begin{array}{ccccc|c} p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & p_1 & & \vdots & \vdots & O_{k,m} \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \cdots & p_{k-1} & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & p_k & \\ \hline & & O_{m,k} & & & I_{m,m} \end{array}\right) .$$

Έχοντας αυτόν, εκτέλεσε τις αντίστροφες πράξεις γραμμών στον C απ' αυτές που εφαρμόσθηκαν στον A. Παίρνουμε τοτε έναν $n \times n$ πίνακα του οποίου οι πρώτες k στήλες συμπίπτουν με αυτές του A και οι υπόλοιπες m στήλες ορίζουν m διανύσματα $B_1, \dots, B_m$ που συμπληρώνουν τα $\{A_i, i = 1..k\}$ σε μια βάση. Το επόμενο παράδειγμα διασαφηνίζει αυτή τη διαδικασία.

Παράδειγμα 1.6.1. Συμπλήρωσε τα διανύσματα $\{A_1 = (0, 0, 1, 1), A_2 = (3, 2, 1, 0)\}$ σε μια βάση του $\mathbb{R}^4$.

$$\text{Σ' αυτή την περίπτωση } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\text{προκύπτει}}{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{προκύπτει}}{r_3 \to r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{προκύπτει}}{\substack{r_3 \to r_3 - (1/2)r_2 \\ r_4 \to r_4 - (3/2)r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B\,.$$

Οι αντίστροφες πράξεις σε αντίστροφη σειρά, με τις οποίες παίρνουμε την A από την B, εφαρμόζονται τώρα στον διαγώνιο πίνακα:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{παράγει}}{\substack{r_4 \to r_4 + (3/2)r_2 \\ r_3 \to r_3 + (1/2)r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{παράγει}}{r_3 \to r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{παράγει}}{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

Στον D οι δύο πρώτες στήλες είναι αυτές του A και δύο τελευταίες συμπληρώνουν τις πρώτες σε μια βάση (γιατί;)

Άσκηση 1.6.6. *Συμπλήρωσε τα διανύσματα* $\{A_1 = (1, 0, 4, 6), A_2 = (0, 2, 0, 1)\}$ *σε μια βάση του* $\mathbb{R}^4$.

1.7 Μηδενόχωρος, χώρος εικόνων

> «Επιστήμη» σημαίνει απλά το σύνολο όλων αυτών των συνταγών που πετυχαίνουν πάντα. Όλα τα υπόλοιπα είναι φιλολογία.
>
> *P. Valery, Moralités*

Η άσκηση 1.4.1 γενικεύεται εύκολα και αποδεικνύει ότι οι λύσεις ενός ομογενούς συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους, και αριθμούς λαμβανόμενους από το σώμα $\mathbb{F}$, είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος U του $\mathbb{F}^n$.

Ορισμός 1.7.1. **Μηδενόχωρο** ονομάζουμε τον υπόχωρο $U \subset \mathbb{F}^n$ όλων των λύσεων ενός $m \times n$ ομογενούς συστήματος. **Χώρο εικόνων** ή **εικονόχωρο** του ομογενούς συστήματος ονομάζουμε το σύνολο $U' \subset \mathbb{F}^m$ που παράγεται από τις στήλες του πίνακα του συστήματος.

Στην παράγραφο 1.3 είδαμε ότι η αναγωγή συστήματος σε μια ισοδύναμη κλιμακωτή μορφή επιτρέπει τη λύση του αρχικού συστήματος μέσω μιας απλής συνταγής που διατυπώνεται στο θεώρημα 1.1.1. Εδώ αναλύουμε αυτή την συνταγή και βγάζουμε κάποια συμπεράσματα για τη διάσταση του υποχώρου των λύσεων,

προσδιορίζοντας μια βάση του μηδενόχωρου $U \subset \mathbb{F}^n$ και μια βάση του εικονόχωρου $U' \subset \mathbb{F}^m$ του ομογενούς συστήματος.

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας A του ομογενούς συστήματος έχει *κύριες* στήλες στις θέσεις $\{n_1 < \cdots < n_r\}$, όπου r είναι η *τάξη* του πίνακα. Οι υπόλοιπες στήλες στις θέσεις $\{\nu_1 < \cdots < \nu_k\}$ είναι οι *δευτερεύουσες* στήλες και $r + k = n$. Από την συνταγή που αναφέραμε προηγουμένως, ξέρουμε ότι όλες οι λύσεις του συστήματος λαμβάνονται θέτοντας αυθαίρετες τιμές στις *δευτερεύουσες* μεταβλητές

$$x_{\nu_1} = \lambda_1 \ , \ x_{\nu_2} = \lambda_2 \ , \ \ldots \ , \ x_{\nu_k} = \lambda_k \ , \tag{1.16}$$

και λύνοντας κατόπιν το σύστημα σε κλιμακωτή μορφή ως προς τις *κύριες* μεταβλητές, δηλ. τους αγνώστους που αντιστοιχούν σε κύριες στήλες του πίνακα. Έτσι παίρνουμε τις λύσεις $\{X \in \mathbb{F}^n\}$ στη μορφή:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n_1} = s_{11}\lambda_1 + \cdots + s_{1k}\lambda_k, \\ x_{n_2} = s_{21}\lambda_1 + \cdots + s_{2k}\lambda_k, \\ \ldots \qquad\qquad \ldots \\ x_{n_r} = s_{r1}\lambda_1 + \cdots + s_{rk}\lambda_k. \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad X \ = \ \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \cdots + \lambda_k S_k, \tag{1.17}$$

όπου τα διανύσματα $\{S_i \in \mathbb{F}^n, i = 1..k\}$ έχουν (σκέψου το): 1 στη θέση ν_i, 0 μηδέν στις θέσεις $\nu_j, j \neq i$, και s_{ji} στις θέσεις n_j. Τα διανύσματα αυτά όχι μόνο *παράγουν* τον υπόχωρο όλων των λύσεων του ομογενούς συστήματος, αλλά είναι και ανεξάρτητα. Πράγματι η σχέση εξάρτησης

$$S = x_1 S_1 + \cdots + x_k S_k \ = \ 0 \ ,$$

εξετάζοντας τις συντεταγμένες του S στις θέσεις $\{\nu_1, \ldots, \nu_k\}$, συνεπάγεται τους μηδενισμούς $\{x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0\}$. Αυτό αποδεικνύει το επόμενο θεώρημα, που είναι θεμελιώδους σημασίας για ολόκληρη τη γραμμική άλγεβρα. Ο τελευταίος ισχυρισμός σ' αυτό το θεώρημα είναι συνέπεια του πορίσματος 1.5.1.

Θεώρημα 1.7.1. *Η διάσταση του μηδενόχωρου $U \subset \mathbb{F}^n$ ενός ομογενούς συστήματος με πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$, είναι $k = n - r$, όπου r είναι η τάξη του πίνακα A (και του αντίστοιχου κλιμακωτού). Επίσης το r είναι η διάσταση του εικονόχωρου $U' \subset \mathbb{F}^m$ που παράγεται από τις στήλες του A. Οι κύριες στήλες του A αποτελούν μια βάση του U'.*

Παράδειγμα 1.7.1. Ας προσδιορίσουμε μια βάση του εικονόχωρου $U' \subset \mathbb{R}^4$ και του μηδενόχωρου $U \subset \mathbb{R}^7$ του ομογενούς συστήματος με τον παρακάτω πίνακα A, και ας εκφράσουμε τις λύσεις του $\{S_i \in \mathbb{R}^7\}$, όπως στην απόδειξη του θεωρήματος.

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{έχει} \\ \text{κλιμακωτό} \\ \text{πίνακα:} \end{array} \quad B \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Η τάξη είναι $r = 4$ και οι λύσεις είναι προφανώς

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -x_5/2 \\ x_2 = -x_5/2 \\ x_3 = -x_5 - x_7 \\ x_4 = \quad x_5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} \text{με} \\ x_5 = \lambda_1, \\ x_6 = \lambda_2, \\ x_7 = \lambda_3 \\ \text{αυθαίρετα} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Τα τρία τελευταία διανύσματα $\{S_1, S_2, S_3\}$ αποτελούν μια βάση του μηδενόχωρου U του ομογενούς συστήματος. Η βάση του εικονόχωρου U' αποτελείται από τις πρώτες τέσσερις στήλες του A, που είναι ανεξάρτητες, καθώς οι αντίστοιχες στήλες στον κλιμακωτό πίνακα είναι ανεξάρτητες.

Σημείωσε ότι τα τρία διανύσματα $\{S_1, S_2, S_3\}$ παριστάνουν τις λύσεις του ομογενούς που παίρνουμε θέτοντας διαδοχικά

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 0, 0)\ , \ = (0, 1, 0) \ \text{ και } \ = (0, 0, 1)\ .$$

Οι συντεταγμένες καθενός απο τα διανύσματα $\{S_1, S_2, S_3\}$ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκφράσουμε τις δευτερεύουσες στήλες $\{A_5, A_6, A_7\}$ του A ως γραμμικούς συνδυασμούς των κυρίων στηλών $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ που παράγουν τον *εικονόχωρο* του πίνακα A. Για παράδειγμα, από το S_1 παίρνουμε

$$AS_1 = -\frac{1}{2}A_1 - \frac{1}{2}A_2 - A_3 + A_4 + A_5 = O \quad \Rightarrow \quad A_5 \ = \ \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 + A_3 - A_4\ .$$

Άσκηση 1.7.1. *Κάνε την ίδια δουλειά, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, για του πίνακα:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Προσδιόρισε γι' αυτόν του πίνακα το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\{B \in \mathbb{R}^4\}$ για τα οποία υπάρχει $X \in \mathbb{R}^7$ έτσι ώστε $AX = B$. Είναι αυτό ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^7$;

Θεώρημα 1.7.2. *Για του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$ το σύνολο των λύσεων του μη-ομογενούς συστήματος $AX = B$, με $B \in \mathbb{F}^m$ είναι μη κενό, όταν ακριβώς το B περιέχεται στον εικονόχωρο του A. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνολο των λύσεων είναι της μορφής $\{S + W = \{S + Y, Y \in W\}\}$, όπου W είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα, και S μια οποιαδήποτε λύση του μη-ομογενούς συστήματος.*

Αυτό δεν είναι παρά μια αναδιατύπωση, με τη βοήθεια των εννοιών αυτής της παραγράφου, του θεωρήματος 1.2.1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γραμμικοί μετασχηματισμοί

2.1 Γραμμικοί μετασχηματισμοί

Η κουλτούρα στις υψηλότερες μορφές της είναι ένα πολύ ευαίσθητο φυτό του οποίου η επιβίωση εξαρτάται από ένα περίπλοκο σύστημα συνθηκών. Σε κάθε εποχή συνηθίζει να ανθοφορεί μόνο σε λίγους τόπους.

A. Einstein, The World as I See it

Ορισμός 2.1.1. **Γραμμικός μετασχηματισμός** είναι μια απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μεταξύ δύο $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων που ικανοποιεί τη **συνθήκη γραμμικότητας**:

$$f(\lambda X + \mu Y) \;=\; \lambda f(X) + \mu f(Y) \quad \text{για κάθε} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{F} \quad \text{και κάθε} \quad X, Y \in V_1 \;.$$

Η συνθήκη (ιδιότητα) αυτή, εφαρμοζόμενη κατ' επανάληψη, συνεπάγεται τη διατήρηση των γραμμικών συνδυασμών

$$f(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) \;=\; \lambda_1 f(X_1) + \cdots + \lambda_n f(X_n) \;. \tag{2.1}$$

Η ιδιότητα αυτή επιτρέπει τον απ' ευθείας προσδιορισμό της *εικόνας* $f(X)$ εφόσον γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του X ως προς κάποια βάση $\{A_i, i = 1..n\}$ του V_1 :

$$X = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \quad \Rightarrow \quad f(X) = x_1 f(A_1) + \cdots + x_n f(A_n) \;.$$

Έχοντας υπολογίσει μια και μόνο φορά τις εικόνες $\{f(A_i), i = 1..n\}$ των διανυσμάτων μιας βάσης, η εικόνα $f(X)$ οποιουδήποτε διανύσματος υπολογίζεται μέσω των συντεταγμένων του X.

Το σύνολο *όλων* των γραμμικών μετασχηματισμών $\{f : V_1 \longrightarrow V_2\}$ συμβολίζεται με $L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$. Εύκολα βλέπουμε ότι το $L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ είναι και αυτό ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος (δες άσκηση 2.1.11). Ειδικά, το σύνολο όλων των γραμμικών μετασχηματισμών ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου στο $V_2 = \mathbb{F}$ (το σώμα $\mathbb{F}$ ικανοποιεί επίσης τα αξιώματα ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου) συμβολίζεται με V^* και λέγεται

δυϊκός διανυσματικός χώρος του V. Ένα στοιχείο f του V^* λέγεται **γραμμική μορφή** του V.

Ένα κλασικό παράδειγμα γραμμικού μετασχηματισμού f_A είναι αυτό που ορίζεται μέσω ενός πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$:

$$f_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m \quad \text{με} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{c} \text{Γράφουμε} \\ \text{επίσης} \\ Y = AX \end{array} \tag{2.2}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι *κάθε* γραμμικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ είναι της μορφής f_A για έναν κατάλληλο πίνακα A. Πράγματι, θεώρησε τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $\{f(E_1), \ldots f(E_n)\}$, όπου τα $\{E_1, \ldots, E_n\}$ αποτελούν την κανονική βάση του $\mathbb{F}^n$. Βλέπουμε αμέσως ότι

$$Y = f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(E_i) = AX \ .$$

Άσκηση 2.1.1. *Δείξε ότι μια γραμμική μορφή $f \in (\mathbb{F}^n)^*$ ορίζεται μέσω μιας έκφρασης της μορφής $f(X) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ για κάποιες σταθερές $\{a_i,\ i = 1..n \in \mathbb{F}.\}$*

Άσκηση 2.1.2. *Δείξε ότι, αν δύο γραμμικοί μετασχηματισμοί $f_1, f_2 : V_1 \to V_2$ μεταξύ $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων, συμπίπτουν σε μια βάση του V_1 τότε συμπίπτουν παντού, δηλ. εάν για μια βάση $\{A_1, \ldots, A_n\}$ of V_1 ισχύει $\{f_1(A_i) = f_2(A_i), i = 1..n\}$ τότε ισχύει και $f_1(X) = f_2(X)$ για κάθε $X \in V_1$.*

Άσκηση 2.1.3. *Έστω $f : V_1 \to V_2$ γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων. Δείξε ότι για κάθε υπόχωρο $U \subset V_1$, το σύνολο $f(U) \subset V_2$ που ονομάζεται **εικόνα** του U, είναι επίσης υπόχωρος του V_2. Δείξε επίσης ότι για κάθε υπόχωρο $U' \subset V_2$ η **αντίστροφη εικόνα** του $U' : f^{-1}(U') \subset V_1$ είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του V_1.*

Για δοθέντα γραμμικό μετασχηματισμό $f : V_1 \to V_2$ μεταξύ δύο $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων υπάρχουν δύο υπόχωροι $U \subset V1$ και $U' \subset V_2$ που συνδέονται με βασικές ιδιότητες του f. Αυτοί είναι:

1. Ο **πυρήνας** του f, που συμβολίζεται με $Kern(f)$ και είναι το σύνολο

$$U = f^{-1}(\{O\}) \ = \ \{X \in V_1 : f(X) = O\} \ ,$$

   δηλ. το σύνολο όλων των X που απεικονίζονται στο μηδέν O.

2. Η **εικόνα** $Im(f)$ του f που είναι το σύνολο

$$U' = f(V_1) = \{Y \in V_2 : \text{ υπάρχει } X \in V_1 : f(X) = Y\} \ ,$$

   δηλ. αποτελείται από όλα τα στοιχεία $Y \in V_2$ που εμφανίζονται ως εικόνες $Y = f(X)$ κάποιων $X \in V_1$.

Θεώρημα 2.1.1. *Ο γραμμικός μετασχηματισμός $f : V_1 \to V_2$ έχει τετριμμένο πυρήνα, $Kern(f) = \{O\}$ και λέγεται **μονομορφισμός**, αν και μόνον αν είναι 1-1 (ένα-προς-ένα ή **ένριψη**), δηλ. $X \neq X'$ απεικονίζονται σε $f(X) \neq f(X')$.*

Απόδειξη. Λόγω της συνθήκης γραμμικότητας του f η ισότητα

$$f(X) = f(X') \quad \Leftrightarrow \quad f(X - X') = O \quad \Leftrightarrow \quad X - X' \in Kern(f)\ . \qquad \square$$

Ορισμός 2.1.2. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, η διάσταση της εικόνας $Im(f)$ λέγεται **τάξη** του μετασχηματισμού f. Εάν $Im(f) = V_2$ ο μετασχηματισμός λέγεται **επιμορφισμός** ή **επίρριψη**. Σ' αυτήν την περίπτωση η τάξη του f ισούται με την διάσταση $dim(V_2)$.

Στην περίπτωση γραμμικού μετασχηματισμού της μορφής $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, που ορίζεται μέσω ενός $m \times n$ πίνακα A (τύπος 2.2), οι προηγούμενοι ορισμοί σημαίνουν:

1. Η εικόνα ισούται με τον παραγόμενο χώρο: $Im(f_A) = \langle A_1, \dots, A_n \rangle \subset \mathbb{F}^m$, όπου $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι οι στήλες του πίνακα A.
2. Ο πυρήνας $Kern(f_A)$ είναι ο *μηδενόχωρος* του πίνακα A δηλ. το σύνολο όλων των λύσεων $X \in \mathbb{F}^n$ του ομογενούς συστήματος $AX = O$.
3. Η *τάξη* του f_A είναι η τάξη του πίνακα A, που ισούται με την τάξη του κλιμακωτού πίνακα, δηλ. το πλήθος των κυρίων στηλών.
4. Έχουμε επίσης τη σχέση που προκύπτει από το θεώρημα 1.7.1:
$$dim(Kern(f_A)) \ + \ dim(Im(f_A)) \ = \ n\ . \tag{2.3}$$
5. Το γραμμικό σύστημα (1.1) ισοδυναμεί με την εξίσωση $f_A(X) = AX \ = \ B$, ως προς X που, με τη σειρά του, ισοδυναμεί με τον προσδιορισμό της αντίστροφης εικόνας $f^{-1}(\{B\}) \subset \mathbb{F}^n$ για ένα $B \in \mathbb{F}^m$.

Θεώρημα 2.1.2. *Δοθέντος γραμμικού μετασχηματισμού $f : V_1 \to V_2$ το σύνολο όλων των λύσεων της εξίσωσης $f(X) = B$ ισούται με $X_0 + Kern(f) \ =$*

$$\{X_0 + X, \ \ \mu\varepsilon \ \ X \in Kern(f)\} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ X_0 \ \ \mu\iota\acute{\alpha} \ \kappa\acute{\alpha}\pi o\iota\alpha \ \lambda\acute{\upsilon}\sigma\eta \ \tau o\upsilon \ \ f(X) = B\ .$$

Απόδειξη. Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός, ότι η $f(X) = f(X') = B$ συνεπάγεται την $f(X - X') = O$, που σημαίνει ότι $X - X' \in Kern(f)$. $\square$

Άσκηση 2.1.4. *Από το θεώρημα 1.1.2 ξέρουμε ότι το σύστημα με επαυξημένο πίνακα $A|B$ λύνεται όταν ακριβώς η τελευταία στήλη B δεν είναι κύρια. Δείξε ότι αν το σύστημα λύνεται και ο C είναι ο αντίστοιχος κλιμακωτός του πίνακα $A|B$, τότε τα στοιχεία της τελευταίας στήλης του C διαιρεθέντα με του οδηγό της αντίστοιχης γραμμής τους είναι οι πρώτες r (= τάξη) συντεταγμένες μιας ειδικής λύσης του συστήματος.*

Παράδειγμα 2.1.1. Ας υπολογίσουμε το σύνολο των λύσεων του γραμμικού συστήματος με επαυξημένο

$$(A|B) \ = \ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad \begin{array}{c}\mu\varepsilon \\ \kappa\lambda\iota\mu\alpha\kappa\omega\tau\acute{o} \\ \pi\acute{\iota}\nu\alpha\kappa\alpha:\end{array}$$

$$C \ = \ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/5 & -3/5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 & -9/2 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -(3/5) + (1/5)x_5, \\ x_2 = 1 - x_5, \\ x_3 = -(3/5) + (6/5)x_5, \\ x_4 = (9/5) - (3/5)x_5. \end{cases}$$

Θέτοντας $x_5 = 0$ παίρνουμε την ειδική λύση $X_0 = (-3/5, 1, -3/5, 9/5, 0)$, σε συμφωνία με την άσκηση 2.1.4. Από την άλλη μεριά, ο μηδενόχωρος του αντιστοίχου ομογενούς συστήματος είναι $U = \{\lambda(1/5, -1, 6/5, -3/5, 1)$ με $\lambda \in \mathbb{R}\}$ και η γενική λύση του συστήματος είναι

$$X_0 + U = \{(-3/5, 1, -3/5, 9/5, 0) \ + \ \lambda(1/5, -1, 6/5, -3/5, 1) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Άσκηση 2.1.5. *Έστω ότι $\{n_1 < n_2 < \cdots < n_k\}$ είναι οι θέσεις των κυρίων στηλών του πίνακα A. Δείξε ότι οι κύριες αυτές στήλες $\{A_{n_1}, \dots, A_{n_k}\}$ αποτελούν μια βάση του $Im(f_A)$.*

Άσκηση 2.1.6. *Για του γραμμικό μετασχηματισμό $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ξέρουμε ότι τα διανύσματα*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{απεικονίζονται αντίστοιχα στα} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

$$\text{Βρες το } f(X), \text{ για } X = \begin{pmatrix}-1\\15\\20\end{pmatrix}.$$

Εξέτασε επίσης ποιες και πόσες είναι οι λύσεις του συστήματος $f(X) = E_2 \in \mathbb{R}^3$.

Άσκηση 2.1.7. *Θεώρησε του γραμμικό μετασχηματισμό $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ με*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \ = \ (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2n}, x_{2n-1}) \ .$$

Ποιος είναι ο πίνακας A, για τον οποίο $f = f_A$?

Άσκηση 2.1.8. *Βρες βάσεις των υποχώρων $Im(f_A)$ και $Kern(f_A)$ και διαπίστωσε την ισχύ της εξίσωσης (2.3) για τους πίνακες:*

$$A = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix}o&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \ .$$

Άσκηση 2.1.9. *Υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ με την ιδιότητα $Im(f) = Kern(f)$; Δείξε ότι δεν υπάρχει όταν το n είναι περιττό. Εάν υπάρχει για n άρτιο, δες πως αυτό συμβιβάζεται με την ισότητα (2.3).*

Υπόδειξη: Ο πίνακας D της άσκησης 2.1.8 έχει $Im(f_D) = Kern(f_D) = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$.

Άσκηση 2.1.10. *Δείξε ότι αν ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ είναι* **1-1**, *τότε είναι και* **επίρρηψη** *(κάθε Y μπορεί να γραφεί ως εικόνα $Y = f(X)$ για κάποιο X) και αντίστροφα.*

Άσκηση 2.1.11. *Δείξε ότι το σύνολο $L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ των μετασχηματισμών $f : V_1 \to V_2$ μεταξύ δύο $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων είναι ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος με πρόσθεση $(f_1 + f_2)(X) = f_1(X) + f_2(X)$ και βαθμωτό πολλαπλασιασμό $(\lambda f)(X) = \lambda f(X)$ για κάθε $X \in V_1$.*

Άσκηση 2.1.12. *Οι $\{V_1, V_2\}$ είναι $\mathbb{F}$-διανυσματικοί χώροι διαστάσεων $\{n, m\}$. Επίσης $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι βάση του V_1 και $\{B_1, \dots, B_m\}$ είναι βάση του V_2. Ορίζουμε τους mn γραμμικούς μετασχηματισμούς $f_{ij} : V_1 \to V_2$ προδιαγράφοντας τις τιμές τους στις βάσεις:*

$$f_{ij}(A_k) = O, \text{ if } k \neq i \quad \text{και } f_{ij}(A_i) = B_j \ .$$

Δείξε ότι οι μετασχηματισμοί $\{f_{ij}, i = 1..n, j = 1..m\}$ αποτελούν βάση του $L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$. Ειδικά, οι συναρτήσεις κανονικών συντεταγμένων $\{e_i(X), i = 1..n\}$ του $\mathbb{F}^n$, που στο $X = (x_1, \dots, x_n)$ αντιστοιχίζουν την i-συντεταγμένη $\{e_i(X) = x_i, \ i = 1..n\}$, αποτελούν μια βάση του δυϊκού χώρου $(\mathbb{F}^n)^*$.

Άσκηση 2.1.13. *Δείξε ότι για ένα γραμμικό μετασχηματισμό $f \in L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ τάξης k, μπορούμε να βρούμε k ανεξάρτητα διανύσματα $\{A_1, \dots, A_k \in V_2\}$ και k γραμμικές μορφές $\{f_1, \dots, f_k \in V_1^*\}$ έτσι ώστε $f = A_1 f_1 + \cdots + A_k f_k$ με την έννοια:*

$$f(X) = A_1 f_1(X) + \cdots + A_k f_k(X) \quad \text{για κάθε} \quad X \in V_1 \ .$$

Δείξε επίσης ότι αυτά τα $\{f_1, \dots, f_k \in V_1^*\}$ είναι ανεξάρτητα διανύσματα του V_1^*.

Άσκηση 2.1.14. *Δείξε ότι ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f : V_1 \to V_2$ τάξης k μεταξύ $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι άθροισμα k γραμμικών μετασχηματισμών $\{f = f_1 + \cdots + f_k\}$ τάξης 1.*

2.2 Γινόμενο πινάκων, ισομορφισμοί

Συνέργεια σημαίνει
Συμπεριφορά ολόκληρων συστημάτων,
Που δεν προκαθορίζεται από
Τη συμπεριφορά των μερών τους.

R.B. Fuller, Όσα έμαθα

Η σύνθεση γραμμικών μετασχηματισμών μεταξύ $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων είναι πάλι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Πράγματι, αν $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί, τότε η σύνθεσή τους $V_1 \xrightarrow{g \circ f} V_3$ ικανοποιεί τη συνθήκη γραμμικότητας, καθώς

$$(g \circ f)(\lambda X + \mu X') = g(f(\lambda X + \mu X')) = g(\lambda f(X) + \mu f(X')) =$$
$$\lambda g(f(X)) + \mu g(f(X')) = \lambda (g \circ f)(X) + \mu (g \circ f)(X') \ .$$

Στην περίπτωση γραμμικών μετασχηματισμών που ορίζονται μέσω πινάκων $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $f_B : F^m \to \mathbb{F}^p$, με πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix} ,$$

η σύνθεση, $f_C = f_B \circ f_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^p$ δίδεται από τον πίνακα που συμβολίζεται με $C = BA$:

$$C = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1m}a_{m1} & \dots & b_{11}a_{1n} + \cdots + b_{1m}a_{mn} \\ b_{21}a_{11} + \cdots + b_{2m}a_{m1} & \dots & b_{21}a_{1n} + \cdots + b_{2m}a_{mn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1}a_{11} + \cdots + b_{pm}a_{m1} & \dots & b_{p1}a_{1n} + \cdots + b_{pm}a_{mn} \end{pmatrix},$$

με στοιχεία $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}$ για $\{i = 1..p, j = 1..n\}$.

Αυτό ονομάζεται **γινόμενο** του B και του A. Οι πίνακες $B \in M_{\mathbb{F}}(p, m)$ και $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$ έχουν γινόμενο τον πίνακα $C = BA \in M_{\mathbb{F}}(p, n)$. Έτσι, για να ορίζεται το γινόμενο πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη:

$C = BA$ **: πρέπει:** $\{\#$ **στηλών του** $B\} \;=\; m \;=\; \{\#$ **γραμμών του** $A\}$ **.**

Συμβολίζοντας τις στήλες του A με $\{A_1, \dots, A_n\}$ και θεωρώντας τις ως στηλοδιανύσματα του $\mathbb{F}^m$, οι στήλες του BA, θεωρούμενες ως στηλοδιανύσματα του $\mathbb{F}^p$, δίδονται από τα γινόμενα πινάκων

$$C_1 = BA_1 \;,\; \dots \;,\; C_n = BA_n \quad \text{με} \quad C_i \;=\; \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \;,\; i = 1..n \;.$$

Από τον ορισμό του γινομένου έπεται επίσης ο τυπικός κανόνας

$$f_B \circ f_A = f_{BA}.$$

Για $\mathbb{F}$-πίνακες $\{C, B, A\}$ αντιστοίχων διαστάσεων $\{r \times p \;,\; p \times m \;,\; m \times n\}$ το γινόμενο $C(BA)$ είναι καλώς ορισμένο και έχει την **προσεταιριστική** ιδιότητα, δηλ. ισχύει

$$C(BA) \;=\; (CB)A \;.$$

Η ιδιότητα αυτή, που μας επιτρέπει να παραλείπουμε τις παρενθέσεις CBA, και να γράφουμε γενικότερα γινόμενα $\{ZY \dots BA\}$ πινάκων, προκύπτει από την αντίστοιχη προσεταιριστική ιδιότητα των μετασχηματισμών

$$f_C \circ (f_B \circ f_A) = (f_C \circ f_B) \circ f_A \;.$$

Ορισμός 2.2.1. Ένας **τετραγωνικός** πίνακας, δηλ. πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$ μέ τόσες στήλες όσες και γραμμές, λέγεται **αντιστρέψιμος**, όταν υπάρχει πίνακας $B \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$ με την ιδιότητα:

$$AB \;=\; BA \;=\; I_n \;.$$

Ο αντίστροφος, όταν υπάρχει, συμβολίζεται με $B = A^{-1}$.

Ορισμός 2.2.2. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ δύο $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων $f : V_1 \to V_2$ λέγεται **ισομορφισμός** εάν είναι 1-1 και επιρριπτικός, δηλ. $Kernf = \{O\}$ και $Im(f) = V_2$.

Ένας ισομορφισμός f έχει επίσης έναν **αντίστροφο** $f^{-1} : V_2 \to V_1$, που είναι επίσης ισομορφισμός.

Άσκηση 2.2.1. *Δείξε ότι αν* $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ *είναι ένα σύνολο ανεξαρτήτων, αντ. εξαρτημένων διανυσμάτων και* f *είναι ισομορφισμός, τότε επίσης και τα διανύσματα* $\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) = \{B_1 = f(A_1), \dots, B_n = f(A_n)\}$ *είναι ανεξάρτητα, αντ. εξαρτημένα διανύσματα. Υπόδειξη:*

$$O = x_1 B_1 + \dots + x_n B_n = x_1 f(A_1) + \dots + x_n f(A_n) = f(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n),$$

η οποία, καθώς ο f *είναι ισομορφισμός, ισοδυναμεί με την* $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = O$.

Άσκηση 2.2.2. *Δείξε ότι η σύνθεση δύο ισομορφισμών είναι πάλι ισομορφισμός. Δείξε επίσης ότι η* V_1 **ισόμορφος του** V_2 *είναι μια σχέση ισοδυναμίας μεταξύ* $\mathbb{F}$*-διανυσματικών χώρων.*

Θεώρημα 2.2.1. *Όλοι οι* $\mathbb{F}$*-διανυσματικοί χώροι διάστασης* n *είναι ισόμορφοι μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Πράγματι, για ένα διανυσματικό χώρο V διάστασης n αρκεί να διαλέξουμε μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ και να θεωρήσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $\mathring{\mathbf{a}} : \mathbb{F}^n \longrightarrow V$ που στέλνει το διάνυσμα (συντεταγμένων) $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ στο διάνυσμα $A = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \in V$. Για ένα δεύτερο $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο W διάστασης n θεώρησε επίσης μια βάση $\mathbf{b}$ και τον αντίστοιχο μετασχηματισμό $\mathring{\mathbf{b}} : \mathbb{F}^n \longrightarrow W$. Τότε η σύνθεση $g = \mathring{\mathbf{b}} \circ \left(\mathring{\mathbf{a}}\right)^{-1} : V \to W$ είναι ένας ισομορφισμός μεταξύ των δύο διανυσματικών χώρων. □

Άσκηση 2.2.3. *Δείξε ότι το γινόμενο* BA *δύο αντιστρεψίμων πινάκων είναι πάλι αντιστρέψιμος πίνακας και ισχύει*

$$(BA)^{-1} = A^{-1} B^{-1}.$$

Άσκηση 2.2.4. *Βρες όλα τα ζεύγη από τους παρακάτω πίνακες, που μπορούν να πολλαπλασιασθούν και εκτέλεσε τον αντίστοιχο πολλαπλασιασμό:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.2.5. *Είναι δυνατόν να έχουμε* $m < n$ *και* $\{A \in M_{\mathbb{F}}(m,n), B \in M_{\mathbb{F}}(n,m)\}$ *με* $AB = I_m$ *και* $BA = I_n$ *? Ποιο είναι το εμπόδιο?*

Υπόδειξη: Η τάξη.

Άσκηση 2.2.6. *Για του πίνακα* D *της άσκησης 2.2.4 βρες ένα* 3×2 *πίνακα* D' *έτσι ώστε* $DD' = I_2$. *Υπολόγισε επίσης το γινόμενο* $D'D$.

Ορισμός 2.2.3. Για δοθέντα πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$, ο πίνακας $A^t \in M_{\mathbb{F}}(n,m)$ που έχει στήλες τις γραμμές του A λέγεται **ανάστροφος** του A:

$$M_{\mathbb{F}}(m,n) \ni A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{F}}(n,m).$$

Άσκηση 2.2.7. *Δείξε ότι ο πίνακας* A *και ο ανάστροφός του* A^t *έχουν την ίδια τάξη. Υπόδειξη: Δες το θεώρημα 1.5.2.*

Άσκηση 2.2.8. *Δείξε ότι η* **αναστροφή** $\mathcal{T} : M_{\mathbb{F}}(m,n) \to M_{\mathbb{F}}(n,m)$ *με* $\mathcal{T}(A) = A^t$ *είναι ισομορφισμός και ικανοποιεί την* $(A^t)^t = A$ *:* **ο ανάστροφος του αναστρόφου είναι ο αρχικός πίνακας**.

Σημείωση 2.2.1. Την παράσταση $A \cdot B = B \cdot A = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$ για δυο διανύσματα $\{A, B \in \mathbb{F}^n\}$ θα ορίσουμε αργότερα (στην περίπτωση $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) ως **εσωτερικό γινόμενο** των δύο διανυσμάτων. Αυτό είναι χρήσιμο για την παράσταση του γενικού γινομένου πινάκων με τον εξής τρόπο.

Για τον πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό r_i^A για την i-στη γραμμή και το c_j^A για την j-στη στήλη, συχνά επίσης παραλείποντας τον εκθέτη A όταν ο πίνακας υπονοείται από τα συμφραζόμενα. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συμβολισμό, το στοιχείο $c_{ij} = (BA)_{ij}$ του γινομένου πινάκων $C = BA$ είναι απλά το *γινόμενο* των διανυσμάτων (i-γραμμή επί j-στήλη):

$$c_{ij} = r_i^B \cdot c_j^A = b_{i1} a_{1j} + \cdots + b_{im} a_{mj} \ . \tag{2.4}$$

Άσκηση 2.2.9. *Δείξε ότι ο ανάστροφος ενός γινομένου πινάκων είναι το γινόμενο των αναστρόφων σε αντίστροφη διάταξη:* $(BA)^t = A^t B^t$.

Υπόδειξη: Το στοιχείο $c_{ij} = (BA)_{ij}$ του γινομένου $C = BA$ είναι το $((BA)^t)_{ji}$ του αναστρόφου πίνακα, και κατά τη σημείωση 2.2.1

$$((BA)^t)_{ji} = c_{ij} = r_i^B \cdot c_j^A = c_i^{B^t} \cdot r_j^{A^t} = r_j^{A^t} \cdot c_i^{B^t} = (A^t B^t)_{ji} \ .$$

Θεώρημα 2.2.2. *Ο πίνακας* $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *είναι αντιστρέψιμος, τότε και μόνον τότε, όταν ικανοποιείται μια από τις επόμενες συνθήκες (οπότε ικανοποιούνται και όλες οι υπόλοιπες).*

1. *Το σύστημα* $AX = O$ *έχει μια μοναδική λύση, την* $X = O$.
2. *Οι στήλες* $\{c_1, \dots, c_n\}$ *είναι ανεξάρτητα διανύσματα.*
3. *Ο* A *έχει* n *οδηγούς* $\{p_1, \dots, p_n\}$ *και ο αντίστοιχος κλιμακωτός πίνακας είναι ο διαγώνιος* $diag(p_1, \dots, p_n)$ *των οδηγών του.*
4. *Η τάξη του πίνακα είναι* n.
5. *Οι γραμμές του* $\{r_1, \dots, r_n\}$ *είναι ανεξάρτητα διανύσματα.*
6. *Το σύστημα* $AX = B$ *έχει μια μοναδική λύση για κάθε* $B \in \mathbb{F}^n$.

Απόδειξη. Nr-1 : σημαίνει ότι ο πυρήνας $Kern(f_A) = \{O\}$ και η εξίσωση (2.3) συνεπάγεται ότι η εικόνα $Im(f_A) = \mathbb{F}^n$ και τούμπαλιν.

Nr-2 : σημαίνει ότι $\sum_i x_i c_i = O \quad \Rightarrow \quad X = O$, που ισοδυναμεί με το *nr-1*.

Nr-3 : Αυτό ισοδυναμεί με το *nr-2*.

Nr-4 : Αυτό ισοδυναμεί με το *nr-3*.

Nr-5 : Η ύπαρξη αντιστρόφου B του A συνεπάγεται (δες άσκηση 2.2.9)

$$AB = BA = I_n \quad \Leftrightarrow \quad (AB)^t = (BA)^t = I_n^t = I_n \quad \Rightarrow \quad B^t A^t = A^t B^t = I_n \ .$$

Αυτό, κατά το *nr-2* συνεπάγεται ότι οι στήλες του A^t είναι ανεξάρτητες. Αυτές όμως είναι οι γραμμές του A.

Nr-6 : Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε η μοναδική λύση δίδεται από την

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} B \ . \tag{2.5}$$

Αντίστροφα αν ισχύει η συνθήκη *nr-6*, τότε η $AX = O$ έχει μοναδική λύση που πρέπει να είναι η O και το συμπέρασμα προκύπτει από το *nr-1*. □

Σημείωση 2.2.2. Το τελευταίο *nr-6* του θεωρήματος δίδει μια συνταγή για την ταυτόχρονη λύση συστημάτων που έχουν τον ίδιο αντιστρέψιμο πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$:

$$AX_1 = B_1 \ , \ AX_2 = B_2 \ , \ \dots \ , \ AX_m = B_m \ .$$

Τοποθετούμε τα $\{B_1, \dots, B_m\}$ μαζί σαν στήλες ενός $n \times m$ πίνακα B και λύνουμε την εξίσωση

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B \ , \tag{2.6}$$

βρίσκοντας ένα $n \times m$ πίνακα X του οποίου οι στήλες είναι οι λύσεις των επιμέρους συστημάτων. Η εύρεση στην πράξη του X επιτυγχάνεται με την αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή του **επαυξημένου** πίνακα $A|B$. Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών εφαρμοζόμενες τώρα στον $A|B$ παράγουν τον κλιμακωτό πίνακα $I_n|A^{-1}B$, η δεξιά πλευρά $X = A^{-1}B$ παριστάνει τον πίνακα που ικανοποιεί την $AX = B$.

Ειδικά, κάνοντας την αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή του πίνακα $(A|I_n)$ παράγουμε με τις συνήθεις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών τον πίνακα $I_n|A^{-1}$ και μέσω αυτού τον αντίστροφο A^{-1}.

Παράδειγμα 2.2.1. Ας εκτελέσουμε την συνταγή της προηγούμενης σημείωσης για τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A|I_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_2 \to r_2 + 2r_1 \\ r_3 \to r_3 + 4r_1 \\ \text{παράγει} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_3 - (2/3)r_2 \\ \text{παράγει} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 8/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_1 \to r_1 + r_3 \\ r_2 \to r_2 + 3r_3 \\ \text{παράγει} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 11/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 10 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} r_1 \to r_1 - 1/3r_2 \\ \text{παράγει} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 10 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 8/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} r_2 \to 1/3r_2 \\ r_3 \to -r_3 \\ \text{παράγει} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 10/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & 2/3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{Το δεξί μέρος} \\ \text{του πίνακα} \\ \text{είναι ο αντίστροφος } A^{-1}. \end{array}$$

Άσκηση 2.2.10. *Βρες τους αντιστρόφους των πινάκων*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Άσκηση 2.2.11. *Δείξε ότι για ένα αντιστρέψιμο πίνακα A ισχύει $(A^{-1})^{-1} = A$. Δώσε τρία παραδείγματα πινάκων που ικανοποιούν την $A^{-1} = A \iff A^2 = AA = I_n$.*

Υπόδειξη: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} .$

Σημείωση 2.2.3. Είναι χρήσιμο και συντομεύει τους υπολογισμούς το να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό $\mathring{\mathbf{a}}(C)$ που χρησιμοποιήσαμε στο θεώρημα 2.2.1, σε ένα

είδος **γινομένου** μιας **γραμμής διανυσμάτων** $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n \in V\}$ με ένα διάνυσμα στήλης $C = (c_1, \dots, c_n)^t \in \mathbb{F}^n$ ορίζοντας το διάνυσμα

$$\mathbf{a} \cdot C = A_1 c_1 + A_2 c_2 + \cdots + A_n c_n \in V \ . \tag{2.7}$$

Αυτό επεκτείνεται ακόμη περισσότερο στο **γινόμενο** μιας γραμμής διανυσμάτων $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ με ένα $n \times m$ πίνακα C που ορίζει τη νέα γραμμή διανυσμάτων:

$$\mathbf{b} = (B_1, \dots, B_m) = \mathbf{a} \cdot C \quad \Leftrightarrow \quad B_i = \sum_{k=1}^{n} A_k c_{ki} \in V \quad \text{για} \quad i = 1..m \ . \tag{2.8}$$

Έτσι εκφράζουμε το B_i ως γραμμικό συνδυασμό των $\{A_1, \dots, A_n\}$ με συντελεστές τα στοιχεία των στηλών του πίνακα C.

Άσκηση 2.2.12. *Έστω ότι $\{A_1, \dots, A_n\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V. Όρισε τα διανύσματα*

$$B_j = A_1 c_{1j} + \cdots + A_n c_{nj} \quad \mu\varepsilon \quad j = 1..n \ .$$

Δείξε ότι τα $\{B_1, \dots, B_n\}$ αποτελούν και αυτά βάση, όταν ακριβώς ο πίνακας $C = (c_{ij})$ είναι αντιστρέψιμος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την σημείωση 2.2.3, μπορούμε να γράψουμε τη σχέση μεταξύ των διανυσμάτων $\{B_i, A_j, i, j = 1..n\}$ στη μορφή $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot C$. Τότε η γραμμική εξάρτηση των $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_n\}$ ισοδυναμεί με την ύπαρξη ενός $X \in \mathbb{F}^n$ με $X \neq O$ που ικανοποιεί την

$$O \ = \ \mathbf{b} \cdot X \ = \ (\mathbf{a} \cdot C) \cdot X \ = \ \mathbf{a} \cdot (CX) \ ,$$

και λόγω της ανεξαρτησίας των $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ αυτό ισχύει όταν ακριβώς $CX = O$.

Άσκηση 2.2.13. *Θεώρησε τους πίνακες $B \in M_{\mathbb{F}}(m, m)$, $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$, με B αντιστρέψιμο. Δείξε ότι η τάξη $r(BA) = r(A)$.*

Υπόδειξη: Η τάξη $r(A)$ του πίνακα A είναι η διάσταση του $Im(f_A)$. Επειδή ο f_B είναι ισομορφισμός, τα $\{X_1, \dots, X_k \in Im(f_A)\}$ είναι εξαρτημένα/ανεξάρτητα, τότε ακριβώς όταν οι εικόνες των διανυσμάτων $\{f_B(X_1), \dots, f_B(X_k) \in Im(f_{BA})\}$ είναι διανύσματα εξαρτημένα/ανεξάρτητα (άσκηση 2.2.1).

Άσκηση 2.2.14. *Δείξε ότι το γινόμενο AB ενός $m \times n$ πίνακα A και του διαγώνιου $n \times n$ πίνακα $B = diag(\lambda, \dots, \lambda)$ ισούται με του πίνακα λA.*

Άσκηση 2.2.15. *Δείξε ότι αν οι πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n, n)\}$ έχουν αντιστρέψιμο γινόμενο AB, τότε και οι δύο είναι αντιστρέψιμοι.*

Υπόδειξη: Υπόθεσε πρώτα ότι $BX = O$ με $X \in \mathbb{F}^n$. Τότε $(AB)X = O \Rightarrow X = O$ λόγω της υποθέσεως αντιστρεψιμότητας του AB. Άρα ο B είναι αντιστρέψιμος. Τότε η $A = (AB)B^{-1}$ συνεπάγεται ότι και ο A είναι αντιστρέψιμος.

Άσκηση 2.2.16. *Δείξε ότι αν οι πίνακες $\{A_1, \dots, A_k \in M_{\mathbb{F}}(n, n)\}$ έχουν ένα αντιστρέψιμο γινόμενο $A_k \dots A_2 A_1$, τότε καθένας από αυτούς είναι αντιστρέψιμος.*

Υπόδειξη: Γράψε $A_k \dots A_1 = (A_1 \dots A_2)A_1$ και χρησιμοποίησε την άσκηση 2.2.15 για να συμπεράνεις ότι ο A_1 και ο $(A_1 \dots A_2)$ είναι αντιστρέψιμοι. Προχώρησε με επαγωγή ως προς το k.

Άσκηση 2.2.17. *Δείξε ότι το γινόμενο των πινάκων $X \in M_{\mathbb{F}}(m,1)$ και $Y \in M_{\mathbb{F}}(1,n)$:*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} (y_1, \dots, y_n) \;=\; \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_my_1 & x_my_2 & \dots & x_my_n \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$$

είναι πίνακας τάξης 1. Δείξε επίσης ότι κάθε πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ τάξης 1 γράφεται σ' αυτή τη μορφή.

Υπόδειξη: Οι στήλες $\{A_i, i = 1..n\}$ του A είναι βαθμωτά πολλαπλάσια μιας μοναδικής στήλης $X \in M_{\mathbb{F}}(m,1)$.

2.3 Αλλαγή βάσης, ισοδύναμοι πίνακες

> Η επιστήμη είναι ένα κοφτερό εργαλείο, με το οποίο οι άνθρωποι παίζουν σαν τα παιδιά, και κόβουν τα ίδια τους τα χέρια.
>
> *A.S. Eddington*

Θεώρημα 2.3.1. *Για δύο $\mathbb{F}$-διανυσματικούς χώρους $\{V_1, V_2\}$ αντιστοίχων διαστάσεων $\{n, m\}$, ο διανυσματικός χώρος $L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ όλων των γραμμικών μετασχηματισμών από του V_1 στον V_2 είναι ισόμορφος με τον διανυσματικό χώρο $M_{\mathbb{F}}(m,n)$ όλων των $m \times n$ $\mathbb{F}$-πινάκων.*

Απόδειξη. Πράγματι, θεώρησε δυο αντίστοιχες βάσεις $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του V_1 και $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_m\}$ του V_2. Για τον μετασχηματισμό $f \in L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2)$ όρισε τους αριθμούς c_{ij} που είναι οι συντεταγμένες του $f(A_i)$ ως προς τη βάση $\mathbf{b}$:

$$f(A_i) \;=\; B_1c_{1i} + \dots + B_mc_{mi}, \quad \text{για} \quad i = 1..n \,. \tag{2.9}$$

Αυτό ορίζει ένα $m \times n$ πίνακα C του οποίου οι στήλες είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος $f(A_i)$ ως προς τη βάση $\mathbf{b}$. Έτσι, ορίζεται μια απεικόνιση

$$\mathcal{J}_{\mathbf{b},\mathbf{a}} : L_{\mathbb{F}}(V_1, V_2) \longrightarrow M_{\mathbb{F}}(m,n).$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αυτή είναι γραμμική, ότι ο πυρήνας $Kern(\mathcal{J}_{\mathbf{b},\mathbf{a}}) = \{O\}$, και η εικόνα της $Im(\mathcal{J}_{\mathbf{b},\mathbf{a}}) = M_{\mathbb{F}}(m,n)$, συνεπώς η $\mathcal{J}_{\mathbf{b},\mathbf{a}}$ είναι ισομορφισμός. □

Άσκηση 2.3.1. *Συμπλήρωσε τις λεπτομέρειες στην απόδειξη του θεωρήματος 2.3.1, και δείξε ότι ο $\mathcal{J}_{\mathbf{b},\mathbf{a}}$ είναι όντως ένας ισομορφισμός.*

Ορισμός 2.3.1. Ο πίνακας $C = \mathcal{J}_{\mathbf{b},\mathbf{a}}(f)$ ονομάζεται **πίνακας παράστασης** του γραμμικού μετασχηματισμού $f : V_1 \to V_2$ ως προς τις βάσεις $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ και συμβολίζεται με $C = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$.

Σημείωση 2.3.1. Ο συμβολισμός $C = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ του πίνακα παράστασης του μετασχηματισμού f συνδέεται με την απεικόνιση $\mathring{\mathbf{a}} : \mathbb{F}^n \to V$ που ορίζεται μέσω μιας βάσης $\mathbf{a}$ του V (δες θεώρημα 2.2.1) και στο εξής απλοποιούμε χρησιμοποιώντας το ίδιο το σύμβολο της βάσης $\mathbf{a} = \mathring{\mathbf{a}}$:

$$\mathbf{a} : \mathbb{F}^n \to V \quad \text{με} \quad \mathbf{a}(X) = \mathbf{a} \cdot X = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = X_{\mathbf{a}} \in V \ , \tag{2.10}$$

για κάθε $X \in \mathbb{F}^n$. Δηλαδή η $\mathbf{a}$ αντιστοιχίζει στο $X = (x_1, \dots, x_n)$ το διάνυσμα του V που έχει αυτές τις συντεταγμένες ως προς την βάση $\mathbf{a}$.

Ο πίνακας $C = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό

$$f_C = \mathbf{b}^{-1} \circ f \circ \mathbf{a} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m \ .$$

Με αυτόν τον συμβολισμό έχουμε τις επόμενες σχέσεις και το μεταθετικό διάγραμμα γραμμικών μετασχηματισμών.

$$C = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot C \ = \mathbf{b} \cdot ({}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}) \ ,$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \\ \mathbb{F}^n \arrow[u, "\mathbf{a}"] \arrow[r, "\mathbf{b}^{-1}\circ f\circ \mathbf{a}"] & \mathbb{F}^m \arrow[u, "\mathbf{b}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{c}\text{μεταθετικό}\\ \text{διάγραμμα για}\\ X \in \mathbb{F}^n :\end{array} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{a}\cdot X \arrow[r, "f"] & \mathbf{b}\cdot Y \\ X \arrow[u, "\mathbf{a}"] \arrow[r, "{}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}"] & Y \arrow[u, "\mathbf{b}"'] \end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.1: Μεταθετικό διάγραμμα μετασχηματισμού και πίνακα παράστασης

Διαλέγοντας δύο διαφορετικές βάσεις $\{\mathbf{a}', \mathbf{b}'\}$ των $\{V_1, V_2\}$ ο ίδιος μετασχηματισμός $f : V_1 \to V_2$ παράγει έναν διαφορετικό πίνακα παράστασης ${}_{\mathbf{b}'^{-1}}f_{\mathbf{a}'}$ και πρέπει να ξέρουμε τη σχέση των δύο παραστάσεων του f. Η αλλαγή βάσεων στον V_1 και τον V_2 ορίζεται από τον $n \times n$ πίνακα C_1 για τη μετάβαση από την $\mathbf{a}$ στην βάση $\mathbf{a}'$ με $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot C_1$ και με έναν $m \times m$ πίνακα C_2 για τη μετάβαση από τη βάση $\mathbf{b}$ στην $\mathbf{b}'$ με $\mathbf{b}' = \mathbf{b} \cdot C_2$. Ο επόμενος τυπικός υπολογισμός παράγει την απαιτούμενη σχέση μεταξύ των πινάκων παράστασης:

$$f(\mathbf{a}') = \mathbf{b}' \cdot C' \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{a} \cdot C_1) = (\mathbf{b} \cdot C_2) \cdot C' \quad \Rightarrow \quad f(\mathbf{a}) \cdot C_1 = \mathbf{b} \cdot (C_2 C') \quad \Rightarrow$$
$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (C_2 C') C_1^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot (C_2 C' C_1^{-1}) \ \text{ επίσης } f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot C \quad \Rightarrow$$
$$C = C_2 C' C_1^{-1},$$

Η τελευταία σχέση, χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό για την αλλαγή βάσεων, παράγει έναν ισοδύναμο τύπο υποβοηθητικό απομνημόνευσης. Πράγματι, η αλλαγή βάσης $\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot C_1$ μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό $I_{V_1} : V_1 \to V_1$ με $I_{V_1}(X) = X$, ως προς δύο διαφορετικές βάσεις, που θα μπορούσαμε να παραστήσουμε με $C = {}_{\mathbf{a}^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}'}$. Μ' αυτό τον συμβολισμό έχουμε:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = {}_{\mathbf{a}^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}'} \quad \text{και} \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' \cdot C_1^{-1} \quad \Rightarrow \quad C_1^{-1} = {}_{\mathbf{a}'^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}} \ .$$

Απ' αυτό έπεται ότι η τελευταία σχέση μεταξύ των πινάκων $\{C, C'\}$ μπορεί να γραφεί

$${}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}} \ = \ C \ = \ C_2 C' C_1^{-1} \ = \ ({}_{\mathbf{b}^{-1}}I_{V_2\mathbf{b}'})({}_{\mathbf{b}'^{-1}}f_{\mathbf{a}'})({}_{\mathbf{a}'^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}}) \ . \tag{2.11}$$

Θεώρημα 2.3.2. *Δοθέντος γραμμικού μετασχηματισμού $f : V_1 \to V_2$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V_1 στον m-διάστατο $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο V_2, δύο βάσεις $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset V_1$ και $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_m\} \subset V_2$, και ο αντίστοιχος πίνακας παράστασης $C = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}} \in M_{\mathbb{F}}(n, m)$, ικανοποιούν τις επόμενες ιδιότητες:*

1. *Ο πυρήνας $Kern(f) \subset V_1$ και ο μηδενόχωρος $N_C \subset \mathbb{F}^n$ του C συνδέονται με τη σχέση*
$$\mathbf{a}(N_C) = Kern(f) \ .$$

2. *Η εικόνα $Im(f) \subset V_2$ και ο χώρος των εικόνων $Im_C \subset \mathbb{F}^m$ συνδέονται με τη σχέση*
$$\mathbf{b}(Im_C) = Im(f) \ .$$

3. *Ισχύει*
$$dim(Kern(f)) \ + \ dim(Im(f)) \ = \ dim(V_1). \tag{2.12}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη των *nr-1* και *nr-2* ανάγεται σε μια απλή εφαρμογή των προηγουμένων μεταθετικών διαγραμμάτων. Η απόδειξη της *nr-3* έπεται από τα προηγούμενα *nrs* και το θεώρημα 1.7.1 ή τον ισοδύναμό του τύπο (2.3). □

Αυτοί, οι κάπως εξεζητημένοι συμβολισμοί, μετά από λίγη εξάσκηση, χρησιμεύουν για να θυμόμαστε τη συνέπεια των αλλαγών βάσεων στον πίνακα παράστασης ενός μετασχηματισμού f. Μπορούνε επίσης να βοηθήσουν στην παράσταση μιας σύνθεσης περισσοτέρων μετασχηματισμών και ενδιαμέσων αλλαγών βάσεων, όπως στα δύο επόμενα σενάρια.

Παράδειγμα 2.3.1. Σ' αυτό το παράδειγμα έχουμε δύο γραμμικούς μετασχηματισμούς $V_1^n \xrightarrow{f} V_2^m \xrightarrow{g} V_3^p$, όπου οι εκθέτες υποδηλώνουν τις διαστάσεις. Θεωρούμε και τρεις βάσεις $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ και τους πίνακες παράστασης $\{M_1^{m,n}, M_2^{p,m}, M_3^{p,n}\}$ με τους εκθέτες να δηλώνουν πάλι τις διαστάσεις των πινάκων. Αυτοί οι πίνακες παράστασης ικανοποιούν τις σχέσεις

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot M_1^{m,n} \quad , \quad g(\mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot M_2^{p,m} \quad , \quad (g \circ f)(\mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot M_3^{p,n} \quad \Rightarrow$$
$$(g \circ f)(\mathbf{a}) \ = \ g(f(\mathbf{a})) \ = \ g(b \cdot M_1^{m,n}) \ = \ g(\mathbf{b}) \cdot M_1^{m,n} \ = \ \mathbf{c} \cdot M_2^{p,m} M_1^{m,n} \quad \Rightarrow$$
$$M_3^{p,n} \ = \ M_2^{p,m} M_1^{m,n} \quad \Leftrightarrow \quad {}_{\mathbf{c}^{-1}}(g \circ f)_{\mathbf{a}} \ = \ ({}_{\mathbf{c}^{-1}}g_{\mathbf{b}})({}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}) \ .$$

Ο τελευταίος τύπος δείχνει, ότι αν χρησιμοποιούμε μια ορισμένη βάση σε κάθε διανυσματικό χώρο, τότε ο πίνακας παράστασης της σύνθεσης $g \circ f$ των μετασχηματισμών συμπίπτει με το γινόμενο των πινάκων παράστασης των g και f.

Το σχήμα 2.2 δείχνει το μεταθετικό διάγραμμα αυτών των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων μετασχηματισμών. Το δεύτερο διάγραμμα δείχνει τον τρόπο που το πρώτο διάγραμμα δρα πάνω στα διανύσματα συντεταγμένων $\{X \in \mathbb{F}^n, Y \in \mathbb{F}^m, Z \in \mathbb{F}^p\}$, ως προς τις αντίστοιχες βάσεις $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, των διανυσμάτων που απεικονίζονται μέσω των $\{f, g, g \circ f\}$.

Παράδειγμα 2.3.2. Το ίδιο με το προηγούμενο παράδειγμα, όπου όμως τώρα το κάνουμε πιο περίπλοκο παρεμβάλλοντας δύο βάσεις σε κάθε χώρο: $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}'\}$ στον V_1, $\{\mathbf{b}, \mathbf{b}'\}$ στον V_2 και $\{\mathbf{c}, \mathbf{c}'\}$ στον V_3 και παριστάνοντας τους μετασχηματισμούς με τον επόμενο τρόπο

$$f(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}} \ , \ g(\mathbf{b}') = \mathbf{c} \cdot {}_{\mathbf{c}^{-1}}g_{\mathbf{b}'} \ , \ (g \circ f)(a') = \mathbf{c}' \cdot {}_{\mathbf{c}'^{-1}}(g \circ f)_{\mathbf{a}'} \ .$$

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & V_3 \\
& V_2 \arrow[ur, "g"'] & \\
\mathbb{F}^n \arrow[uuu, "\mathbf{a}"] \arrow[ur, "\mathbf{b}^{-1}\circ f\circ\mathbf{a}"] \arrow[rr, "\mathbf{c}^{-1}\circ(g\circ f)\circ\mathbf{a}"] & \mathbb{F}^m \arrow[u, "\mathbf{b}"] \arrow[r, "\mathbf{c}^{-1}\circ g\circ\mathbf{b}"] & \mathbb{F}^p \arrow[uuu, "\mathbf{c}"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό διάγραμμα που, για $f(\mathbf{a}\cdot X) = \mathbf{b}\cdot Y$ $g(\mathbf{b}\cdot Y) = \mathbf{c}\cdot Z$ αντιστοιχίζει :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{a}\cdot X \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathbf{c}\cdot Z \\
& \mathbf{b}\cdot Y \arrow[ur, "g"'] & \\
X \arrow[uuu, "\mathbf{a}"] \arrow[ur, "\mathbf{b}^{-1}\circ f\circ\mathbf{a}"] \arrow[rr, "\mathbf{c}^{-1}\circ(g\circ f)\circ\mathbf{a}"] & Y \arrow[u, "\mathbf{b}"] \arrow[r, "\mathbf{c}^{-1}\circ g\circ\mathbf{b}"] & Z \arrow[uuu, "\mathbf{c}"']
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 2.2: Σχέσεις παραστάσεων με πίνακες μιας σύνθεσης μετασχηματισμών

Οι πίνακες $\{L = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}\ ,\ M = {}_{\mathbf{c}^{-1}}g_{\mathbf{b}'}\ ,\ N = {}_{\mathbf{c}'^{-1}}(g\circ f)_{\mathbf{a}'}\}$ σχετίζονται με μία ενδιάμεση αλλαγή βάσεων $\{{}_{\mathbf{a}'^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}}\ ,\ {}_{\mathbf{b}'^{-1}}I_{V_2\mathbf{b}}\ ,\ {}_{\mathbf{c}'^{-1}}I_{V_3\mathbf{c}}\}$ στους αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους, και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$\begin{aligned}
{}_{\mathbf{c}'^{-1}}(g\circ f)_{\mathbf{a}'} \ &= \ [{}_{\mathbf{c}'^{-1}}g_{\mathbf{b}}][{}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}'}] \ = \\
[({}_{\mathbf{c}'^{-1}}I_{V_3\mathbf{c}})({}_{\mathbf{c}^{-1}}g_{\mathbf{b}'})({}_{\mathbf{b}'^{-1}}I_{V_2\mathbf{b}})][({}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}})({}_{\mathbf{a}^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}'})] \quad &\Leftrightarrow \\
N \ = \ [({}_{\mathbf{c}'^{-1}}I_{V_3\mathbf{c}})M({}_{\mathbf{b}'^{-1}}I_{V_2\mathbf{b}})][L({}_{\mathbf{a}^{-1}}I_{V_1\mathbf{a}'})]\ .
\end{aligned}$$

Σημείωση 2.3.2. Στην περίπτωση μετασχηματισμών διανυσματικών χώρων της μορφής $f : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ ο καθορισμός του πίνακα παράστασης γίνεται με πράξεις πινάκων. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ο μετασχηματισμός $f : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^4$ που απεικονίζει:

$$f(E_1) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ f(E_2) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ f(E_3) = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} C\ .$$

Η τελευταία ισότητα ερμηνευόμενη ως $f(I_3) = \mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot C$, σημαίνει ότι ο C είναι ένας 4×3 πίνακας του οποίου οι στήλες εκφράζουν τις συντεταμένες των διανυσμάτων-στηλών του πίνακα $f(I_3) = \mathbf{a}$ ως προς τη βάση $\mathbf{b}$ του F^4. Αυτή είναι μια εξίσωση πινάκων και η παράσταση του f ως προς τις βάσεις I_3 και $\mathbf{b}$ (ενοείται οι στήλες των I_3 και $\mathbf{b}$) είναι $C = {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{I_3}}$:

$$C = \mathbf{b}^{-1}\mathbf{a} = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&-1\\0&1&-1&0\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&-1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Επιστρέφοντας στην εξίσωση (2.11) βλέπουμε ότι δύο $m\times n$ πίνακες παράστασης $\{C, C'\}$ του *ίδιου* γραμμικού μετασχηματισμού $f : V_1^n \to V_2^m$ συνδέονται με μια σχέση της μορφής

$$C' = ACB\ ,\ A\in M_{\mathbb{F}}(m,m)\ ,\ B\in M_{\mathbb{F}}(n,n)\ :\ \text{αντιστρέψιμοι πίνακες.} \qquad (2.13)$$

Ορισμός 2.3.2. Η σχέση μεταξύ πινάκων $\{C, C' \in M_{\mathbb{F}}(m,n)\}$ που εκφράζεται με την εξίσωση (2.13) λέγεται **ισοδυναμία πινάκων** και δύο τέτοιοι πίνακες $\{C, C'\}$ ονομάζονται **ισοδύναμοι**.

Άσκηση 2.3.2. *Δείξε ότι η σχέση ισοδυναμίας πινάκων στο χώρο $M_{\mathbb{F}}(n,m)$ είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας.*

2.4 Στοιχειώδεις πίνακες

Watson ... βλέπεις, αλλά δεν παρατηρείς.

A. C. Doyle, Σκάνδαλο στη Βοημία

Οι **στοιχειώδεις πίνακες** προκύπτουν από τον ταυτοτικό πίνακα I_n μεταβάλλοντας μια ή δύο γραμμές του. Δίδω ένα δείγμα στην περίπτωση του I_4 :

$$[\epsilon_3^\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\epsilon_{13}] = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow 1 \\ \\ \leftarrow 3 \\ \\ \end{array}, \quad [\epsilon_{24}^\lambda] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 2 \\ \\ \leftarrow 4 \end{array}.$$

Γενικότερα, δουλεύοντας με τον ταυτοτικό πίνακα I_n, ο πίνακας $[\epsilon_i^\lambda]$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας την i-στη γραμμή με $\lambda \neq 0$. Ο πίνακας $[\epsilon_{ij}]$ προκύπτει από τον I_n εναλλάσσοντας την i-στη με την j-στη γραμμή. Και ο πίνακας $[\epsilon_{ij}^\lambda]$ προκύπτει από τον I_n προσθέτοντας το λ πολλαπλάσιο της j-της γραμμής στην i-στη γραμμή.

Οι πίνακες αυτοί είναι αντιστρέψιμοι και οι αντίστροφοί τους είναι επίσης *στοιχειώδεις πίνακες*:

$$[\epsilon_i^\lambda]^{-1} = [\epsilon_i^{\frac{1}{\lambda}}] \quad , \quad [\epsilon_{ij}]^{-1} = [\epsilon_{ij}] \quad , \quad [\epsilon_{ij}^\lambda]^{-1} = [\epsilon_{ij}^{-\lambda}] \, .$$

Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών (**§** 1.3) σ' ένα $m \times n$ πίνακα A προκύπτουν μέσω πολλαπλασιασμού **από τα αριστερά** με έναν $m \times m$ στοιχειώδη πίνακα:

1. $[\epsilon_{ij}]A$: Εναλλάσσει τις i-στη, j-στη γραμμές του A.
2. $[\epsilon_i^\lambda]A$: Πολλαπλασιάζει την i-στη γραμμή με $\lambda \neq 0$.
3. $[\epsilon_{ij}^\lambda]A$: Προσθέτει το λ-πολλαπλάσιο της j-της γραμμής στην i-στη.

Η προηγηθείσα συζήτηση και ο τρόπος με τον οποίο βρίσκουμε τον κλιμακωτό πίνακα A' του πίνακα A, κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον A, αποδεικνύουν το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.1. *Υπάρχει μια κατάλληλη ακολουθία $\{[\epsilon_1], \dots, [\epsilon_k]\}$ στοιχειωδών πινάκων, έτσι ώστε ο κλιμακωτός πίνακας A' του A να γράφεται σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων επί του A :*

$$A' = [\epsilon_k] \dots [\epsilon_1] A \, . \tag{2.14}$$

Παράδειγμα 2.4.1. Ας εφαρμόσουμε αυτό το θεώρημα στο παράδειγμα 1.3.1 γράφοντας τον κλιμακωτό πίνακα με την βοήθεια γινομένου στοιχειωδών πινάκων:

$$A' = [\epsilon_{13}^{-\frac{1}{3}}][\epsilon_{23}^{\frac{2}{3}}][\epsilon_{32}^{-1}][\epsilon_{41}^{-1}][\epsilon_{31}^{1}][\epsilon_{12}]A \ .$$

Σημείωση 2.4.1. Η αναγωγή του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ σε κλιμακωτό A' γίνεται με τη χρήση αποκλειστικά των δύο τύπων στοιχειωδών πινάκων $[\epsilon_{ij}]$ και $[\epsilon_{31}^{\lambda}]$. Για την περαιτέρω αναγωγή σε *ανηγμένο κλιμακωτό* πολλαπλασιάζουμε τον A' με τους $m \times m$ στοιχειώδεις πίνακες $[\epsilon_i^{\frac{1}{p_i}}]$, όπου $\{p_i, i = 1..k\}$ οι οδηγοί του πίνακα.

Λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη σημείωση και καθώς ο κλιμακωτός πίνακας ενός $n \times n$ αντιστρέψιμου πίνακα A είναι ο διαγώνιος $diag(p_1, \dots, p_n)$ πίνακας των οδηγών του, συμπεραίνουμε, ότι κάνοντας μερικούς ακόμη πολλαπλασιασμούς με στοιχειώδεις πίνακες $[\epsilon_i^{\frac{1}{p_i}}]$, μπορούμε να γράψουμε τον ταυτοτικό πίνακα στη μορφή

$$I_n = [\epsilon_k] \dots [\epsilon_1]A \ \Rightarrow \ A^{-1} = [\epsilon_k] \dots [\epsilon_1] \ ,$$

όπου $\{[\epsilon_1], \dots, [\epsilon_k]\}$ είναι μια ακολουθία στοιχειωδών πινάκων. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.2. *Ένας αντιστρέψιμος πίνακας είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

Άσκηση 2.4.1. *Δείξε ότι για ένα πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ και διαγώνιους πίνακες $\{D = diag(p_1, \dots, p_m), D' = diag(q_1, \dots, q_n)\}$ ο DA έχει i-στη γραμμή το p_i πολλαπλάσιο της i-στης γραμμής του A, και ο AD' έχει j-στη στήλη το q_j πολλαπλάσιο της j-στης στήλης του A.*

Άσκηση 2.4.2. *Δείξε ότι για κάθε πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $B \in M_{\mathbb{F}}(m,m)$, έτσι ώστε ο $A' = BA$ να είναι ο κλιμακωτός πίνακας του A.*

Άσκηση 2.4.3. *Δείξε ότι οι ανάστροφοι των στοιχειωδών πινάκων είναι πάλι στοιχειώδεις πίνακες:*

$$[\epsilon_i^{\lambda}]^t = [\epsilon_i^{\lambda}] \ , \ [\epsilon_{ij}]^t = [\epsilon_{ij}] \ , \ [\epsilon_{ij}^{\lambda}]^t = [\epsilon_{ji}^{\lambda}]$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν επίσης για να κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις στηλών πινάκων. Πράγματι η $A' = EA$ με E στοιχειώδη πίνακα, συνεπάγεται την $(A')^t = A^t E^t$ και E^t επίσης στοιχειώδη πίνακα, ο οποίος πολλαπλασιάζει τώρα από τα δεξιά προξενώντας μια (στοιχειώδη) πράξη μεταξύ των *στηλών* του πίνακα A^t.

Σημείωση 2.4.2. Στην περίπτωση αντιστρεψίμων $n \times n$ πινάκων, όπου υπάρχουν μόνο κύριες στήλες, ο κλιμακωτός πίνακας A' παίρνει την μορφή διαγώνιου πίνακα των οδηγών:

$$A' \ = \ diag(p_1, \dots, p_n) \ = \ \begin{pmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Επίσης στην περίπτωση ενός $n \times k$ πίνακα A τάξης $k < n$, δηλ. πίνακα με ανεξάρτητες στήλες, η αναγωγή στον κλιμακωτό A' παράγει ένα πίνακα της μορφής $A' = \left(\frac{D_k}{O_{n-k,k}}\right)$, με $D_k = diag(p_1 \dots p_k)$ τον διαγώνιο πίνακα των οδηγών του A και $O_{n-k,k}$ τον $(n-k) \times k$ **μηδενικό πίνακα**.

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος χρησιμοποιεί αυτή τη σημείωση και δείχνει ότι οι στοιχειώδεις πίνακες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ώστε να βρούμε ένα πολύ απλό αντιπρόσωπο μιας κλάσης ισοδυναμίας πινάκων (§ 2.3).

Στο επόμενο θεώρημα αλλά και σε άλλα σημεία του μαθήματος χρησιμοποιούμε την έννοια του **μπλοκ**, που είναι ένας υποπίνακας κάποιου μεγαλύτερου πίνακα αποτελούμενος από τα στοιχεία στις διασταυρώσεις κάποιων διαδοχικών γραμμών και κάποιων διαδοχικών στηλών του μεγαλύτερου πίνακα.

Θεώρημα 2.4.3. *Συμβολίζοντας με $O_{p,q}$ του $p \times q$ μηδενικό πίνακα (παντού μηδενικά), κάθε πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ τάξης k είναι ισοδύναμος προς πίνακα με μπλοκ της μορφής*

$$I_k^{m,n} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & O_{k,n-k} \\ \hline O_{m-k,k} & O_{m-k,n-k} \end{array}\right). \tag{2.16}$$

Απόδειξη. Πράγματι, θεώρησε τον ανάστροφο $A^t \in M_{\mathbb{F}}(n,m)$ και ανάγαγέ τον στον κλιμακωτό με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, θέτοντας $k = rank(A) = rank(A^t)$:

$$([\epsilon_s] \dots [\epsilon_1])A^t = \left(\frac{B_{k,m}}{O_{n-k,m}}\right) \quad \Rightarrow$$
$$A([\epsilon_s] \dots [\epsilon_1])^t = (B_{k,m}^t | O_{n-k,m}^t) = (C_{m,k} | O_{m,n-k}).$$

Οι k γραμμές του $B_{k,m}$ φέρουν, κάθε μια και έναν οδηγό του A^t άρα είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς και οι στήλες του $C_{m,k} = B_{k,m}^t$ είναι ανεξάρτητες. Εφαρμόζοντας τώρα στοιχειώδεις πράξεις γραμμών $([\epsilon_{t'}] \dots [\epsilon_{1'}])$ στον $D = (C_{m,k} | O_{m,n-k})$ και λαμβάνοντας υπόψη την προηγούμενη σημείωση, παίρνουμε

$$([\epsilon_{t'}] \dots [\epsilon_{1'}])D = ([\epsilon_{t'}] \dots [\epsilon_{1'}])A([\epsilon_s] \dots [\epsilon_1])^t = I_k^{m,n}. \qquad \square$$

Πόρισμα 2.4.1. *Δύο πίνακες $A, B \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ είναι ισοδύναμοι, τότε και μόνον τότε, όταν έχουν την ίδια τάξη.*

Άσκηση 2.4.4. *Δείξε ότι η τάξη k του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ ισούται με του μέγιστο αριθμό ανεξαρτήτων στηλών, ο οποίος είναι και ίσος με του μέγιστο αριθμό ανεξαρτήτων γραμμών του A.*

Άσκηση 2.4.5. *Δείξε ότι ένας πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό μέσω πολλαπλασιασμού από τα αριστερά $f^A : M_{\mathbb{F}}(n,m) \to M_{\mathbb{F}}(n,m)$: $f^A(B) = AB$. Δείξε ότι αυτός είναι ισομορφισμός του $M_{\mathbb{F}}(n,m)$, τότε και μόνον τότε, όταν ο A είναι αντιστρέψιμος.*

Άσκηση 2.4.6. *Έστω $f : V_1 \to V_2$ γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων. Δείξε ότι υπάρχει μια βάση $\mathbf{a} = (A_1, \dots, A_n)$ του V_1 και μια βάση $\mathbf{b} = (B_1, \dots, B_m)$ του V_2, έτσι ώστε ο πίνακας παράστασης ${}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ του f ως προς αυτές τις βάσεις είναι της μορφής $I_k^{m,n}$, όπου k είναι η τάξη του f.*

Άσκηση 2.4.7. *Δείξε ότι ο κλιμακωτός A' του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένος.*

Υπόδειξη: Οι θέσεις $\{n_1 < \cdots < n_k\}$ των κυρίων στηλών, όπου k η τάξη του A, είναι μονοσήμαντα ορισμένες και οι δευτερεύουσες στήλες παριστάνονται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικοί συνδυασμοί των κυρίων.

Σημείωση 2.4.3. Για έναν $m \times n$ πίνακα A το **άνω αριστερά μπλοκ** $A_{[st]}$ αποτελείται από τα στοιχεία στις διασταυρώσεις των πρώτων s γραμμών και t στηλών (συμβολίζοντας με $(*_{m,n})$ $m \times n$ πίνακες των οποίων, προς στιγμήν, τα στοιχεία μας είναι αδιάφορα):

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{[st]} & (*_{s,n-t}) \\ \hline (*_{m-s,t}) & (*_{m-s,n-t}) \end{array}\right).$$

Σημειώνουμε ότι η αναγωγή σε κλιμακωτό του πίνακα A κάνει ταυτόχρονα την ίδια αναγωγή και σε κάθε άνω αριστερά μπλοκ $A_{[st]}$ του A, εφ' όσον βέβαια, η αναγωγή αυτή δεν περιλαμβάνει και εναλλαγές γραμμών (δηλ. $[\epsilon_{ij}]$ πολλαπλασιασμούς του A από τα αριστερά). Σ' αυτή την περίπτωση ο κλιμακωτός του $A_{[st]}$ είναι το αντίστοιχο άνω αριστερά μπλοκ $A'_{[st]}$ του κλιμακωτού A', και οι οδηγοί του $A_{[st]}$ είναι ακριβώς οι οδηγοί του A που περιέχονται στις πρώτες s γραμμές και πρώτες t στήλες.

Σχετικό με την σημείωση 2.4.2 είναι επίσης και ένα άλλο φαινόμενο που συνδέεται με στοιχειώδεις πίνακες. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τετραγωνικούς πίνακες $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$, των οποίων η αναγωγή σε κλιμακωτό A' δεν συμπεριλαμβάνει εναλλαγές γραμμών, δηλ. πολλαπλασιασμούς από τα αριστερά με στοιχειώδεις πίνακες της μορφής $[\epsilon_{ij}]$.

Σ' αυτή την περίπτωση η αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα περιλαμβάνει μόνο διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς του A από τα αριστερά με στοιχειώδεις πίνακες της μορφής $[\epsilon_{ij}^{\lambda}]$ με $i > j$. Αυτό σημαίνει ότι κάνουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών προσθέτοντας/αφαιρώντας από τις κατώτερες γραμμές κάποιο πολλαπλάσιο γραμμής που βρίσκονται πιο πάνω απ' αυτές. Έτσι, η αναγωγή σε κλιμακωτό γίνεται μέσω πολλαπλασιασμών με τέτοιους πίνακες και παίρνουμε τον κλιμακωτό $A' = [\epsilon_{i_1 j_1}^{\lambda_1}] \dots [\epsilon_{i_k j_k}^{\lambda_k}]A$, με όλους τους δείκτες να ικανοποιούν $\{i_1 > j_1, \dots, i_k > j_k\}$.

Πίνακες $[\epsilon_{ij}^{\lambda}]$ με $i > j$ είναι τυπικά παραδείγματα **κάτω τριγωνικών** πινάκων, δηλ. πινάκων $A = (a_{ij}) \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ με $a_{kl} = 0$ για όλα τα ζεύγη δεικτών που ικανοποιούν την $k < l$, όπως τα επόμενα παραδείγματα.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Δεν ενδιαφέρει τι στοιχεία είναι στην διαγώνιο ή κάτω απ' αυτή. Ο μόνος περιορισμός είναι $a_{kl} = 0$ για $k < l$. Ανάλογα ορίζονται οι **άνω τριγωνικοί πίνακες** $A = (a_{ij}) \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ με $a_{kl} = 0$ για κάθε $k > l$, όπως τα επόμενα παραδείγματα.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 2.4.4. *Οι άνω/κάτω τριγωνικοί πίνακες έχουν τις ιδιότητες:*

1. *Ο ανάστροφος ενός άνω/κάτω τριγωνικού πίνακα είναι ένας κάτω/άνω τριγωνικός.*
2. *Το γινόμενο δύο άνω/κάτω τριγωνικών πινάκων είναι πίνακας του ιδίου είδους.*
3. *Ο άνω/κάτω τριγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, όταν ακριβώς τα διαγώνια στοιχεία του είναι μη-μηδενικά.*
4. *Ο αντίστροφος ενός άνω/κάτω τριγωνικού πίνακα είναι του ιδίου είδους.*

Απόδειξη. *Nr-1* : είναι προφανής συνέπεια των ορισμών.

Nr-2 : για κάτω τριγωνικούς πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ η ιδιότητα έπεται αμέσως θεωρώντας το $(AB)_{ij}$ στοιχείο του γινομένου. Πράγματι, είναι $(AB)_{ij} = r_i^A \cdot c_j^B$ (παρατήρηση 2.2.1). Από την κάτω-τριγωνική υπόθεση, η γραμμή r_i^A έχει τα στοιχεία της $\{a_{ik} = 0\}$ για όλα τα $k > i$ και η στήλη c_j^B έχει όλα τα στοιχεία της $\{b_{kj} = 0\}$ για $k < j$. Έτσι,

$$\text{για} \quad i < j \quad \text{στο} \quad r_i^A \cdot c_j^B = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj} = 0 \ .$$

Η απόδειξη για άνω τριγωνικούς πίνακες είναι εντελώς ανάλογη.

Nr-3 : είναι συνέπεια του θεωρήματος 2.2.2, αφού ο άνω τριγωνικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ έχει n οδηγούς, όταν ακριβώς τα διαγώνια στοιχεία του είναι μη-μηδενικά. Ο κάτω τριγωνικός όντας ο ανάστροφος ενός άνω τριγωνικού με τα ίδια διαγώνια στοιχεία είναι αντιστρέψιμος, όταν ο ανάστροφός του είναι αντιστρέψιμος.

Nr-4 : για έναν άνω τριγωνικό A η ιδιότητα προκύπτει από το ότι ο πίνακας ταυτίζεται με τον κλιμακωτό του (1.9) και ο αντίστοιχος κλιμακωτός είναι ο διαγώνιος των οδηγών του $diag(p_1, \dots, p_n)$. Αυτός προκύπτει με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς του A από τα αριστερά με στοιχειώδεις πίνακες $\{[\epsilon_1], \dots, [\epsilon_k]\}$ της μορφής $[\epsilon_{ij}^{\lambda}]$ με $i < j$, που είναι όλοι άνω τριγωνικοί (θεώρημα 2.4.1). Συνεπώς έχει τη μορφή

$$diag(p_1, \dots, p_n) \ = \ [\epsilon_k] \dots [\epsilon_1] A \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = diag(p_1^{-1}, \dots, p_n^{-1})[\epsilon_k] \dots [\epsilon_1] \ .$$

Αυτός, κατά το *nr-2*, αποδεικνύει τον ισχυρισμό για άνω τριγωνικούς πίνακες. Η απόδειξη για κάτω τριγωνικούς προκύπτει ανάλογα, ή εναλλακτικά, παίρνοντας τους ανάστροφους πίνακες στις προηγούμενες σχέσεις. □

Άσκηση 2.4.8. *Δείξε ότι το γινόμενο δύο άνω τριγωνικών πινάκων $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ είναι άνω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία τα γινόμενα αντιστοίχων στοιχείων των δύο πινάκων:*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix},$$

ανάλογη ιδιότητα ισχύουσα και για κάτω τριγωνικούς πίνακες.

Η προηγούμενη συζήτηση οδηγεί και σε ένα άλλο συμπέρασμα για τετραγωνικούς πίνακες, των οποίων η αναγωγή σε κλιμακωτό δεν συμπεριλαμβάνει εναλλαγές γραμμών. Σ' αυτή την περίπτωση πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ ο αντίστοιχος κλιμακωτός A' ευρίσκεται με διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς από αριστερά με στοιχειώδεις πίνακες $\{[\epsilon_1], \dots, [\epsilon_k]\}$ της μορφής $[\epsilon_{ij}^{\lambda}]$ με $i > j$:

$$A' \ = \ [\epsilon_k] \dots [\epsilon_1] A \ = \quad \Rightarrow \quad A = [\epsilon_1]^{-1} \dots [\epsilon_k]^{-1} A' \ = \ LA'.$$

Οι πίνακες $\{[\epsilon_i]\}$ είναι όλοι κάτω τριγωνικοί και ο $L = [\epsilon_k]^{-1} \dots [\epsilon_1]^{-1}$ είναι επίσης κάτω τριγωνικός. Επιπλέον, κατά την άσκηση 2.4.8 επειδή όλοι οι $\{[\epsilon_i]\}$ έχουν διαγώνια στοιχεία 1, ο πίνακας L έχει επίσης τα διαγώνια στοιχεία του ίσα με 1.

Τώρα, ο ανηγμένος κλιμακωτός A' είναι ένας άνω τριγωνικός με τα διαγώνια στοιχεία του $\{d_1, \dots, d_n\}$ ταυτιζόμενα με τους οδηγούς των αντιστοίχων γραμμών, ή 0 για γραμμές που δεν έχουν οδηγό. Συνεπώς ο πίνακας μπορεί να γραφεί, στη μορφή γινομένου ενός διαγώνιου πίνακα και ενός άνω τριγωνικού πίνακα:

$$A' = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = LDU ,$$

όπου $\{L, U\}$ είναι αντίστοιχα κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες με μονάδες στα διαγώνια στοιχεία τους και D διαγώνιος πίνακας. Αποδείξαμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.5 (LDU διάσπαση)**.** *Κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$, του οποίου η αναγωγή σε κλιμακωτό δεν περιλαμβάνει εναλλαγές γραμμών, μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο $A = LDU$, όπου $\{L, U\}$ είναι αντίστοιχα κάτω και άνω τριγωνικοί πίνακες με 1 στις διαγωνίους τους και D είναι διαγώνιος πίνακας.*

Άσκηση 2.4.9. *Επαλήθευσε την $A = LDU$ διάσπαση:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 15 & 6 \\ 2 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2.4.10. *Δείξε ότι αν ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε η διάσπαση $A = LDU$ είναι μοναδική, δηλ. η $LDU = L'D'U'$ συνεπάγεται τις ισότητες $\{L = L', D = D', U = U'\}$.*

2.5 Χώρος πηλίκον

> Εκεί όπου ο διαβήτης, η γωνία και ο χάρακας είναι στραβοί, όλες οι διαστάσεις που βγάζουν, όλα τα οικοδομήματα που υψώνονται κατά το μέτρο τους, είναι εξ ανάγκης ατελή και ελλειπή.
>
> *M. de Montaigne, Απολογία του Ραιμόν Σεμπόν*

Ορισμός 2.5.1. Δοθέντος $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V και διανυσματικού υποχώρου του $W \subset V$ ο **χώρος πηλίκον** του V ως προς W, που συμβολίζεται με V/W, είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του V που ονομάζονται **επισύνολα** και είναι της μορφής:

$$[X]_W = X + W = \{X + Y \ , \ Y \in W\} \subset V, \quad \text{για} \quad X \in V. \tag{2.17}$$

Παράδειγμα 2.5.1. Θεώρησε τον πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$ και το μη-ομογενές σύστημα εξισώσεων $AX = B$, με $X \in \mathbb{F}^n$ και $B \in \mathbb{F}^m$. Το σύνολο όλων των λύσεων

αυτού του συστήματος είναι το *επισύνολο* $[S]_W = S + W$, όπου το S είναι μια λύση του συστήματος και W είναι ο μηδενόχωρος του συστήματος δηλ. ο διανυσματικός υπόχωρος $W \in \mathbb{F}^n$ όλων των λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $AX = 0$ (θεώρημα 1.7.2).

Θεώρημα 2.5.1. *Ισχύει* $[X]_W = [X']_W \quad \Leftrightarrow \quad X - X' \in W$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $X - X' \in W$ τότε κάθε διάνυσμα $X + Y$ με $Y \in W$ γράφεται στη μορφή $X' + (X - X') + Y = X' + Y', Y' \in W$ και αντίστροφα, το οποίο δείχνει ότι τα σύνολα $X + W = X' + W$ ταυτίζονται. Αντίστροφα, η τελευταία σχέση δείχνει ότι για κάθε $Y \in W$ υπάρχει ένα άλλο $Y' \in W$ έτσι ώστε $X + Y = X' + Y'$, που συνεπάγεται την $X - X' = Y' - Y \in W$. □

Άσκηση 2.5.1. *Για του διανυσματικό υπόχωρο W του διανυσματικού χώρου V όρισε τη σχέση διανυσμάτων $\{X, Y \in V\}$:*

$$X \sim Y \quad \Leftrightarrow \quad X - Y \in W \ . \tag{2.18}$$

Δείξε ότι αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας και οι κλάσεις της συμπίπτουν με τα επισύνολα $\{[X]_W\}$.

Άσκηση 2.5.2. *Δείξε ότι, θέτοντας*

$$[X]_W + [Y]_W = [X + Y]_W \quad \textit{και} \quad \lambda[X]_W = [\lambda X]_W \ ,$$

ορίζονται πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με αριθμό οι οποίες κάνουν του V/W διανυσματικό χώρο. Ταυτοποίησε το μηδενικό στοιχείο αυτού του διανυσματικού χώρου με το $[O]_W = W$.

Ορισμός 2.5.2. Η απεικόνιση $p_W : V \to V/W$ που αντιστοιχίζει στο X το επισύνολό του $p_W(X) = [X]_W$ λέγεται **προβολή στο χώρο πηλίκον**.

Άσκηση 2.5.3. *Δείξε ότι η προβολή στο χώρο πηλίκου $p_W : V \to V/W$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός με πυρήνα $Kern(p_W) = W$ και εικόνα $Im(p_W) = V/W$, δηλ. η p_W είναι* **επιρριπτικός μετασχηματισμός** *ή* **επίρριψη** .

Άσκηση 2.5.4. *Έστω $f : V_1 \to V_2$ γραμμικός μετασχηματισμός μεταξύ $\mathbb{F}$-διανυσματικών χώρων. Δείξε ότι για του υπόχωρο $W = Kern(f) \subset V_1$ και την αντίστοιχη προβολή $p_W : V_1 \to V_1/W$ υπάρχει μετασχηματισμός 1-1 (ενριψη) $\tilde{f} : V_1/W \to V_2$ έτσι ώστε $f = \tilde{f} \circ p_W$ (δες το επόμενο διάγραμμα).*

$$\begin{tikzcd}
 & V_1/W \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\
V_1 \arrow[ur, "p_W"] \arrow[rr, "f=\tilde{f}\circ p_W"] & & V_2
\end{tikzcd}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εσωτερικά γινόμενα

3.1 Ερμιτιανό γινόμενο

> Το να δώσεις όνομα σ' ένα πράγμα ισοδυναμεί με το να του αφαιρέσεις τα τρία τέταρτα της απόλαυσης ενός ποιήματος. Αυτή η απόλαυση συνίσταται στο να μαντέψεις σιγά σιγά. Το ιδανικό είναι να το υποβάλλεις στη σκέψη.
>
> *S. Mallarmé*

Σε αυτή και την επόμενη παράγραφο ασχολούμεθα με μιγαδικούς $\mathbb{C}$- και πραγματικούς $\mathbb{R}$-διανυσματικούς χώρους. Καθώς το $\mathbb{R}$ είναι υπόσωμα του $\mathbb{C}$, και οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικοί μιγαδικοί αριθμοί, οι μιγαδικοί διανυσματικοί χώροι είναι ταυτόχρονα και πραγματικοί διανυσματικοί χώροι.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $\overline{z}$ τον *συζυγή* $\overline{z} = a - ib$ του μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$, με $Re(z) = a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ και $Im(z) = b = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ το *πραγματικό μέρος* και αντίστοιχα το *φανταστικό μέρος* του μιγαδικού αριθμού. Επίσης το $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ θα συμβολίζει το **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** του μιγαδικού αριθμού (για περισσότερα στους μιγαδικούς αριθμούς δες [11, σ. 57]).

Τυπικό παράδειγμα μιγαδικού διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο $\mathbb{C}^n$ όλων των n-δων $\{Z = (z_1, \dots, z_n)\}$ μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 3.1.1. Ορίζουμε το **σύνηθες** ή **κανονικό Ερμιτιανό** εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $X, Y \in \mathbb{C}^n$ μέσω της παράστασης

$$X \cdot Y = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n \ . \tag{3.1}$$

Διαπιστώνουμε αμέσως τις ιδιότητες:

1. $Y \cdot X = \overline{X \cdot Y}$ για κάθε $\{X, Y \in \mathbb{C}^n\}$.
2. $(aX) \cdot (bY) = a\overline{b}(X \cdot Y)$ για κάθε $\{a, b \in \mathbb{C}\}$ και κάθε $\{X, Y \in \mathbb{C}^n\}$.
3. $(X + Y) \cdot Z = X \cdot Z + Y \cdot Z$ και $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ για κάθε $\{X, Y, Z \in \mathbb{C}^n\}$.

4. $X \cdot X = x_1\overline{x}_1 + \cdots + x_n\overline{x}_n > 0$ για $X \neq O$.

Ο πραγματικός αριθμός $\|X\| = \sqrt{X \cdot X}$ λέγεται **μέτρο** ή **νόρμα** του διανύσματος $X \in \mathbb{C}^n$. Ένα διάνυσμα με $\|X\| = 1$ λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**. Από κάθε διάνυσμα $X \neq O \Rightarrow \frac{1}{\|X\|}X$ προκύπτει ένα μοναδιαίο διάνυσμα.

Δύο διανύσματα που ικανοποιούν την εξίσωση

$$X \cdot Y = 0 , \tag{3.2}$$

λέγονται **ορθογώνια**. Δοθέντος υποσυνόλου $\mathbf{a} \subset \mathbb{C}^n$ το σύνολο των διανυσμάτων $Y \in \mathbb{C}^n$ που είναι ορθογώνια σε κάθε διάνυσμα $X \in \mathbf{a}$ λέγεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του συνόλου $\mathbf{a}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{a}^\perp$, δηλ.

$$X \in \mathbf{a}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad X \cdot Y = 0 \quad \text{για κάθε} \quad Y \in \mathbf{a} .$$

Άσκηση 3.1.1. *Δείξε ότι το ορθογώνιο συμπλήρωμα* $\mathbf{a}^\perp$ *του υποσυνόλου* $\mathbf{a} \subset \mathbb{C}^n$ *είναι διανυσματικός υπόχωρος του* $\mathbb{C}^n$.

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n$ εφοδιασμένος με το *κανονικό Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο* λέγεται **κανονικός Ερμιτιανός** ή **κανονικός μοναδιαίος** διανυσματικός χώρος.

Θεώρημα 3.1.1 (Ανισότητα του Schwarz)**.** *Για δύο διανύσματα* $\{X, Y \in \mathbb{C}^n\}$ *ισχύει*

$$|X \cdot Y|^2 \leq \|X\|^2\|Y\|^2, \tag{3.3}$$

και η ισότητα ισχύει όταν ακριβώς τα $\{X, Y\}$ *είναι εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Πράγματι, εάν $Y \neq O$ θεωρούμε το διάνυσμα $Z = X - \frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y$. Χρησιμοποιώντας τους κανόνες 1 έως 4, έχουμε

$$\begin{gathered} 0 \leq Z \cdot Z = \left(X - \frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y\right) \cdot \left(X - \frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y\right) = \\ X \cdot X - \left(\frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y \cdot X\right) - \left(X \cdot \frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y\right) + \left(\frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y \cdot \frac{X \cdot Y}{\|Y\|^2}Y\right) = \\ \|X\|^2 - \frac{|X \cdot Y|^2}{\|Y\|^2} - \frac{|X \cdot Y|^2}{\|Y\|^2} + \frac{|X \cdot Y|^2}{\|Y\|^2} = \|X\|^2 - \frac{|X \cdot Y|^2}{\|Y\|^2} . \end{gathered}$$

Αυτό συνεπάγεται την ανισότητα. Εάν ισχύει η ισότητα και $Y \neq O$, τότε $\|Z\|^2 = 0$ $\Rightarrow Z = O$ δείχνει ότι τα $\{X, Y\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Θεώρημα 3.1.2 (Τριγωνική ανισότητα)**.** *Για δύο διανύσματα* $\{X, Y \in \mathbb{C}^n\}$ *ισχύει*

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| , \tag{3.4}$$

και η ισότητα ισχύει όταν ακριβώς τα $\{X, Y\}$ *είναι εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Πράγματι, χρησιμοποιώντας ξανά τους κανόνες 1 έως 4 έχουμε

$$\begin{gathered} \|X + Y\|^2 = (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot X + Y \cdot Y + X \cdot Y + Y \cdot X = \\ \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2Re(X \cdot Y) \leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2|X \cdot Y| \leq \\ \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\|\|Y\| = (\|X\| + \|Y\|)^2 . \end{gathered}$$

Στη μεσαία γραμμή χρησιμοποιήσαμε για το $z = a + ib$ το σύμβολο για το **πραγματικό μέρος** $Re(z) = a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ του μιγαδικού αριθμού καθώς και το γεγονός ότι $a \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την παραπάνω ανισότητα του Schwarz. Εάν η τριγωνική ανισότητα γίνει ισότητα, τότε όλες οι ενδιάμεσες ανισότητες του προηγούμενου συλλογισμού μετατρέπονται σε ισότητες. Ειδικά, έχουμε ότι $|X \cdot Y| = \|X\|\|Y\|$, που κατά το θεώρημα 3.1.1 συνεπάγεται ότι τα $\{X, Y\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. □

Πόρισμα 3.1.1. *Για δύο ορθογώνια διανύσματα* $\{X, Y\}$ *ισχύει το* **Πυθαγόρειο θεώρημα**

$$\|X + Y\|^2 \;=\; \|X\|^2 + \|Y\|^2 \qquad (\textit{όταν}\;\; X \cdot Y = 0)\;. \tag{3.5}$$

Άσκηση 3.1.2. *Δείξε την ανισότητα* $\quad \big|\|X\| - \|Y\|\big| \leq \|X - Y\| \quad$ *για κάθε* $\{X, Y \in \mathbb{C}^n\}$.

Υπόδειξη: $\|X\| = \|X - Y + Y\| \leq \|X - Y\| + \|Y\| \;\;\Rightarrow\;\; \|X\| - \|Y\| \leq \|X - Y\|$, κτλ.

Ορισμός 3.1.2. Γενικότερα, ένας $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με ένα **Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο** $X \cdot Y$ λέγεται **Ερμιτιανός** ή **μοναδιαίος** διανυσματικός χώρος. Εδώ το $X \cdot Y$ συμβολίζει ένα **γινόμενο** που αντιστοιχεί σε δύο διανύσματα $\{X, Y \in V\}$ ένα μιγαδικό αριθμό $z = X \cdot Y$ με τις τυπικές ιδιότητες 1 έως 4 του ορισμού 3.1.1. Σ' αυτή την γενίκευση η ιδιότητα 4. πρέπει να τροποποιηθεί στην:

$4'$. $X \cdot X \geq 0$ για κάθε $X \in V$ και $X \cdot X = 0$ όταν ακριβώς $X = O$.

Άσκηση 3.1.3. *Δείξε ότι το διάνυσμα* X *του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου* V *ισούται με* O, *τότε και μόνον τότε, όταν* $X \cdot Y = 0$ *ισχύει για κάθε άλλο διάνυσμα* $Y \in V$.

Σημείωση 3.1.1. Στο $\mathbb{C}^n$ είχαμε έναν απλό τρόπο (τον τύπο 3.1) για να **ορίσουμε** ένα συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο. Σε ένα γενικό Ερμιτιανό διανυσματικό χώρο υποθέτουμε ότι κάποιος όρισε μια συνταγή που παράγει ένα *εσωτερικό γινόμενο* που ικανοποιεί αυτές τις 4 συνθήκες. Καθώς οι έννοιες και οι ιδιότητες που ορίσαμε ως τώρα εξαρτώνται αποκλειστικά από τις γενικές ιδιότητες 1 έως 4 του ορισμού και όχι από την συγκεκριμένη παράστασή τους, όλες αυτές περνάνε ως έχουν στον γενικό ορισμό. Έτσι, οι έννοιες του **μέτρου**, **μοναδιαίου διανύσματος**, και της **ορθογωνιότητας δύο διανυσμάτων** περνάνε τυπικά και στην γενική περίπτωση. Το ίδιο ισχύει και για τις αποδείξεις της **ανισότητας του Schwarz** της **τριγωνικής ανισότητας** και του **Πυθαγόρειου θεωρήματος**. Όλα αυτά ισχύουν τυπικά και στους γενικούς Ερμιτιανούς διανυσματικούς χώρους.

Στη συνέχεια ασχολούμεθα με γενικούς Ερμιτιανούς χώρους. Ωστόσο μπορεί κανείς να έχει στο μυαλό του τον κανονικό Ερμιτιανό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$. Τό υπόλοιπο αυτής της παραγράφου δείχνει ότι ο *κανονικός* $\mathbb{C}^n$ και ο *γενικός* n-διάστατος Ερμιτιανός διανυσματικός χώρος συνδέονται στενά.

Ορισμός 3.1.3. Το σύνολο των διανυσμάτων $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ενός Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V λέγεται **ορθοκανονικό** όταν ικανοποιεί τις συνθήκες

$$A_i \cdot A_i \;=\; 1 \quad \text{και} \quad A_i \cdot A_j = 0 \quad \text{για κάθε} \quad i = 1..n\;,\; j = 1..n\;. \tag{3.6}$$

Με άλλα λόγια: αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα, ανά δύο ορθογώνια. Μια βάση του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου λέγεται **ορθοκανονική** όταν είναι ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων.

Παράδειγμα 3.1.1. Η **κανονική βάση** $E = \{E_1, \dots, E_n\}$ του $\mathbb{C}^n$ αποτελεί μια ορθοκανονική βάση.

Η εύρεση των συντεταγμένων ενός διανύσματος $Z = z_1 A_1 + \cdots + z_n A_n$ ως προς μια βάση απαιτεί συνήθως τη λύση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων σαν την (1.1). Ωστόσο για *ορθοκανονικές* βάσεις η εύρεση των συντεταγμένων $\{z_i\}$ είναι άμεση:

Θεώρημα 3.1.3. *Οι συντεταγμένες του διανύσματος $Z = z_1 A_1 + \cdots + z_n A_n$ ως προς την ορθοκανονική βάση του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V δίδονται από τις εξισώσεις:*

$$z_i = Z \cdot A_i \ , \quad \textit{για} \quad i = 1..n \ . \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει αμέσως από την:

$$Z \cdot A_i = (z_1 A_1 + \cdots + z_n A_n) \cdot A_i = z_1 (A_1 \cdot A_i) + \dots z_n (A_n \cdot A_i) = z_i .$$

Σ' αυτή την παράσταση, εξ υποθέσεως, όλα τα εσωτερικά γινόμενα μηδενίζονται εκτός του $(A_i \cdot A_i) = 1$. □

Πόρισμα 3.1.2. *Τα διανύσματα ενός ορθοκανονικού συνόλου $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ είναι ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν ήταν $Z = z_1 A_1 + \cdots + z_n A_n = O$, τότε πολλαπλασιάζοντας με A_i θα παίρναμε $Z \cdot A_i = z_i = 0$ για κάθε $i = 1..n$. □

Ορισμός 3.1.4. Για ένα ορθοκανονικό σύνολο $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ και ένα διάνυσμα Z του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V, το διάνυσμα

$$p_{\mathbf{a}}(Z) = (Z \cdot A_1) A_1 + \cdots + (Z \cdot A_n) A_n \tag{3.8}$$

λέγεται **ορθογώνια προβολή** του Z στον παραγόμενο υπόχωρο $\langle \mathbf{a} \rangle = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$. Τα διανύσματα $Z \in V$ με $p_{\mathbf{a}}(Z) = O$ λέγονται **ορθογώνια στον παραγόμενο υπόχωρο** $\langle \mathbf{a} \rangle$. Αυτά αποτελούν υπόχωρο του V που συμβολίζεται με $\langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}$ και ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του $\langle \mathbf{a} \rangle$.

Το γεγονός ότι ο $\langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V προκύπτει άμεσα, είτε επαληθεύοντας κατευθείαν τις ιδιότητες του υποχώρου (άσκηση 1.4.3) είτε δείχνοντας ότι η ορθογώνια προβολή $p_{\mathbf{a}} : V \to \langle \mathbf{a} \rangle$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και ο υπόχωρος $\langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} = p_{\mathbf{a}}^{-1}(\{O\})$ είναι ο πυρήνας του.

Αυτός ο γραμμικός μετασχηματισμός είναι επίσης **αδύναμος**, δηλ. ικανοποιεί την συνθήκη

$$p_{\mathbf{a}}^2 = p_{\mathbf{a}} \quad \text{δηλ.} \quad p_{\mathbf{a}}(p_{\mathbf{a}}(Z)) = p_{\mathbf{a}}(Z) \ , \tag{3.9}$$

που αποδεικνύεται εύκολα δείχνοντας ότι για $Z \in \langle \mathbf{a} \rangle$ είναι $p_{\mathbf{a}}(Z) = Z$.

Πόρισμα 3.1.3. *Δοθέντος ορθοκανονικού συνόλου $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V, οι υπόχωροι $\{\langle \mathbf{a} \rangle, \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}\}$ έχουν τομή $\langle \mathbf{a} \rangle \cap \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} = \{O\}$, και κάθε διάνυσμα $Z \in V$ μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν άθροισμα*

$$Z \ = \ Z_1 \ + \ Z_2 \quad \textit{με} \quad Z_1 \in \langle \mathbf{a} \rangle \quad \textit{και} \quad Z_2 \in \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} \ . \tag{3.10}$$

Απόδειξη. Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής. Πράγματι, αν $Z \in \langle \mathbf{a} \rangle \cap \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}$, τότε το Z είναι ορθογώνιο στον εαυτό του: $Z \cdot Z = 0$, που συνεπάγεται $Z = 0$. Για την δεύτερη ιδιότητα, όρισε την προβολή του Z στον υπόχωρο $\langle \mathbf{a} \rangle$: $Z_1 = p_{\boldsymbol{a}}(Z)$, και θεώρησε τη διαφορά $Z_2 = Z - Z_1$. Τότε προφανώς $Z = Z_1 + Z_2$. Το γεγονός ότι τα $\{Z_1, Z_2\}$ είναι μοναδικά προκύπτει επίσης εύκολα. Πράγματι, υπόθεσε ότι

$$Z = Z_1 + Z_2 \quad \text{και επίσης} \quad Z = Z_1' + Z_2' \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{a} \rangle \ni Z_1 - Z_1' = Z_2 - Z_2' \in \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} .$$

Αυτό σημαίνει ότι $X = Z_1 - Z_1' = Z_2 - Z_2' \in \langle \mathbf{a} \rangle \cap \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} = \{O\} \Rightarrow$

$$X = O \Rightarrow Z_1 = Z_1' \ , \ Z_2' = Z_2 \ . \qquad \square$$

Παράδειγμα 3.1.2. Θεώρησε στον $\mathbb{C}^n$ τον παραγόμενο υπόχωρο $\langle \mathbf{a} \rangle$ από τα πρώτα k διανύσματα της κανονικής βάσης: $\mathbf{a} = \{E_1, \dots, E_k\}$ για $0 < k < n$. Τότε για το $Z = (z_1, \dots, z_n)$: $p_{\boldsymbol{a}}(Z) = z_1 E_1 + \dots z_k E_k$ και ο $\langle \mathbf{a} \rangle$ είναι ο υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$ που χαρακτηρίζεται από τον μηδενισμό των τελευταίων $n-k$ συντεταγμένων, και ανάλογα ο $\langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{a} \rangle &= \{Z \in \mathbb{C}^n \quad \text{με} \quad z_{k+1} = \dots = z_n = 0\} \quad \text{και} \\ \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} &= \{Z \in \mathbb{C}^n \quad \text{με} \quad z_1 = \dots = z_k = 0\} \quad \Leftrightarrow \quad Z \in \langle E_{k+1}, \dots, E_n \rangle \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.1.4 (Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt)**.** *Δοθέντων των ανεξαρτήτων διανυσμάτων $\{A_1, \dots, A_k\}$ του n-διάστατου Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V με $k \leq n$, υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{C_1, \dots, C_k\}$ με διαδοχικά ίσους παραγόμενους υποχώρους:*

$$\langle C_1 \rangle = \langle A_1 \rangle \ , \ \langle C_1, C_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle \ , \ \dots \ , \ \langle C_1, \dots, C_k \rangle = \langle A_1, \dots, A_k \rangle \ . \qquad (3.11)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά, ξεκινώντας από το $C_1 = \frac{1}{\{A_1\}} A_1$. Κατόπιν πάμε στο $B_2 = A_2 - (A_2 \cdot C_1) C_1$. Προφανώς $B_2 \cdot C_1 = 0$, δηλ. το B_2 είναι ορθογώνιο στο C_1 και επίσης $\langle B_2, C_1 \rangle = \langle A_2, A_1 \rangle$. Όρισε λοιπόν το $C_2 = \frac{1}{\|B_2\|} B_2$. Τότε $\mathbf{c}_2 = \langle C_1, C_2 \rangle = \langle A_1, A_2 \rangle$ και το $\{C_1, C_2\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Θεώρησε τώρα ότι ισχύει η επαγωγική υπόθεση για το ήδη κατασκευασμένο ορθογώνιο σύνολο $\{C_1, \dots, C_i\}$ με ισότητα των αντιστοίχων παραγόμενων χώρων:

$$\langle \mathbf{c_i} \rangle = \langle C_1, \dots, C_i \rangle \ = \ \langle A_1, \dots, A_i \rangle = \langle \mathbf{a_i} \rangle \ .$$

Προχωράμε στην κατασκευή του του ορθοκανονικού συνόλου και αντίστοιχου παραγόμενου χώρου $\langle \mathbf{c_{i+1}} \rangle = \langle \mathbf{a_{i+1}} \rangle$, προσθέτοντας στα προηγούμενα $\{C_1, \dots, C_i\}$ ένα νέο μοναδιαίο διάνυσμα C_{i+1}. Προς τούτο προβάλλουμε το A_{i+1} στο $A_{i+1}' \in \langle \mathbf{c_i} \rangle$, έτσι ώστε το $B_{i+1} = A_{i+1} - A_{i+1}' \in \langle \mathbf{c_i} \rangle^{\perp}$ και προφανώς το $B_{i+1} \in \langle \mathbf{a_{i+1}} \rangle$. Κατόπιν παίρνουμε το $C_{i+1} = \frac{1}{\|B_{i+1}\|} B_{i+1}$. Βλέπουμε εύκολα ότι το $\mathbf{c_{i+1}} = \{C_1, \dots, C_{i+1}\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο και οι παραγόμενοι υπόχωροι ταυτίζονται $\langle \mathbf{c_{i+1}} \rangle = \langle \mathbf{a_{i+1}} \rangle$, πράγμα που ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. $\square$

Άσκηση 3.1.4. *Δείξε ότι το $B_{i+1} = A_{i+1} - A_{i+1}'$, που εμφανίζεται στην προηγούμενη απόδειξη, είναι μη-μηδενικό διάνυσμα.*

Σημείωση 3.1.2. Στην ειδική περίπτωση μιας βάσης, το θεώρημα δείχνει ότι, ξεκινώντας από μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ενός Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V,

μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{c} = \{C_1, \dots, C_n\}$ με διαδοχικούς ταυτιζόμενους παραγόμενους υπόχωρους $\{\langle \mathbf{c_1} \rangle = \langle \mathbf{a_1} \rangle, \langle \mathbf{c_2} \rangle = \langle \mathbf{a_2} \rangle, \dots\}$.

Ειδικά, αποδεικνύεται μ' αυτό η ύπαρξη **ορθοκανονικών βάσεων**.

Σημειώνουμε επίσης, το ότι η ισότητα των διαδοχικά παραγόμενων υποχώρων αντανακλά στη μορφή του πίνακα M που εκφράζει την αλλαγή των βάσεων, από την $\mathbf{a}$ στην αντίστοιχη ορθοκανονική $\mathbf{c}$, οι στήλες του M που παριστάνουν τις συντεταγμένες των $\{C_i\}$ ως προς τα $\{A_i\}$ είναι:

$$\mathbf{c} \;=\; \mathbf{a} \cdot M \quad \text{με} \quad M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Δηλαδή ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός: όλα τα στοιχεία του κάτω από τη διαγώνιο μηδενίζονται. Τα άστρα δηλώνουν κάποιους μιγαδικούς αριθμούς, και τα μηδενικά εμφανίζονται διότι τα διανύσματα $\{C_1, \dots, C_i\}$, και ειδικά το τελευταίο C_i, εξαρτάται μόνο από τα διανύσματα $\{A_1, \dots, A_i\}$. Επίσης τα διαγώνια στοιχεία $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ είναι θετικοί αριθμοί. Πράγματι, αναφερόμενοι στο συμβολισμό της απόδειξης του θεωρήματος 3.1.4, έχουμε $\lambda_1 = \frac{1}{\|A_1\|}$ και γενικότερα $\lambda_i = \frac{1}{\|B_i\|}$ για $i = 2..n$.

Σημείωση 3.1.3. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του θεωρήματος 2.2.1 για μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V, βλέπουμε ότι ο αντίστοιχος ισομορφισμός $\mathring{\mathbf{a}} : \mathbb{C}^n \to V$ διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών χώρων, με την έννοια ότι

$$X \cdot Y \;=\; \mathring{\mathbf{a}}(X) \cdot \mathring{\mathbf{a}}(Y) \quad \text{για κάθε} \quad X, Y \in \mathbb{C}^n\,. \tag{3.13}$$

Εδώ η τελεία στην αριστερή πλευρά συμβολίζει το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$ και η τελεία στη δεξιά πλευρά συμβολίζει το εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού χώρου V. Πράγματι, γράφοντας

$$X = \sum_i x_i E_i \quad \Rightarrow \quad \mathring{\mathbf{a}}(X) = \sum_i x_i A_i \quad \Rightarrow$$
$$X \cdot Y \;=\; \sum_i x_i \overline{y}_i \;=\; \left(\sum_i x_i A_i\right) \cdot \left(\sum_i y_i A_i\right),$$

καθώς $\{A_i \cdot A_j = 0\}$ για $i \neq j$ και $A_i \cdot A_i = 1$. Ειδικά, παίρνοντας στην εξίσωση (3.13) $Y = X$, βλέπουμε ότι

$$\|\mathring{\mathbf{a}}(X)\| = \|X\|\,. \tag{3.14}$$

Παράδειγμα 3.1.3. Για τα $A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1-i \\ -i \\ i \end{pmatrix}$ διανύσματα του $\mathbb{C}^3$ ας κάνουμε την ορθοκανονικοποίηση κατά Gram-Schmidt. Με το συμ-

βολισμό του ομώνυμου θεωρήματος 3.1.4 έχουμε:

$$\|A_1\| = \sqrt{3} \ , \ \ C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\ i\\ 1\end{pmatrix} ,$$

$$B_2 = A_2 - (A_2\cdot C_1)C_1 \ = \ A_2 - \frac{1+2i}{\sqrt{3}}C_1 \ = \ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+i\\ -1-i\\ -1-2i\end{pmatrix} ,$$

$$\|B_2\| = \frac{2}{\sqrt{3}} \ , \ \ C_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2+i\\ -1-i\\ -1-2i\end{pmatrix} ,$$

$$B_3 = A_3 - (A_3\cdot C_1)C_1 - (A_3\cdot C_2)C_2 \ = \ A_3 - (0)C_1 - \left(\frac{-\sqrt{3}i}{2}\right)C_2 \quad \Rightarrow$$

$$B_3 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3-2i\\ 1-5i\\ 2+3i\end{pmatrix} \ , \ \|B_3\| = \frac{\sqrt{13}}{2} \ , \ \ C_3 = \frac{1}{\|B_3\|}B_3 \ = \ \frac{1}{2\sqrt{13}}\begin{pmatrix}3-2i\\ 1-5i\\ 2+3i\end{pmatrix} .$$

Άσκηση 3.1.5. *Βρες του πίνακα M αλλαγής βάσης $\mathbf{a} = \mathbf{c}\cdot M$ στο προηγούμενο παράδειγμα, όπως στην εξίσωση* (3.12).

Υπόδειξη: Θεωρώντας τους πίνακες $\mathbf{a}$ και $\mathbf{c}$ με στήλες τις συντεταγμένες αντίστοιχα των $\{A_i\}$ και $\{C_i\}$, οι στήλες του πίνακα M αποτελούνται από τις συντεταγμένες των $\{A_i\}$ ως προς την ορθοκανονική βάση $\{C_i\}$. Αυτές ευρίσκονται μέσω των εσωτερικών γινομένων $\{A_i\cdot C_j\}$. Πράγματι, είναι

$$M \ = \ \begin{pmatrix}1/3 & (2i+1)/\sqrt{3} & 0\\ 0 & 2/\sqrt{3} & -(\sqrt{3}i)/2\\ 0 & 0 & \sqrt{13}/2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$N = M^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -3(1+2i)/2 & -3^{3/2}(-2+i)/(2\sqrt{13})\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 3i/(2\sqrt{13})\\ 0 & 0 & 2/\sqrt{13}\end{pmatrix} ,$$

και ο πίνακας N ικανοποιεί την $\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot N$.

Άσκηση 3.1.6. *Δείξε ότι σταθεροποιώντας μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ ενός $\mathbb{C}$-διανυσματικού χώρου V και θεωρώντας για κάθε ζεύγος διανυσμάτων και την ανάλυσή τους ως προς αυτή τη βάση, την παράσταση $X * Y$*

$$X = \sum_i x_i A_i \ , \ Y = \sum_i y_i A_i \quad \mu\varepsilon \quad X * Y = \sum_i x_i \overline{y}_i \ ,$$

τούτο ορίζει ένα Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο, ως προς το οποίο η βάση $\mathbf{a}$ είναι ορθοκανονική.

Ορισμός 3.1.5. Για ένα γραμμικό μετασχηματισμό $f : V \to V$ ενός Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου στον εαυτό του, υπάρχει ένας άλλος γραμμικός μετασχηματισμός $f^* : V \to V$, που ονομάζεται **συζυγής** του f και ορίζεται μέσω της σχέσης

$$f(X)\cdot Y \ = \ X\cdot f^*(Y) \quad \text{για κάθε} \quad X, Y \in V \ . \tag{3.15}$$

Το ότι ο f^* είναι γραμμικός έπεται εύκολα χρησιμοποιώντας την άσκηση 3.1.3 και τις σχέσεις

$$\begin{aligned} Z\cdot f^*(aX+bY) &= f(Z)\cdot(aX+bY) = \overline{a}f(Z)\cdot X+\overline{b}f(Z)\cdot Y = \\ \overline{a}Z\cdot f^*(X)+\overline{b}Z\cdot f^*(Y) &= Z\cdot(af^*(X)+bf^*(Y)) \quad \Rightarrow \\ Z\cdot(f^*(ax+by)-(af^*(X)+bf^*(Y))) &= 0 \quad \text{για κάθε} \quad X,Y,Z\in V\ . \end{aligned}$$

Άσκηση 3.1.7. *Εάν η* $\mathbf{a}$ *είναι βάση του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου* V *και* $f(\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot C$ *είναι ο πίνακας παράστασης του γραμμικού μετασχηματισμού* $f:V\to V$, *δείξε ότι, τότε, ο πίνακας παράστασης* $f^*(\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot D$ *του* f^* *ως προς τη βάση* $\mathbf{a}$ *είναι* $D=\overline{C}^t$.

Ορισμός 3.1.6. Ο πίνακας $D=\overline{C}^t$ για έναν $C\in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ λέγεται **συζυγής** του C και συμβολίζεται με C^*. Προφανώς ισχύει $(C^*)^*=C$.

Άσκηση 3.1.8. *Θεώρησε ένα* $n\times n$ *μιγαδικό πίνακα* A *και τον μετασχηματισμό* $Y=AX$ *του Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου* $\mathbb{C}^n$. *Δείξε ότι υπάρχει μια σταθερά* $k>0$ *έτσι ώστε* $\|AX\|\le k\|X\|$ *για κάθε* $X\in\mathbb{R}^n$.

Υπόδειξη: Έστω ότι $A_i\in\mathbb{C}^n$ συμβολίζει την i-στη γραμμή του πίνακα A και b_A τον μέγιστο των αριθμών $\{\|A_1\|,\dots,\|A_n\|\}$. Έχουμε $y_i=\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j$ και από την ανισότητα Schwarz:

$$\begin{aligned} |y_i|\le\|A_i\|\|\overline{X}\| = \|A_i\|\|X\| \le b_A\|X\| \quad &\Rightarrow \\ \|AX\|^2=\sum_{i=1}^n|y_i|^2\le nb_A^2\|X\|^2\ . \end{aligned}$$

Η άσκηση αυτή συνδυαζόμενη με το γνωστό από τον απειροστικό λογισμό **αξίωμα πληρότητας** των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ ([1, p.9]), συνεπάγεται ότι το φραγμένο σύνολο των $\{\|AX\|/\|X\|\}$ για όλα τα $O\neq X\in\mathbb{C}^n$ έχει ένα **ελάχιστο άνω φράγμα** ή **supremum**, που συμβολίζεται με $\|A\|=\sup\left(\frac{\|AX\|}{\|X\|}\right)$ και ικανοποιεί

$$\|AX\|\le\|A\|\|X\| \quad \text{για κάθε} \quad X\in\mathbb{C}^n\ . \tag{3.16}$$

Ορισμός 3.1.7. Ο αριθμός $\|A\|$ που ορίσθηκε παραπάνω λέγεται **νόρμα** του πίνακα $A\in M_{\mathbb{C}}(n,n)$.

Άσκηση 3.1.9. *Δείξε ότι για τους πίνακες* $\{A,B\in M_{\mathbb{C}}(n,n)\}$ *ισχύει* $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$.

Υπόδειξη: $\|ABX\|\le\|A\|\|BX\|\le\|A\|\|B\|\|X\| \quad\Rightarrow\quad \frac{\|ABX\|}{\|X\|}\le\|A\|\|B\|$.

Άσκηση 3.1.10. *Για τον γραμμικό μετασχηματισμό* $f:V\to V$ *ενός Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου στον εαυτό του, δείξε ότι* $(f^*)^*=f$.

3.2 Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, Ευκλείδειοι χώροι

> Το γράψιμο, με τη σωστή διαχείριση (που μπορείς να είσαι βέβαιος ότι είναι και η δική μου) δεν είναι παρά μια άλλη μορφή συνομιλίας.
>
> *L. Sterne, Tristram Shandy*

Ορισμός 3.2.1. Ο **συνήθης** ή **κανονικός** Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος είναι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με το εξής **κανονικό** ή **σύνηθες** Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\{X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n)\}$:

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \ . \tag{3.17}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα τις ιδιότητες:

1. $Y \cdot X \ = \ X \cdot Y$ για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
2. $(aX) \cdot (bY) = ab(X \cdot Y)$ για κάθε $\{a, b \in \mathbb{R}\}$ και κάθε $\{X, Y \in \mathbb{R}^n\}$.
3. $(X + Y) \cdot Z \ = \ X \cdot Z + Y \cdot Z$ και $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$ για κάθε $\{X, Y, Z \in \mathbb{R}^n\}$.
4. $X \cdot X = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0$ για κάθε $X \neq O$.

Ο αριθμός $\|X\| = \sqrt{X \cdot X}$ λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** ή **νόρμα** του διανύσματος $X \in \mathbb{R}^n$. Ένα διάνυσμα με $\|X\| = 1$ λέγεται **μοναδιαίο**. Για κάθε $X \neq O$ το $\frac{1}{\|X\|}X$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Ο αριθμός $\|X - Y\|$ λέγεται **απόσταση** των δύο διανυσμάτων. Δύο διανύσματα που ικανοποιούν την $X \cdot Y \ = \ 0$ λέγονται **ορθογώνια**.

Το θεώρημα του Schwarz 3.1.1

$$\begin{gathered} X \cdot Y \leq \|X\|\|Y\| \quad \Leftrightarrow \\ x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \\ \text{για κάθε} \quad X, Y \in \mathbb{R}^n \ , \end{gathered} \tag{3.18}$$

και η τριγωνική ανισότητα 3.1.2

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\| \quad \text{για κάθε} \quad X, Y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

πράγματα που συναντήσαμε στην παράγραφο 3.1 για το Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο, περνάνε μαζί με τις αποδείξεις τους, αυτολεξεί και στην παρούσα περίπτωση του Ευκλειδείου εσωτερικού γινομένου. Το Πυθαγόρειο θεώρημα έχει τώρα, σε αντίθεση με το αντίστοιχο της Ερμιτιανής περίπτωσης, ένα ισχύον αντίστροφο:

Θεώρημα 3.2.1. *Δύο ορθογώνια διανύσματα* $\{X, Y \in \mathbb{R}^n : X \cdot Y = 0\}$ *ικανοποιούν την* $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$ *και τούμπαλιν. Εάν ικανοποιείται αυτή η συνθήκη, τότε τα διανύσματα είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου: $\|X + Y\|^2 = (X + Y) \cdot (X + Y) =$

$$X \cdot X + 2X \cdot Y + Y \cdot Y \ = \ \|X\|^2 + \|Y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad X \cdot Y = 0 \ . \qquad \square$$

Ορισμός 3.2.2. Η **γωνία** ϕ δύο διανυσμάτων $\{X, Y\}$ ορίζεται μέσω του συνημιτόνου της:

$$\cos(\phi) \;=\; \frac{X \cdot Y}{\|X\|\|Y\|} \,. \tag{3.19}$$

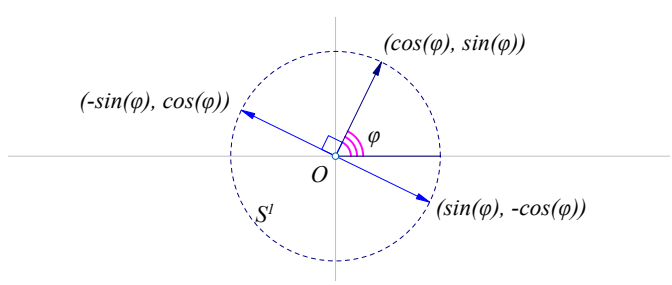
Η αναγκαία συνθήκη $|\cos(\phi)| \leq 1$ ικανοποιείται λόγω της ανισότητας Schwarz.

Ορισμός 3.2.3. Γενικότερα **Ευκλείδειος** λέγεται ο $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος V στον οποίο έχει ορισθεί ένα **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο** $X \cdot Y \in \mathbb{R}$ για όλα τα ζεύγη διανυσμάτων $\{X, Y \in V\}$, και το οποίο ικανοποιεί τυπικά τις ιδιότητες 1 έως 4, με την τελευταία συνθήκη τροποποιημένη:

4′. $X \cdot X \geq 0$ για κάθε $X \in V$ και $X \cdot X = 0$ όταν ακριβώς $X = O$.

Σημείωση 3.2.1. Και πάλι, κατ' αναλογίαν με την σημείωση 3.1.1 της προηγουμένης παραγράφου, και στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε έναν απλό τρόπο (τον τύπο 3.17) για να **ορίσουμε** ένα συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο. Σ' ένα γενικότερο Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο υποθέτουμε ότι έχει ορισθεί μια συνταγή που παράγει ένα *εσωτερικό γινόμενο* που ικανοποιεί τις προηγούμενες συνθήκες. Επειδή οι έννοιες και οι ιδιότητες που ορίσαμε έως τώρα εξαρτώνται μόνο από τις γενικές ιδιότητες 1 έως 4 και όχι την συγκεκριμένη παράστασή τους, όλες αυτές περνούν και στην γενική περίπτωση. Έτσι, οι έννοιες της **νόρμας**, **μοναδιαίου διανύσματος**, και **ορθογωνιότητας** δύο διανυσμάτων, **ορθογωνίου συμπληρώματος** ενός υποσυνόλου, περνούν τυπικά και στην γενική περίπτωση. Το ίδιο και οι αποδείξεις της **ανισότητας του Schwarz** της **τριγωνικής ανισότητας** και του **Πυθαγορείου θεωρήματος** περνούν τυπικά και ισχύουν στους γενικούς Ευκλείδειους διανυσματικούς χώρους.

Το ίδιο ισχύει και για την έννοια του **ορθογώνιου συνόλου** (ορισμός 3.1.3), την **προβολή** $p_{\mathbf{a}}$ (ορισμός 3.1.4), και την **Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt** (θεώρημα 3.1.4), μέσω της οποίας από μία αυθαίρετη βάση του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου παράγεται μία **ορθοκανονική**. Όλα αυτά ισχύουν, μαζί με τις αποδείξεις τους, στους Ευκλείδειους, όπως και στους Ερμιτιανούς διανυσματικούς χώρους.



Σχήμα 3.1: Ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

Θεώρημα 3.2.2. *Οι ορθοκανονικές βάσεις του 2-διάστατου κανονικού Ευκλείδειου χώρου (επιπέδου)* $\mathbb{R}^2$ *αποτελούνται από διανύσματα της μορφής:*

$$C_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \;,\quad C_2 = \pm \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \,. \tag{3.20}$$

Απόδειξη. Πράγματι, τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^2$, ικανοποιούν την εξίσωση $x_1^2 + x_2^2 = 1$, που ορίζει σημεία του μοναδιαίου κύκλου $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Ένα σημείο

αυτού του κύκλου καθορίζεται μονοσήμαντα μέσω μιας γωνίας $0 \le \phi < 2\pi$ (δες Σχήμα 3.1). Αυτό ορίζει το διάνυσμα C_1, και το άλλο διάνυσμα C_2 της βάσης πρέπει να είναι ένα από τα δύο ορθογώνια στο C_1 διανύσματα. □

Παράδειγμα 3.2.1. Εφαρμόζουμε τη μέθοδο Gram-Schmidt (θεώρημα 3.1.4) για να ορθοκανονικοποιήσουμε τη βάση του $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} :$$

$$\|A_1\| = \sqrt{3} \ , \ \ C_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} A_1 \ , \ \ B_2 = A_2 - (A_2 \cdot C_1) C_1 \ ,$$

$$C_2 = \frac{1}{\|B_2\|} B_2 \ = \ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \ , \ \ B_3 = A_3 - (A_3 \cdot C_1) - (A_3 \cdot C_2) C_2 =$$

$$A_3 - \frac{2}{\sqrt{3}} C_1 + \frac{1}{\sqrt{6}} C_2 \ = \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ (C_1, C_2, C_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -\sqrt{2/3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Άσκηση 3.2.1. *Βρες του άνω τριγωνικό πίνακα M που κάνει την αλλαγή βάσης $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot M$ στο προηγούμενο παράδειγμα, όπως στην εξίσωση* (3.12).

Υπόδειξη: $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/(2\sqrt{6}) & -3/(2\sqrt{2}) \\ 0 & 3/(2\sqrt{6}) & 1/(2\sqrt{2}) \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Σημείωση 3.2.2. Σημειώνουμε ότι στους δύο **συνήθεις** διανυσματικούς χώρους: τον συνήθη Ερμιτιανό $\mathbb{C}^n$ και τον συνήθη Ευκλείδειο $\mathbb{R}^n$, τα εσωτερικά τους γινόμενα σχετίζονται. Πράγματι, αναλύοντας τις συντεταγμένες των $\{X, Y \in \mathbb{C}^n\}$ σε πραγματικό και φανταστικό μέρος έχουμε

$$X = (x_1, \dots, x_n) = ((a_1 + ib_1), \dots, (a_n + ib_n)) \quad \text{και}$$
$$Y = (y_1, \dots, y_n) = ((c_1 + id_1), \dots, (c_n + id_n)) \quad \Rightarrow$$
$$X = A + iB \ , \ Y = C + iD \quad \text{με} \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}^n \quad \text{και}$$
$$X \cdot Y = \sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j)(c_j - id_j) = \sum_{j=1}^{n} ((a_j c_j + b_j d_j) + i(b_j c_j - a_j d_j)) \quad \Rightarrow$$
$$X \cdot Y \ = \ (A \cdot C + B \cdot D) \ + \ i(B \cdot C - A \cdot D) \ ,$$

όπου στα αριστερά η τελεία συμβολίζει το κανονικό Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$ και στα δεξιά η τελεία συμβολίζει το κανονικό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$.

Ένα άλλο αξιοσημείωτο φαινόμενο προκύπτει από το γεγονός ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n$, υπό την έννοια ότι, κάθε διάνυσμα $X \in \mathbb{C}^n$ είναι της μορφής $X = A + iB$ με $\{A, B \in \mathbb{R}^n\}$ που παριστάνουν αντίστοιχα το **πραγματικό** και το **φανταστικό** μέρος του X. Έτσι, το $\mathbb{R}^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$ αποτελούμενο από τα διανύσματα των οποίων το φανταστικό μέρος μηδενίζεται ($B = O$). Το Ερμιτιανό κανονικό γινόμενο εφαρμοζόμενο σε διανύσματα αυτού του είδους συμπίπτει με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 3.2.2. *Θεώρησε του αντιστρέψιμο πίνακα $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ και χρησιμοποίησε το κανονικό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ για να ορίσεις το νέο* **εσωτερικό γινόμενο**

$$X *_A Y = (AX)\cdot(AY) \quad \text{για κάθε} \quad X, Y \in \mathbb{R}^n .$$

Δείξε ότι το $*_A$ είναι πράγματι ένα Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$. Γιατί ο πίνακας A πρέπει να είναι αντιστρέψιμος; Σημείωσε ότι στην περίπτωση που $A = I_n$ το γινόμενο αυτό συμπίπτει με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 3.2.3. *Δείξε ότι κάθε εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται μέσω ενός αντιστρέψιμου πίνακα A, όπως στην προηγούμενη άσκηση. Υπάρχουν μάλιστα περισσότεροι από ένας πίνακες A που ορίζουν μ' αυτόν τον τρόπο το ίδιο εσωτερικό γινόμενο. Δώσε ένα παράδειγμα για τον $\mathbb{R}^2$ πίνακα A έτσι ώστε το $*_A$ να συμπίπτει με το κανονικό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.*

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι το $*$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$, δηλ. ικανοποιεί τους κανόνες 1 έως 4. Τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_n\}$ ως προς $*$, και κάθε διάνυσμα $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχει συντεταγμένες

$$(x_1' = X * B_1, \dots x_n' = X * B_n)$$

ως προς αυτή τη βάση, έτσι ώστε $X * Y = x_1'y_1' + \cdots + x_n'y_n'$. Γράψε τα διανύσματα $\{X\}$ ως προς την κανονική βάση $\{E_i\}$ του $\mathbb{R}^n$ με $X = \sum_i x_i E_i$. Τότε

$$x_k' = X * B_k = \left(\sum_i x_i E_i\right) * B_k = \sum_i x_i (E_i * B_k) \qquad \Leftrightarrow$$
$$(x_1', \dots, x_n') \;=\; (x_1, \dots, x_n)M ,$$

όπου ο πίνακας M έχει στοιχεία $\{m_{ij} = E_i * B_j\}$. Θεωρώντας τις στήλες συντεταγμένων και τον ανάστροφο $A = M^t$, η τελευταία εξίσωση γράφεται $X' = AX$ και δείχνει ότι $X * Y = (AX)\cdot(AY)$. Για το παράδειγμα του $\mathbb{R}^2$ θεώρησε τον πίνακα A με στήλες τα διανύσματα $\{C_1, C_2\}$ του θεωρήματος 3.2.2.

Άσκηση 3.2.4. *Θεώρησε του $n \times n$ πραγματικό πίνακα A και του μετασχηματισμό $Y = AX$ του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$. Δείξε ότι υπάρχει μια σταθερά $k > 0$ έτσι ώστε $\|AX\| \le k\|X\|$ για όλα τα $X \in \mathbb{R}^n$.*

Υπόδειξη: Τα ίδια επιχειρήματα με αυτά της άσκησης 3.1.8.

Άσκηση 3.2.5. *Δείξε ότι για δύο εσωτερικά γινόμενα $\{*_1, *_2\}$ που ορίζονται στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μια σταθερά k έτσι ώστε*

$$X *_2 X \le k(X *_1 X) \quad \text{για κάθε} \quad X \in \mathbb{R}^n .$$

Υπόδειξη: Θεώρησε δύο ορθοκανονικές βάσεις $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ως προς τα γινόμενα $\{*_1, *_2\}$. Υπάρχει τότε ένας πίνακας A που μετασχηματίζει τις συντεταγμένες ως προς τις δύο βάσεις $X_2 = AX_1$. Τότε,

$$X *_2 X = X_2 \cdot X_2 = (AX_1)\cdot(AX_1) \le n^2 M(X_1 \cdot X_1) = n^2 M(X *_1 X) ,$$

όπου το M το μέγιστο των στοιχείων $\{a_{ij}^2\}$.

Άσκηση 3.2.6. *Δείξε, χρησιμοποιώντας το κανονικό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$, και την κανονική βάση $\mathbf{e} = \{E_1, \dots, E_n\}$, ότι το a_{ij} στοιχείο του πίνακα A είναι ίσο με $a_{ij} = E_i \cdot (AE_j)$. Χρησιμοποίησε τούτο για να δεις ότι $(AX) \cdot Y = X \cdot (BY)$ για κάθε $\{X, Y \in \mathbb{R}^n\}$ συνεπάγεται ότι $B = A^t$: ο ανάστροφος του A.*

Άσκηση 3.2.7. *Θεώρησε μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου V και του πίνακα G με στοιχεία $\{g_{ij} = A_i \cdot A_j, i = 1..n, j = 1..n\}$. Δείξε ότι ο G είναι αντιστρέψιμος.*

Υπόδειξη: θεώρησε ένα $X = \sum_i x_i A_i$ και το $\{y_i = \sum_j g_{ij} x_j, i = 1..n\}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\{y_1 = \cdots = y_n = 0\}$ συνεπάγεται την $\{x_1 = \cdots = x_n = 0\}$, δηλ. ότι το ομογενές σύστημα με πίνακα $\{g_{ij}\}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση. Πράγματι,

$$y_i = \sum_j g_{ij} x_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_i \cdot \left(\sum_j x_j A_j \right) = 0, \quad \text{για} \quad i = 1..n \quad \Rightarrow$$

$$x_i A_i \cdot \left(\sum_j x_j A_j \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_i x_i A_i \right) \cdot \left(\sum_j x_j A_j \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad X \cdot X = 0 \ ,$$

που δείχνει ότι $X = O$.

Άσκηση 3.2.8. *Προσδιόρισε τις κανονικές συντεταγμένες του $X \in \mathbb{R}^3$ όταν γνωρίζουμε ότι τα Ευκλείδεια εσωτερικά γινόμενά του με τα διανύσματα*

$$(1, -1, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, -1) \quad \textit{είναι αντίστοιχα} \quad \{-2, 7, 5\}.$$

Άσκηση 3.2.9. *Προσδιόρισε τις κανονικές συντεταγμένες του $X \in \mathbb{R}^4$ όταν γνωρίζουμε ότι τα Ευκλείδεια εσωτερικά γινόμενά του με τα διανύσματα*

$$(1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1) \ \textit{είναι αντίστοιχα} \ \{2, 2, 4, 4\}.$$

Ορισμός 3.2.4. Για τον γραμμικό μετασχηματισμό $f : V \to V$ ενός Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου στον εαυτό του, ο μετασχηματισμός $f^* : V \to V$, που ονομάζεται **συζυγής** του f ορίζεται μέσω της σχέσης

$$f(X) \cdot Y \ = \ X \cdot f^*(Y) \quad \text{για κάθε} \quad X, Y \in V \ . \tag{3.21}$$

Άσκηση 3.2.10. *Δείξε ότι αν $f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot M$ είναι ο πίνακας παράστασης της f ως προς τη βάση $\mathbf{a}$, τότε $f^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot M^t$ είναι ο πίνακας παράστασης του f^* ως προς την $\mathbf{a}$. Δείξε ότι $(f^*)^* = f$.*

3.3 Άθροισμα και ευθύ άθροισμα υποχώρων

> Η συνεχής άσκηση είναι το παν. Το ροδάκινο ήταν κάποτε ένα πικραμύγδαλο, το κουνουπίδι δεν είναι τίποτε άλλο από ένα λάχανο με κολεγιακή μόρφωση.
>
> *M. Twain*

Ορισμός 3.3.1. Δοθέντων δύο διανυσματικών υποχώρων $\{W_1, W_2\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V, ονομάζουμε **άθροισμα** του W_1 και του W_2 και συμβολίζουμε με $W_1 + W_2$ το σύνολο όλων των αθροισμάτων $\{w_1 + w_2\}$ με $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$.

Θεώρημα 3.3.1. *Το άθροισμα $W_1 + W_2$ δύο διανυσματικών υποχώρων του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του V που περιέχει και τους δυο: του W_1 και του W_2 ως διανυσματικούς υποχώρους του. Εάν οι υπόχωροι έχουν διαστάσεις $n_1 = dim(W_1)$ και $n_2 = dim(W_2)$, τότε ισχύει*

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2) \ . \tag{3.22}$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$, $w_1' + w_2' \in W_1 + W_2$, $\{a, b \in \mathbb{F}\}$, εύκολα επαληθεύουμε το κριτήριο υποχώρου της άσκησης 1.4.4:

$$a(w_1 + w_2) + b(w_1' + w_2') = (aw_1 + bw_1') + (aw_2 + bw_2') \in W_1 + W_2 \ .$$

Προφανώς επίσης, γράφοντας $W_1 + W_2 \ni w_1 + O$ για κάθε $w_1 \in W_1$, βλέπουμε ότι ο W_1 είναι υπόχωρος του $W_1 + W_2$ και ανάλογα ο W_2 είναι επίσης διανυσματικός υπόχωρος του $W_1 + W_2$.

Για ν' αποδείξουμε την ισότητα (3.22) κάνουμε μια απαρίθμηση των ανεξαρτήτων διανυσμάτων μιας βάσης του $W_1 + W_2$ που την φτιάχνουμε ξεκινώντας από μια βάση του $W_1 \cap W_2$. Πράγματι, έστω ότι $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_k\}$ είναι μια βάση του $W_1 \cap W_2$ τότε, επειδή $W_1 \cap W_2 \subset W_1$, την επεκτείνουμε με $k + m$ διανύσματα $\mathbf{a} \cup \{B_1, \dots, B_m\}$ του W_1 (άσκηση 1.6.5) σε μια βάση του W_1. Ανάλογα επεκτείνουμε την $\mathbf{a}$ σε μια βάση με $k + n$ διανύσματα $\mathbf{a} \cup \{C_1, \dots, C_n\}$ του W_2. Το σύνολο των διανυσμάτων

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} \cup \mathbf{a} \cup \mathbf{c} = \{B_1, \dots, B_m\} \cup \{A_1, \dots, A_k\} \cup \{C_1, \dots, C_n\}$$

είναι μια βάση του $W_1 + W_2$. Προφανώς κάθε διάνυσμα $w_1 + w_2 \in W_1 + W_2$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός αυτών των διανυσμάτων. Επιπρόσθετα, το $\mathbf{d}$ αποτελείται από ανεξάρτητα διανύσματα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι

$$O = A + B + C \quad \text{με} \quad A = \sum_{j=1}^{k} \mu_j A_j \ , \ B = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_i \ , \ C = \sum_{h=1}^{n} \upsilon_h C_h \quad \Rightarrow$$

$$C = -A - B \in W_2 \cap W_1 \quad \Rightarrow \quad C = \sum_{h=1}^{n} \upsilon_h C_h \ \text{ που συνεπάγεται ότι}$$

το C είναι γραμμικός συνδυασμός των $\{A_1, \dots, A_k\}$, πράγμα που αποκλείεται, καθώς το σύνολο $\{C_h\}$, που επεκτείνει το $\{A_j\}$ σε μια βάση του W_2, είναι ανεξάρτητο

του $\{A_j\}$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\{v_1 = \cdots = v_n = 0\}$ και $\{C = O \;\Rightarrow\; A + B = O\}$ που συνεπάγεται $B = -A$ και ένα παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι $\{\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0\}$ που συνεπάγεται και την $\{\mu_1 = \cdots = \mu_k = 0\}$. Συνεπώς το $\mathbf{a} \cup \mathbf{b} \cup \mathbf{c}$ είναι βάση του $W_1 + W_2$ και ο τύπος προκύπτει απαριθμώντας τα στοιχεία του $\mathbf{d}$. □

Ορισμός 3.3.2. Ο $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V λέγεται ότι είναι **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων του $\{V_1, V_2\}$ όταν $V = V_1 + V_2$ και ταυτόχρονα $V_1 \cap V_2 = \{O\}$. Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε $V = V_1 \oplus V_2$. Κάθε ένας από τους $\{V_i\}$ λέγεται τότε **ένα συμπλήρωμα** του άλλου.

Ο ορισμός του *αθροίσματος* και του *ευθέως αθροίσματος* μπορεί να επεκταθεί σε περισσότερους υποχώρους $V = V_1 + \cdots + V_k$ για το άθροισμα, και για το ευθύ άθροισμα $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$, με προφανή τρόπο: κάθε διάνυσμα $v \in V$ γράφεται στη μορφή $v = v_1 + \cdots + v_k$ με $\{v_i \in V_i,\ i = 1..k\}$ και στην περίπτωση του *ευθέως αθροίσματος* απαιτούμε από όλους τους υποχώρους $\{V_i \cap V_j = \{O\}\}$ για κάθε $\{i \neq j\}$.

Ένα απλό παράδειγμα προκύπτει από μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V. Ο V είναι το ευθύ άθροισμα των παραγομένων από τα μεμονωμένα διανύσματα υποχώρων:

$$V \;=\; \langle A_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle A_n \rangle \;.$$

Ένα άλλο παράδειγμα συναντήσαμε στο πόρισμα 3.1.3, με τον παραγόμενο χώρο $\langle \mathbf{a} \rangle$ ενός ανεξαρτήτου συνόλου διανυσμάτων και το *ορθογώνιο συμπλήρωμά του* $\langle \mathbf{a} \rangle^{\perp}$. Το πόρισμα αυτό μπορεί να γενικευθεί αυτολεξεί ως εξής:

Πόρισμα 3.3.1. *Για κάθε υποσύνολο* $\mathbf{a} \subset V$ *ενός χώρου με εσωτερικό γινόμενο (Ερμιτιανό ή Ευκλείδειο)* V, *ισχύει*

$$V \;=\; \langle \mathbf{a} \rangle \oplus \langle \mathbf{a} \rangle^{\perp} \;. \tag{3.23}$$

Άσκηση 3.3.1. *Δείξε οτι ο* $\mathbb{F}$*-διανυσματικός χώρος* V *είναι ευθύ άθροισμα των υποχώρων του* $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ *όταν ακριβώς κάθε* $v \in V$ *μπορεί να γραφεί ως άθροισμα* $v = w_1 + \cdots + w_k$ *με* $\{w_i \in W_i, i = 1..k\}$ *με ένα και μοναδικό τρόπο.*

Ορισμός 3.3.3. Γενικεύοντας κατά κάποιο τρόπο την έννοια των συντεταγμένων, έχουμε στην περίπτωση ενός ευθέως αθροίσματος $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, τις **προβολές** $\{p_i : V \to V_i, i = 1..k\}$. Η προβολή p_i αντιστοιχίζει στο $v \in V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, που γράφεται $v = v_1 + \cdots + v_k$ το $v_i \in V_i$, δηλ. $p_i(v) = v_i$ για $i = 1..k$.

Επαληθεύεται εύκολα το ότι οι προβολές p_i είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί $p_i : V \to V_i \subset V$. Η προβολή p_i μπορεί να θεωρηθεί ως ένας μετασχηματισμός του V στον εαυτό του, που αντιστοιχίζει στο $v \in V_i$ το ίδιο το διάνυσμα v, και σε κάθε άλλο διάνυσμα $v' \in V_j$ με $j \neq i$ το μηδενικό διάνυσμα O του V.

Άσκηση 3.3.2. *Δείξε ότι οι προβολές* $\{p_i, i = 1..k\}$ *του προηγουμένου ορισμού ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$p_1 + \cdots + p_k = I_V \;\;,\;\; p_i \circ p_j = o \;\; \text{για} \;\; i \neq j, \;\; \text{και} \;\; p_i^2 = p_i \circ p_i = p_i \;. \tag{3.24}$$

Εδώ $I_V(w) = w$ *παριστάνει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό του* V *και* $o(v) = O$ *παριστάνει τον* **μηδενικό μετασχηματισμό** *που απεικονίζει κάθε διάνυσμα* $v \in V$ *στο μηδενικό διάνυσμα* O.

Άσκηση 3.3.3. *Δείξε, αντίστροφα με την άσκηση 3.3.2, ότι ένα σύνολο k γραμμικών μετασχηματισμών του διανυσματικού χώρου V στον εαυτό του: $\{p_i : V \to V,\ i = 1..k\}$, που ικανοποιεί τις συνθήκες (3.24), ορίζει μια διάσπαση του V σε ευθύ άθροισμα $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_i$, για την οποία οι $\{p_i\}$ είναι οι αντίστοιχες προβολές στους V_i.*

Υπόδειξη: Δοθέντων των $\{p_i\}$ όρισε τους υποχώρους $V_i \subset V$ ως τις εικόνες των μετασχηματισμών $\{V_i = Im(p_i) \subset V,\ i = 1..k\}$. Η πρώτη συνθήκη

$$I_V = p_1 + \cdots + p_k \quad \Rightarrow \quad V \ni v = I_V(v) = p_1(v) + \ldots + p_k(v) \in V_1 + \cdots + V_k\ .$$

Έτσι ο V είναι το *άθροισμα* των $\{V_i\}$. Τό ότι είναι το *ευθύ άθροισμα* αυτών, δηλ. ότι ισχύει $V_i \cap V_j = \{O\}$ για $i \neq j$ έπεται από τις άλλες συνθήκες. Πράγματι, υπόθεσε

$$v \in V_i \cap V_j \quad \Rightarrow \quad v = p_i(a) = p_j(b) \ \text{ για κάποιο } \ a \in V_i\ ,\ b \in V_j \quad \Rightarrow$$
$$p_i(v) = p_i^2(a) = p_i(a) = v = p_i(p_j(b)) = O\ .$$

Έτσι $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ και για $v \in V_i$ που σημαίνει ότι $v = p_i(a)$ για κάποιο $A \in V$, ισχύει $p_i(v) = p_i^2(a) = p_i(a) = v$.

Σημείωση 3.3.1. Δοθέντος ενός υποχώρου $W \subset V$ ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου V, υπάρχουν πολλά *συμπληρώματα* W' του V, δηλ. υπόχωροι $W' \subset V$ έτσι ώστε $V = W \oplus W'$. Για παράδειγμα, στον $\mathbb{R}^2$, και τον $W = \langle(1,0)\rangle$, κάθε διάνυσμα (a,b) με $b \neq 0$ ορίζει τον παραγόμενο υπόχωρο $W' = \langle(a,b)\rangle$ για τον οποίο ισχύει $\mathbb{R}^2 = W \oplus W'$. Για να το διαπιστώσεις, αρκεί για ένα οποιοδήποτε $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ να λύσεις το σύστημα

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} by_1 - ay_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\ .$$

Ωστόσο σ' ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο (Ερμιτιανό ή Ευκλείδειο) V, και έναν υπόχωρο $W \subset V$ μπορούμε να ορίσουμε ένα *ειδικό* συμπλήρωμα: το **ορθογώνιο συμπλήρωμα**, που αποτελείται από όλα τα διανύσματα $v \in V$, που είναι ορθογώνια σε *όλα* τα διανύσματα του W και συμβολίζουμε με $W^\perp$ και ισχύει $V = W \oplus W^\perp$.

Άσκηση 3.3.4. *Δείξε ότι το άθροισμα $W_1 + W_2$ των διανυσματικών υποχώρων του V είναι η τομή όλων των υποχώρων $W \subset V$ που περιέχουν και το W_1 και το W_2. Συμπέρανε ότι $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2\rangle$.*

Άσκηση 3.3.5. *Για ένα διανυσματικό χώρο που είναι ευθύ άθροισμα $V = W_1 \oplus W_2$ δείξε ότι η προβολή $p : V \to W_1$ ικανοποιεί την (i) $p^2 = p$ και (ii) $(I - p)^2 = (I - p)$, με $I(v) = v$ του ταυτοτικό μετασχηματισμό του V. Αντίστροφα, δείξε ότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $p : V \to V$ με την ιδιότητα (i), έχει και την ιδιότητα (ii) και ορίζει δύο υποχώρους $\{W_1 = Im(p), W_2 = Kern(p)\}$ με $V = W_1 \oplus W_2$.*

Άσκηση 3.3.6. *Δείξε ότι για κάθε υπόχωρο W του διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο (Ερμιτιανό ή Ευκλείδειο), το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W^\perp$, που αποτελείται από όλα τα $v \in V$ που είναι ορθογώνια σε όλα τα διανύσματα του W, έχει την ιδιότητα $(W^\perp)^\perp = W$.*

3.4 Γεωμετρία του Ευκλείδειου χώρου

> Η ευτυχία του ανθρώπου δεν προκύπτει τόσο από μεγάλες δόσεις καλής τύχης που συμβαίνουν σπάνια, όσο από μικρές προόδους που συμβαίνουν καθημερινά.
>
> *B. Franklin, Αυτοβιογραφία*

Οι Ευκλείδειοι διανυσματικοί χώροι $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένοι με τις έννοιες του *μήκους*, της *απόστασης* και της *γωνίας*, όπως αυτά ορίσθηκαν στην αρχή της **§** 3.2, ικανοποιούν τα αξιώματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας της αντίστοιχης διάστασης. Τα **σημεία** ταυτίζονται με τα διανύσματα. Έτσι, το $\mathbb{R}^2$ είναι ένα μοντέλο του Ευκλειδείου επιπέδου, το $\mathbb{R}^3$ είναι ένα μοντέλο του Ευκλειδείου χώρου, το $\mathbb{R}^4$ είναι μοντέλο της 4-διάστατης Ευκλείδειας γεωμετρίας κ.ο.κ. Η χρήση αυτών των μοντέλων για γεωμετρικά θέματα είναι αντικείμενο της **αναλυτικής γεωμετρίας**, και λόγω αυτής της σχέσης μερικές έννοιες της γραμμικής άλγεβρας αναφέρονται χρησιμοποιώντας την ονοματολογία της Ευκλείδειας γεωμετρίας και τούμπαλιν.

Έτσι, μια **ευθεία** του $\mathbb{R}^2$ ορίζεται μέσω μίας γραμμικής εξίσωσης

$$ax + by + c = 0 \ . \tag{3.25}$$

Οι σταθερές $\{ka, kb, kc\}$ για $k \neq 0$ ορίζουν την ίδια ευθεία, και λέμε ότι, **οι συντελεστές της ευθείας ορίζονται ως προς μία μη-μηδενική πολλαπλασιαστική σταθερά**. Το σημείο τομής δύο ευθειών ευρίσκεται με τη λύση του μη-ομογενούς συστήματος

$$ax + by + c = 0 \quad \text{και} \quad a'x + b'y + c' = 0 \ , \tag{3.26}$$

και οι ευθείες είναι **παράλληλες**, όταν αυτό το σύστημα δεν έχει λύση, δηλ. όπως είδαμε στο θεώρημα 1.1.2, ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right) \text{ έχει την τελευταία στήλη } \textit{κύρια}.$$

Μια τέτοια περίπτωση είναι αυτή των ευθειών $\{ax + by = 0 \ , \ ax + by + c = 0\}$, όταν το $c \neq 0$. Η ευθεία $ax + by = 0$ **διέρχεται από την αρχή** $O = (0, 0)$, και ταυτίζεται με τον *διανυσματικό υπόχωρο* των διανυσμάτων (x, y) που είναι ορθογώνια στο σταθερό διάνυσμα $(a, b) \neq (0, 0)$. Γι' αυτό το λόγο το διάνυσμα (a, b) λέγεται **μιά κάθετος** της ευθείας $ax + by = 0$ και της $ax + by + c = 0$, υποδηλώνοντας μια κατεύθυνση κάθετη σε αυτήν των δύο παραλλήλων ευθειών. Πάλι η *κάθετος* ορίζεται ως προς μία μη-μηδενική πολλαπλασιαστική σταθερά.

Τα σημεία (διανύσματα) (x, y) που ικανοποιούν την εξίσωση $ax + by = 0$ είναι της μορφής $\{X(t) = t(-b, a), t \in \mathbb{R}\}$. Το διάνυσμα $(-a, b)$ λέγεται **κατεύθυνση** της ευθείας (ορίζεται και αυτό ως προς πολλαπλασιαστική σταθερά) και η $X(t)$ λέγεται μια **παραμετροποίηση** της ευθείας. Η $X(t)$ παριστάνει την γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης $ax + by = 0$ και, προφανώς και σε συμφωνία με το γενικό θεώρημα 1.3.2, η γενική λύση της $ax + by + c = 0$ είναι άθροισμα $\{(s_1, s_2) + X(t), t \in \mathbb{R}\}$ μιας λύσης της μη ομογενούς $ax + by + c = 0$ και της γενικής λύσης της ομογενούς $ax + by = 0$. Σαν ειδική λύση $S = (s_1, s_2)$ της εξίσωσης $ax + by + c = 0$ μπορούμε να διαλέξουμε την τομή αυτής της ευθείας με την

ορθογώνια προς αυτήν $\{t(a,b), t \in \mathbb{R}\}$, λύνοντας την εξίσωση ως προς t :

$$a(ta) + b(tb) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = -\frac{c}{(a^2+b^2)} \quad \text{και} \quad S = (s_1, s_2) = t_0(a,b) \quad \Rightarrow$$

$$S = -\frac{c}{(a^2+b^2)}(a,b) \quad \text{και} \quad \|S\|^2 = \frac{c^2}{a^2+b^2} \ ,$$

όπου η τελευταία παράσταση εκφράζει το τετράγωνο της απόστασης του O από την ευθεία $ax + by + c = 0$ συμπληρώνοντας το γεωμετρικό περιεχόμενο των σταθερών $\{a, b, c\}$.

Στον $\mathbb{R}^3$, που είναι ένα μοντέλο Ευκλείδειου χώρου, μια μεμονωμένη εξίσωση $ax + by + cz + d = 0$ παριστάνει ένα **επίπεδο** και η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση $ax + by + cz = 0$ παριστάνει το **παράλληλο** προς αυτό επίπεδο που διέρχεται από το $O = (0,0,0)$. Δύο επίπεδα που διέρχονται από την **αρχή** O

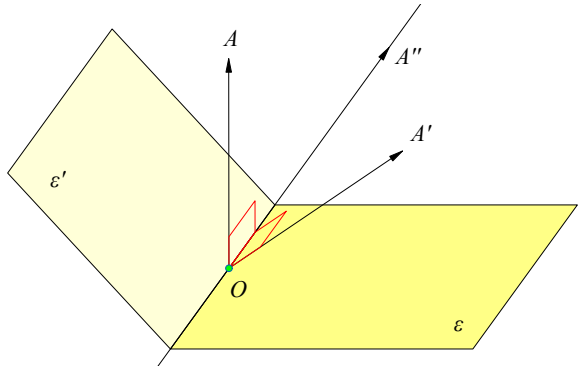
$$\left.\begin{array}{r} \varepsilon \ : \ A \cdot X = ax + by + cz = 0 \\ \varepsilon' \ : \ A' \cdot Y = a'x + b'y + c'z = 0 \end{array}\right\} \text{ ορίζουν ως τομή τους την ευθεία}$$

$$X(t) = t(bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b), \ t \in \mathbb{R} \ .$$

Η παράσταση εντός παρενθέσεων λέγεται **εξωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\{A, A' \in \mathbb{R}^3\}$ και συμβολίζεται με $A \times A'$. Και πάλι βλέπουμε ότι, εξ ορισμού, οι λύσεις της πρώτης και της δεύτερης εξίσωσης είναι αντίστοιχα διανύσματα ορθογώνια στα $\{A, A'\}$

$$(A \times A') \cdot A \ = \ (A \times A') \cdot A' = 0 \ . \tag{3.27}$$

Το εξωτερικό γινόμενο $A'' = A \times A'$ παριστάνει την **κατεύθυνση** της ευθείας-τομής των δύο επιπέδων, που είναι ορθογώνια στα δύο αυτά διανύσματα, κάθε ένα από τα οποία παριστάνει την αντίστοιχη **κάθετο** του επιπέδου (δες Σχήμα 3.2).



Σχήμα 3.2: Ευθεία-τομή των επιπέδων $\{\varepsilon, \varepsilon'\}$

Τώρα η λύση ενός συστήματος τριών εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \cdot X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1, \\ A_2 \cdot X = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2, \\ A_3 \cdot X = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3, \end{array}\right\}$$

από τη γεωμετρική σκοπιά, σημαίνει τον προσδιορισμό μιας πιθανής τομής των τριών επιπέδων. Αυτή μπορεί να είναι ένα σημείο, μπορεί να είναι μια ολόκληρη

ευθεία ή ένα επίπεπεδο, και μπορεί να μην υπάρχει, το τελευταίο να συμβαίνει όταν οι τάξεις του πίνακα A και του επαυξημένου $A|D$ δεν ταυτίζονται.

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα παριστάνει την τομή των παραλλήλων προς αυτά επιπέδων που διέρχονται από το O. Το **σχήμα** της τομής εξαρτάται από την τάξη του πίνακα A: εάν αυτή είναι 3 η μόνη λύση είναι η τετριμμένη O, εάν η τάξη είναι 2 η λύση είναι μια ευθεία διερχόμενη δια του O, και εάν είναι 1 είναι ένα επίπεδο και τα τρία επίπεδα συμπίπτουν.

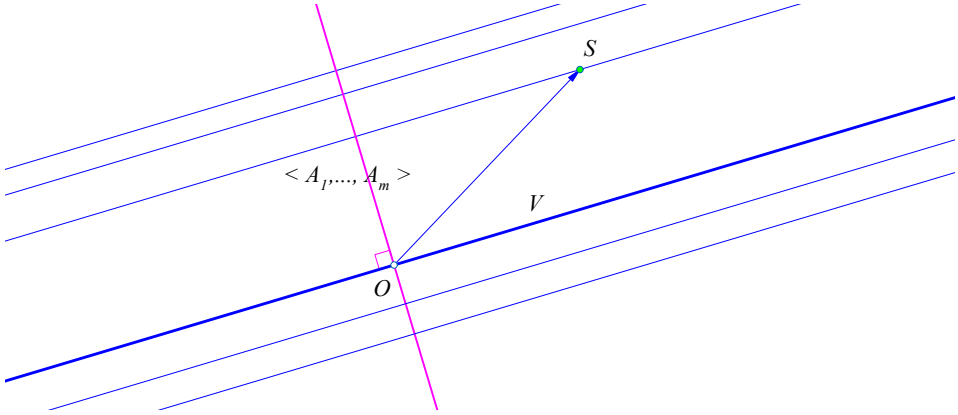
Γενικότερα, στον n-διάστατο ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ μια γραμμική εξίσωση

$$A \cdot X = d \quad \Leftrightarrow \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = d \ , \tag{3.28}$$

ορίζει ένα, όπως λέγεται, **υπερεπίπεδο**. Το παράλληλο σ' αυτό υπερεπίπεδο με εξίσωση $A \cdot X = 0$ διέρχεται από την αρχή $O \in \mathbb{R}^n$ και ταυτίζεται με τον υπόχωρο όλων των διανυσμάτων X που είναι ορθογώνια στο **κάθετο** διάνυσμα A του υπερεπιπέδου. Ένα σύστημα τέτοιων εξισώσεων $\{A_1 \cdot X = d_1, \dots, A_m \cdot X = d_m\}$ ορίζει διάφορα υπερεπίπεδα και οι λύσεις του γραμμικού συστήματος ορίζουν την τομή αυτών των υπερεπιπέδων.

Και πάλι το αντίστοιχο ομογενές σύστημα $\{A_1 \cdot X = \cdots = A_m \cdot X = 0\}$, που γράφεται $AX = O$, όπου A ο πίνακας με γραμμές τα $\{A_i, i = 1..m\}$ παίζει ένα θεμελιώδη ρόλο. Ανάλογα με την *τάξη* k του συστήματος (ίση με την τάξη του πίνακα A), ορίζει διανυσματικό υπόχωρο του V του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-k$. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.3.1 το σύνολο των λύσεων του μη-ομογενούς συστήματος $AX = D$ είναι τότε της μορφής $S + V = \{S + X \ , \ X \in V\}$, όπου $S \in \mathbb{R}^n$ είναι μια λύση του μη-ομογενούς συστήματος.

Το σχήμα 3.3 δίνει μια γενική γεωμετρική εικόνα των λύσεων του γραμμικού συστήματος, υποθέτοντας ότι η επιφάνεια της σελίδας παριστάνει το $\mathbb{R}^n$. Η ευθεία V δια του O παριστάνει τον διανυσματικό υπόχωρο (μηδενόχωρο του συστήματος) των λύσεων του ομογενούς συστήματος, διάστασης $n-k$. Οι παράλληλες γραμμές παριστάνουν τα σύνολα λύσεων $S + V$ του αντίστοιχου μη-ομογενούς συστήματος $AX = D$ για διάφορα $D \in \mathbb{R}^m$. Κάθε ένα από αυτά προκύπτει από το V μέσω **παρ-**



Σχήμα 3.3: Η διάσπαση του $\mathbb{R}^n$ σε επισύνολα $\{S + V\}$ ως προς τον $V \subset \mathbb{R}^n$

ράλληλης μεταφοράς του κατά το διάνυσμα S που είναι μια μεμονωμένη ειδική λύση του μη-ομογενούς συστήματος $AX = D$ για ένα $D \neq O$. Το σχήμα δείχνει επίσης τον παραγόμενο υπόχωρο $\langle A_1, \dots, A_m \rangle$ των γραμμών του πίνακα A. Ο υπόχωρος V είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα αυτού του υποχώρου. Τα σύνολα $S + V$

λέγονται **επισύνολα** του διανυσματικού υποχώρου V (§ 2.5). Η ένωσή τους ισούται με το $\mathbb{R}^n$ και δύο διανύσματα $\{X, X'\}$ περιέχονται στο ίδιο επισύνολο $S + V$ όταν ακριβώς $X - X' \in V$

Άσκηση 3.4.1. *Δείξε ότι σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο V (Ερμιτιανό ή Ευκλείδειο) ισχύει ο επονομαζόμενος* **κανόνας του παραλληλογράμμου** *:*

$$\|A + B\|^2 + \|A - B\|^2 \;=\; 2(\|A\|^2 + \|B\|^2) \quad \text{για κάθε} \quad A, B \in V \;. \tag{3.29}$$

Άσκηση 3.4.2. *Δείξε ότι σ' ένα Ευκλείδειο χώρο ισχύει ο* **κανόνας συνημιτόνου**

$$\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\|X\|\|Y\|\cos(\phi) \;,$$

όπου ϕ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\{X, Y\}$ (ορισμός 3.2.2).

Άσκηση 3.4.3. *Δείξε ότι τα διανύσματα $\{X, Y\}$ ενός Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου είναι ορθογώνια, τότε και μόνον τότε, όταν $\|X + Y\|^2 = \|X - Y\|^2$. Δείξε επίσης ότι τα $\{X + Y, X - Y\}$ είναι ορθογώνια, τότε και μόνον τότε, όταν $\|X\| = \|Y\|$.*

Άσκηση 3.4.4. *Δείξε ότι για δυο συμπληρωματικούς υποχώρους $\{W_1, W_2\}$ του $\mathbb{R}^n$ αντιστοίχων διαστάσεων $\{n_1, n_2\}$ ισχύει $n_1 n_2 \leq n^2/4$.*

Σημείωση 3.4.1. Στη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε στον $\mathbb{C}^n$ ή τον $\mathbb{R}^n$ και σε έννοιες που συνδέονται με εσωτερικό γινόμενο, όπως *ορθογώνια διανύσματα*, *ορθοκανονική βάση*, *ορθογώνιο συμπλήρωμα*, κτλ., χωρίς να αναφέρουμε με ποιο συγκεκριμένο εσωτερικό γινόμενο δουλεύουμε, θα εννοούμε πάντοτε το κανονικό Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$ (ορισμός 3.1.1) και αντίστοιχα το κανονικό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^n$ (ορισμός 3.2.1).

3.5 Πίνακες διαφόρων ειδών

> Προσέχοντας επιμελώς να μη συγχέουμε τα σημαντικά με τα ασήμαντα, τονίζοντας ανά πάσα στιγμή την ανάγκη για ιεράρχηση-χωρίς την οποία ο κόσμος επιστρέφει στο χάος-..
>
> *J.O.Y Gasset, Αισθητικό τρίπτυχο*

Υπάρχουν ορισμένα είδη πινάκων που παίζουν ένα ιδιαίτερο ρόλο στη γραμμική άλγεβρα και τις εφαρμογές της. Συναντήσαμε ήδη στην πρώτη παράγραφο 1.1 την έννοια του **κλιμακωτού πίνακα** και είδαμε τον πρωταγωνιστικό ρόλο του στη διαδικασία λύσης ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων. Ο ορισμός 1.4.4 μας έδωσε τους διαγώνιους και τον ταυτοτικό πίνακα $\{I_n\}$. Στην παράγραφο 2.4 συναντήσαμε τους άνω/κάτω τριγωνικούς και τους στοιχειώδεις πίνακες $\{[\epsilon_{ij}], [\epsilon_{ij}^{\lambda}]\}$ που υλοποιούν την αναγωγή ενός πίνακα σε κλιμακωτό μέσω ενός γινομένου τέτοιων πινάκων. Η εξίσωση (2.16) όρισε τους πίνακες $\{I_k^{m,n}\}$ τάξης k που παριστάνουν κλάσεις ισοδυνάμων πινάκων.

Εδώ ξεκινάμε με δύο άλλες σημαντικές κατηγορίες πινάκων που συνδέονται με την έννοια του ανάστροφου πίνακα (ορισμός 2.2.3):

Ορισμός 3.5.1. Ο $n \times n$ $\mathbb{F}$-πίνακας A λέγεται **συμμετρικός** όταν ταυτίζεται με τον ανάστροφό του: $A^t = A$, και **αντισυμμετρικός** όταν ταυτίζεται με τον αντίθετο του αναστρόφου: $A^t = -A$. Τα στοιχεία τέτοιων πινάκων ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$A = A^t \iff a_{ij} = a_{ji}\ , \quad A^t = -Ai \iff a_{ij} = -a_{ji}\ , \text{ για } i,j = 1..n\ .$$

Το σύνολο των συμμετρικών πινάκων συμβολίζεται με $S_{\mathbb{F}}(n)$, ενώ των αντισυμμετρικών με $A_{\mathbb{F}}(n)$.

Παραδείγματα συμμετρικών πινάκων που έχουμε συναντήσει είναι οι διαγώνιοι πίνακες, και ειδικά οι ταυτοτικοί πίνακες I_n, οι μηδενικοί πίνακες O_n (όλα τα στοιχεία μηδενικά), και οι στοιχειώδεις πίνακες $[\epsilon_{ij}]$. Μια προφανής ιδιότητα των *αντισυμμετρικών* πινάκων είναι η $\{a_{ii} = 0, i = 1..n\}$, δηλ. ο μηδενισμός όλων των διαγωνίων στοιχείων τους.

Άσκηση 3.5.1. *Δείξε ότι ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ είναι συμμετρικός/αντισυμμετρικός, όταν ακριβώς $(AX) \cdot Y = X \cdot (A^t Y)$, αντίστοιχα $(AX) \cdot Y = -X \cdot (A^t Y)$, για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^n$ και το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $\mathbb{R}^n$.*

Άσκηση 3.5.2. *Δείξε ότι το σύνολο $S_{\mathbb{F}}(n)$ όλων των συμμετρικών $n \times n$ $\mathbb{F}$-πινάκων αποτελεί έναν $\frac{n(n+1)}{2}$-διάστατο υπόχωρο του $M_{\mathbb{F}}(n,n)$, και το σύνολο $A_{\mathbb{F}}(n)$ όλων των $n \times n$ αντισυμμετρικών $\mathbb{F}$-πινάκων αποτελεί έναν $\frac{n(n-1)}{2}$-διάστατο υπόχωρο του $M_{\mathbb{F}}(n,n)$. Βρες επίσης βάσεις αυτών των διανυσματικών χώρων.*

Υπόδειξη: Ο συμμετρικός πίνακας καθορίζεται πλήρως από τα $\frac{n^2-n}{2}$ στοιχεία του $\{a_{ij}\ ,\ i < j\}$ εκτός της κυρίας διαγωνίου και τα n διαγώνια στοιχεία του $\{a_{ii}\}$.

Άσκηση 3.5.3. *Δείξε ότι ο $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι ευθύ άθροισμα των δύο υποχώρων του $M_{\mathbb{F}}(n,n) = S_{\mathbb{F}}(n) \oplus A_{\mathbb{F}}(n)$.*

Ορισμός 3.5.2. Το **ίχνος** του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι το άθροισμα όλων των διαγωνίων στοιχείων του $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot (AE_i) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Άσκηση 3.5.4. *Δείξε ότι το ίχνος του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι το ίδιο με το ίχνος του ανάστρόφου του $tr(A) = tr(A^t)$. Δείξε επίσης ότι το ίχνος $tr(AB)$ είναι συμμετρικό ως προς τα $A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$, δηλ. $tr(AB) = tr(BA)$.*

Υπόδειξη: $tr(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_{ik} A_{ik}B_{ki} = \sum_{ki} B_{ik}A_{ki} = tr(BA)$.

Άσκηση 3.5.5. *Δείξε ότι για τους πίνακες $A, B \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ η*

$$tr(A^t B) = \sum_{i=1}^{n} E_i \cdot ((A^t B)E_i) = \sum_{i=1}^{n} (AE_i) \cdot (BE_i), \tag{3.30}$$

ορίζει ένα Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $M_{\mathbb{R}}(n,n)$.

Άσκηση 3.5.6. *Δείξε ότι στον Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο της προηγούμενης άσκησης ο υπόχωρος $A_{\mathbb{R}}(n)$ των αντισυμμετρικών πινάκων είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του διανυσματικού υποχώρου του $S_{\mathbb{R}}(n)$ των συμμετρικών πινάκων και τούμπαλιν.*

Άσκηση 3.5.7. *Δείξε ότι για κάθε πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(m,n)$ τα γινόμενα $B = AA^t$ και $C = A^t A$ είναι συμμετρικοί πίνακες. Ποιές είναι οι διαστάσεις των B και C?*

Υπόδειξη: $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$.

Ορισμός 3.5.3. Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ λέγεται **Ερμιτιανός/αντι-Ερμιτιανός** εάν ταυτίζεται με τον συζυγή του $A^* = A$, αντίστοιχα ταυτίζεται με τον αντίθετο του συζυγή του $-A^* = A$.

Δύο ακόμη κατηγορίες πινάκων συνδέονται με χώρους εφοδιασμένους με εσωτερικό γινόμενο, Ερμιτιανό ή Ευκλείδειο.

Ορισμός 3.5.4. Ο πίνακας $U \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$, αντίστοιχα $U \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$, λέγεται **μοναδιαίος**, αντίστοιχα **ορθογώνιος**, όταν ακριβώς οι στήλες του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του συνήθους μοναδιαίου χώρου $\mathbb{C}^n$, αντίστοιχα του συνήθους Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$.

Συμβολίζοντας με U_i την i-στη στήλη ενός τέτοιου πίνακα U, η χαρακτηριστική τυπική ιδιότητα και για τα δύο είδη αυτών των πινάκων, μοναδιαίων και ορθογωνίων, είναι, χρησιμοποιώντας τους χώρους $\mathbb{C}^n$ και $\mathbb{R}^n$:

$$U_i \cdot U_j = 0 \ \text{ για } \ i \neq j \quad \text{και} \quad U_i \cdot U_i = 1 \ \text{ για } i,j = 1..n\,. \tag{3.31}$$

Οι συνθήκες αυτές εκφραζόμενες με πίνακες παίρνουν την πιο συμπαγή μορφή:

$$U^t\overline{U} = I_n\,, \ \text{ για μοναδιαίους, και } \ U^tU = I_n\,, \ \text{ για ορθογώνιους πίνακες.} \tag{3.32}$$

Στην πρώτη το σύμβολο $\overline{U}$ συμβολίζει τον **μιγαδικό συζυγή** πίνακα του U, που προκύπτει αντικαθιστώντας τα στοιχεία του U με τα μιγαδικά συζυγή τους. Θεωρώντας τους αντιστρόφους των πινάκων U παίρνουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό:

Θεώρημα 3.5.1. *Ο $n \times n$ πίνακας U είναι μοναδιαίος/ορθογώνιος όταν ακριβώς ο αντίστροφός του συμπίπτει με τον συζυγή του $U^{-1} = U^* = \overline{U}^t$ αντ. $U^{-1} = U^t$.*

Άσκηση 3.5.8. *Δείξε ότι αν οι $\{U,V\}$ είναι $n \times n$ μοναδιαίοι/ορθογώνιοι πίνακες, τότε και το γινόμενό τους UV, οι αντίστροφοί τους U^{-1} και οι ανάστροφοί τους U^t είναι επίσης μοναδιαίοι/ορθογώνιοι πίνακες. Συμπέρανε ότι αν οι στήλες ενός πίνακα αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του κανονικού Ερμιτιανού/Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου, τότε το ίδιο συμβαίνει και με τις γραμμές των πινάκων και τούμπαλιν.*

Θεώρημα 3.5.2. *Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ ή $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο $A = UT$ με του U μοναδιαίο, αντίστοιχα ορθογώνιο και του T άνω τριγωνικό.*

Απόδειξη. Για $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ αυτό έπεται αμέσως από τον τύπο (3.12), γράφοντας $\mathbf{a} = \mathbf{c}M^{-1}$, όπου $\mathbf{a}$ είναι η βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από τις στήλες του A και $\mathbf{c}$ είναι η ορθοκανονική βάση που προκύπτει από την ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt. Οι στήλες του πίνακα U είναι αυτές της βάσης $\mathbf{c}$. Οι στήλες του T είναι αυτές του πίνακα M^{-1}. Ανάλογη είναι η απόδειξη για τον $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$. □

Άσκηση 3.5.9. *Δείξε ότι αν $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ είναι Ερμιτιανός, τότε ο iA είναι αντι-Ερμιτιανός και τούμπαλιν. Επίσης τα στοιχεία $\{a_{ij}\}$ του A ικανοποιούν:*

$$a_{ij} = \overline{a}_{ji} \ \text{ για } \ i \neq j \ \text{ και } \ a_{ii} \ \text{ πραγματικό για } \ A \ \text{ Ερμιτιανό,}$$
$$a_{ij} = -\overline{a}_{ji} \ \text{ για } \ i \neq j \ \text{ και } \ a_{ii} \ \text{ φανταστικό για } \ A \ \text{ αντι-Ερμιτιανό.}$$

Άσκηση 3.5.10. *Για ένα πίνακα $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ και την συνθήκη: $(AX)\cdot X = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$, δείξε ότι:*

1. *Εάν είναι συμμετρικός και ισχύει η συνθήκη, τότε ο A είναι ο μηδενικός πίνακας.*
2. *Εάν είναι αντι-συμμετρικός, τότε η συνθήκη ισχύει πάντα.*
3. *Εάν είναι αντιστρέψιμος και ισχύει η συνθήκη, τότε ο πίνακας είναι αντισυμμετρικός.*

Υπόδειξη: Nr-1 : Για την κανονική βάση $\{E_i\}$: η $(A(E_i+E_j))\cdot(E_i+E_j) = 0$ συνεπάγεται την $(AE_i)\cdot E_j = 0$.

Nr-2 : Για αντισυμμετρικό: $(AX)\cdot X = -X\cdot(AX) \Rightarrow 2(AX)\cdot X = 0$.

Nr-3 : Γράψε $A = \frac{1}{2}(A+A^t) + \frac{1}{2}(A-A^t)$ ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντι-συμμετρικού κτλ.

Άσκηση 3.5.11. *Δείξε ότι ένας Ερμιτιανός πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ είναι μηδενικός τότε και μόνον τότε, όταν $(AX)\cdot X = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^n$.*

Υπόδειξη: Η $A(X+Y)\cdot(X+Y) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = AX\cdot Y + AY\cdot X = X\cdot AY + AY\cdot X = \overline{AY\cdot X} + AY\cdot X = 0$ συνεπάγεται ότι το $AY\cdot X$ είναι καθαρά φανταστικό για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^n$. Πάρε $X = AY$ για το οποίο $\mathbb{R} \ni AY\cdot AY > 0$ αν $AY \neq O$ κτλ.

Άσκηση 3.5.12. *Ο μόνος πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ με την ιδιότητα $A^k = O$ για κάποιο $k > 1$ και την ιδιότητα $(AX)\cdot X = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$ είναι ο μηδενικός.*

Υπόδειξη: Υπόθεσε ότι ο πυρήνας $W_1 = Kern(f_A) \neq \mathbb{R}^n$ και θεώρησε τη διάσπαση $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_1^{\perp}$. Για τυχόντα $\{X_1 \in W_1, O \neq X_2 \in W_2 = W_1^{\perp}\}$ η υπόθεση

$$A(X_1+X_2)\cdot(X_1+X_2) = 0 \;\Rightarrow AX_2\cdot X_1 = 0 \;\Rightarrow AX_2 = X_2' \in W_2\;,\; X_2' \neq O\;.$$

Συνάγεται ότι ο περιορισμός της f_A στο W_2 είναι ισομορφισμός, συνεπώς

$$W_2 = f_A(W_2) = f_A^2(W_2) = \cdots = f_A^k(W_2) = \{O\} \text{ που είναι άτοπο.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές

4.1 Ορίζουσες

Το να έχεις φυσικό χάρισμα είναι ό,τι καλύτερο.
Το αμέσως επόμενο καλό είναι να μαθαίνεις.

Επίχαρμος

Δουλεύοντας μ' ένα $\mathbb{F}$-διανυσματικό χώρο, όπου το $\mathbb{F}$ είναι ένα σώμα σαν το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$, που περιέχει άπειρα το πλήθος στοιχεία, η **ορίζουσα** είναι μια απεικόνιση που σε n το πλήθος διανύσματα $\{A_1, \dots, A_n\}$ του $\mathbb{F}^n$ αντιστοιχίζει έναν αριθμό $\det(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{F}$. Όταν αυτά τα διανύσματα είναι οι στήλες ενός πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$, τότε συμβολίζουμε την αντίστοιχη ορίζουσα με $|A|$ και την ονομάζουμε **ορίζουσα του πίνακα** A.

Για $n = 2$ η ορίζουσα ισούται με τον αριθμό

$$\det(X, Y) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1. \tag{4.1}$$

Για $n = 3$ η ορίζουσα ισούται με τον αριθμό $det(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} =$

$$x_1 y_2 z_3 + y_1 z_2 x_3 + z_1 x_2 y_3 - x_3 y_2 z_1 - y_3 z_2 x_1 - z_3 x_2 y_1. \tag{4.2}$$

Ορισμός 4.1.1. Γενικεύοντας τις ιδιότητες αυτών των δύο απλών περιπτώσεων, ονομάζουμε **ορίζουσα** μια απεικόνιση $det : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ με τις ιδιότητες:

1. **Γραμμικότητα** ως προς κάθε μεταβλητή, δηλ. για κάθε $\{i = 1..n, A_i, B_i \in \mathbb{F}^n\}$ και κάθε $\{\lambda, \mu \in \mathbb{F}\}$ ισχύει: $det(A_1, \dots, \lambda A_i + \mu B_i, \dots A_n) =$

$$\lambda\, det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \mu\, det(A_1, \dots, B_i, \dots, A_n).$$

2. **Αντι-συμμετρία** ως προς οποιεσδήποτε δύο μεταβλητές, δηλ. για κάθε $i \neq j$ ισχύει (κατά την εναλλαγή των διανυσμάτων στις θέσεις i, j):

$$det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

3. **Κανονικότητα** δηλ. η τιμή της για την κανονική βάση του $\mathbb{F}^n$ είναι 1:

$$det(E_1, \dots, E_n) = 1.$$

Θεώρημα 4.1.1. *Μια απεικόνιση $f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ που έχει τις δύο πρώτες ιδιότητες της ορίζουσας έχει επίσης και τις επόμενες τρεις (για τις μεταθέσεις δες 7.4):*

4. $f(A_1, \dots, A_n) = 0$, *άν κάποιο από τα* $\{A_i, i = 1..n\}$ *είναι* O.
5. $f(A_1, \dots, A_n) = 0$, *αν, γενικότερα, τα* $\{A_1, \dots, A_n\}$ *είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
6. $f(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(n)}) = s(\sigma) f(A_1, \dots, A_n)$, *για κάθε μετάθεση* σ *του συνόλου* $\{1, \dots, n\}$ *και* $s(\sigma)$ *να συμβολίζει την* **υπογραφή** *της μετάθεσης.*

Απόδειξη. *Nr-4* : Προκύπτει από το *nr-1* θέτοντας $\lambda = 0, \mu = 0$.

Nr-5 : Κατ' αρχήν, εάν στις θέσεις $\{i \neq j\}$ έχουμε το ίδιο διάνυσμα, τότε

$$d = f(A_1, \dots, A_i(= X), \dots, A_j(= X), \dots, A_n) = 0 \ ,$$

επειδή, κατά το *nr-2*, εναλλάσσοντας τα $\{A_i, A_j\}$ προκύπτει ή ίδια τιμή και ταυτόχρονα, κατά την *nr-2*: $-d = f(A_1, \dots, (A_j = X), \dots, (A_i = X), \dots, A_n)$. Συνεπώς θα έχουμε $d = -d \Rightarrow d = 0$. Έχοντας αυτό υπόψη θεώρησε ότι το $\{A_i\}$ για κάποιο i είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων $\{A_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j\}$. Τότε αντικαθιστώντας στην παράσταση της ορίζουσας και εφαρμόζοντας στην f κατ' επανάληψη τον κανόνα *nr-1* έχουμε $f(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) =$

$$f(A_1, \dots, \sum_{j \neq i} \lambda_j A_j, \dots, A_n) = \sum_{j \neq i} \lambda_j f(A_1, \dots, A_j, \dots, A_n) = 0,$$

αφού σε κάθε προσθετέο το A_j εμφανίζεται σε δύο θέσεις: i και j για κάθε $j \neq i$, και επομένως ο όρος αυτός είναι 0.

Nr-6 : είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος (παράρτημα 7.4), ότι κάθε μετάθεση σ είναι σύνθεση $\sigma = [i_k, j_k] \circ \dots \circ [i_1, j_1]$ ενός πεπερασμένου αριθμού **αντιμεταθέσεων**, που, εξ ορισμού, εναλλάσσουν δύο $\{i_s \neq j_s \in \{1..n\}\}$ αφήνοντας όλα τα υπόλοιπα σταθερά. Κάθε αντιμετάθεση συνεισφέρει, σύμφωνα με το *nr-2*, ένα $\{-1\}$ και συνολικά έχουμε k αλλαγές προσήμου, που παράγουν το $(-1)^k$ που είναι το πρόσημο $s(\sigma)$ της μετάθεσης. □

Θεώρημα 4.1.2. *Συμβολίζοντας με S_n το σύνολο των μεταθέσεων των αριθμών $[n] = \{1, \dots, n\}$, μια απεικόνιση $f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ που έχει τις ιδιότητες nr-1 και nr-2 της ορίζουσας ικανοποιεί επίσης την συνθήκη:*

$$f(A_1, \dots, A_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)(a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}) \right) f(E_1, \dots, E_n) \ . \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει γράφοντας τα $\{A_i, i = 1..n\}$ ως προς την κανονική βάση $\{E_j, j = 1..n\}$ του $\mathbb{F}^n$:

$$A_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}E_j \quad \Rightarrow \quad f(A_1, \dots, A_n) =$$

$$f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{j_1 1}E_{j_1}\ ,\ \sum_{j_2=1}^{n} a_{j_2 2}E_{j_2}\ ,\ \dots\ ,\ \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_n n}E_{j_n}\right) =$$

$$\sum_{j_1,\dots,j_n=1}^{n} a_{j_1 1} \dots a_{j_n n} f(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}).$$

Το σύνολο των δεικτών $\sigma = \{j_1, \dots, j_n\}$ είναι μια μετάθεση του $[n] = \{1, \dots, n\}$ και στο άθροισμα εμφανίζονται όλες οι μεταθέσεις του $[n]$. Επίσης, κατά το *nr-6* ισχύει $f(E_{j_1}, \dots, E_{j_n}) = s(\sigma)f(E_1, \dots, E_n)$, πράγμα που συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Πόρισμα 4.1.1. *Υπάρχει μία και μόνο μία απεικόνιση $f : (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ με τις ιδιότητες {nr-1 , nr-2 , nr-3} και ισχύει*

$$f(A_1, \dots, A_n) = det(A_1, \dots, A_n) = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\ . \tag{4.4}$$

Απόδειξη. Πράγματι, τα θεωρήματα 4.1.1 και 4.1.2 δείχνουν ότι αν υπάρχει μια τέτοια f, τότε δίδεται από τη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (4.4). Αντίστροφα, ορίζοντας την f μέσω της δεξιάς πλευράς αυτής της εξίσωσης, βλέπουμε ότι η f ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες {*nr-1* , *nr-2* , *nr-3*}.

Την πρώτη συνθήκη αποδεικνύουμε, εφαρμόζοντας τον τύπο (4.4), πρώτα στο $\{E_1, \dots, E_n\}$ και παίρνοντας $f(E_1, \dots, E_n) = 1$. Κατόπιν εφαρμόζουμε αυτόν τον τύπο στο $\{E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma n)}\}$ και παίρνουμε: $f(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}) = s(\sigma)$. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι $f(a_{j_1 1}E_{j_1 1}, \dots, a_{j_n n}E_{j_n n}) = s(\sigma)a_{j_1 1} \dots a_{j_n n}$, όπου σ είναι η μετάθεση $(j_1, \dots, j_n)$ του $[n]$. Από τις ιδιότητες αυτές προκύπτουν εύκολα τα *nr-1* και *nr-2*. □

Πόρισμα 4.1.2. *Θεωρώντας την f που δίδεται από τον τύπο (4.4) και εφαρμόζοντάς την στον πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$ καθώς και στον ανάστροφό της $B = A^t$ έχουμε ότι $|B| = |A^t| = |A|$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από μια ανάλυση των όρων που εμφανίζονται στην εξίσωση (4.4). Πράγματι, θεώρησε την αντίστροφη κάθε μετάθεσης $\tau = \sigma^{-1}$. Τότε $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = \varepsilon$, είναι η ταυτοτική μετάθεση του $[n]$ στον εαυτό του. Επίσης αν η σ διατρέχει το σύνολο S_n όλων των μεταθέσεων, το ίδιο κάνει και η τ, και $s(\tau) = s(\sigma)$, καθώς οι αντιμεταθέσεις που απαιτούνται για να πάμε από το $[n]$ στο $\sigma = (j_1, \dots, j_n)$ είναι οι ίδιες μ' αυτές που απαιτούνται για να πάμε από το $(j_1, \dots, j_n)$ πίσω στο $[n]$. Έτσι έχουμε:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma)a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in S_n} s(\tau)a_{\sigma(1)\tau(\sigma(1))} \dots a_{\sigma(n)\tau(\sigma(n))} \stackrel{*}{=}$$

$$\sum_{\tau \in S_n} s(\tau)a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)} = |A^t|\ .$$

Η ισότητα $\stackrel{*}{=}$ προκύπτει αναδιατάσσοντας τα γινόμενα $(a_{\sigma(1)\tau(\sigma(1))} \dots a_{\sigma(n)\tau(\sigma(n))})$ έτσι ώστε $a_{\sigma(i)\tau(\sigma(i))}$ με $\sigma(i) = 1$ να εμφανίζεται πρώτο, κατόπιν $a_{\sigma(j)\tau(\sigma(j))}$ με το $\sigma(j) = 2$ να εμφανίζεται δεύτερο κτλ. □

Συνδυάζοντας το προηγούμενο πόρισμα με την ιδιότητα *nr-5* του θεωρήματος 4.1.1 μπορούμε να προσθέσουμε στις ιδιότητες των αντιστρεψίμων πινάκων (θεώρημα 2.2.2) την επόμενη.

Πόρισμα 4.1.3. *Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε και μόνον τότε, όταν ισχύει μια από τις επόμενες ιδιότητες: (i) οι στήλες του είναι ανεξάρτητες, (ii) οι γραμμές του είναι ανεξάρτητες, (iii) η ορίζουσα $|A| \neq 0$. Εάν ισχύει μία απ' αυτές τότε ισχύουν όλες.*

Πόρισμα 4.1.4. *Για δύο πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ ισχύει*

$$|AB| \;=\; |A||B| \,. \tag{4.5}$$

Απόδειξη. Και αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος 4.1.2. Πράγματι, θεωρώντας τον μεταβλητό πίνακα $X \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ και την ορίζουσα του γινομένου $f(X) = |AX|$, βλέπουμε εύκολα ότι ισχύουν οι ιδιότητες *nr-1* και *nr-2* του ορισμού 4.1.1. Συνεπώς, κατά το θεώρημα 4.1.2 και την εξίσωση (4.3), αυτή ισούται με

$$f(X) \;=\; f(E_1,\dots,E_n)\left(\sum_{\sigma\in S_n} s(\sigma)(x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n})\right) = f(E_1,\dots,E_n)|X| \;\Rightarrow$$

$$|AB| = f(B) = f(E_1,\dots,E_n)|B| = |A||B| \,. \qquad \square$$

Άσκηση 4.1.1. *Δείξε ότι η ορίζουσα του διαγώνιου πίνακα* $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ *είναι* $\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n$.

Πόρισμα 4.1.5. *Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε και μόνον τότε, όταν η ορίζουσά του $|A| \neq 0$. Εάν ισχύει αυτό, τότε $|A^{-1}| = 1/|A|$.*

Απόδειξη. Αυτό έπεται από το πόρισμα 4.1.4. Εάν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε

$$AA^{-1} = I_n \quad \Rightarrow \quad |A||A^{-1}| = |I_n| = 1.$$

Αντίστροφα, αν η ορίζουσα $|A| \neq 0$ τότε οι στήλες του A δεν μπορεί να είναι εξαρτημένες, καθώς από το θεώρημα 4.1.1, θα προέκυπτε $|A| = 0$, σε αντίφαση με την υπόθεση. □

Πόρισμα 4.1.6. *Για πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ με B αντιστρέψιμο, ισχύει η ισότητα $|B^{-1}AB| = |A|$.*

Σημείωση 4.1.1. Παρακάτω θα ορίσουμε (ορισμός 5.1.2) και θα ονομάζουμε τους πίνακες A και $B^{-1}AB$, με B αντιστρέψιμο, όπως στο παραπάνω πόρισμα, **όμοιους** και το πόρισμα θα μπορούσε να διατυπωθεί στην επόμενη μορφή:

Όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα

Από τις ιδιότητες *nr-1* και *nr-2* του ορισμού 4.1.1 των οριζουσών και το γεγονός ότι $|A^t| = |A|$ έπεται ότι, προσθέτοντας ένα πολλαπλάσιο μιας στήλης/γραμμής σε μια άλλη στήλη/γραμμή του πίνακα, αυτό δεν αλλοιώνει την τιμή της ορίζουσας. Αυτή η ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της ορίζουσας σε κάποια από τα επόμενα παραδείγματα.

Άσκηση 4.1.2. *Εάν $A \in M_{\mathbb{F}}(n-1, n-1)$, η ορίζουσα των πινάκων με μπλοκ:*

$$B = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{A} \\ 0 & \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{A} \\ 0 & \end{array}\right), \quad D = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline * & \\ \vdots & \boxed{A} \\ * & \end{array}\right) \quad \textit{ισούται με } |A| .$$

Υπόδειξη: Για τον B εφάρμοσε τον τύπο (4.4) στον οποίο όλες οι μεταθέσεις σ με $\sigma(1) \neq 1$ παράγουν $a_{\sigma(1)1} = 0$, αφού η πρώτη στήλη έχει όλα τα $a_{i1} = 0$ για $i \neq 1$. Αυτό συνεπάγεται ότι μόνο οι μεταθέσεις με $\sigma(1) = 1$ και $a_{11} = 1$ παράγουν μη-μηδενικούς προσθετέους του αθροίσματος. Επίσης επειδή κάθε προσθετέος του αθροίσματος είναι γινόμενο ενός ακριβώς στοιχείου από κάθε γραμμή του πίνακα B, το άθροισμα περιορίζεται στο

$$\sum_{\sigma \in S_n \,,\, \sigma(1)=1} s(\sigma) a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Αυτή ωστόσο είναι η ορίζουσα του A, καθώς οι μεταθέσεις $\sigma \in S_n$ με $\sigma(1) = 1$ και τα πρόσημά τους μπορούν να ταυτιστούν με τα $\sigma' \in S_{n-1}$ που μεταθέτουν τους αριθμούς $\{2, \dots, n\}$.

Για τον C το συμπέρασμα προκύπτει από αυτό για τον B, καθώς με τις στοιχειώδεις πράξεις στηλών, που κατά τη σημείωση 4.1.1 δεν αλλοιώνουν την ορίζουσα, μπορούμε να αναγάγουμε την ορίζουσα στην περίπτωση του B.

Για τον D το συμπέρασμα προκύπτει από αυτό για τον C, καθώς ο D είναι ο ανάστροφος ενός πίνακα της μορφής C και οι ανάστροφοι έχουν την ίδια ορίζουσα με τον αρχικό πίνακα (πόρισμα 4.1.2).

Άσκηση 4.1.3. *Αντικατάστησε το 1 στους πίνακες $\{B, C, D\}$ της άσκησης 4.1.2 με ένα λ και δείξε ότι η ορίζουσα του προκύπτοντα πίνακα είναι $\lambda|A|$. Δείξε κατόπιν ότι ένας άνω τριγωνικός πίνακας, όπως ο M στην εξίσωση (3.12), έχει ορίζουσα το γινόμενο $\lambda_1 \dots \lambda_n$ των διαγωνίων στοιχείων του. Δείξε την ίδια ιδιότητα για* **κάτω τριγωνικούς** *πίνακες, που δεν είναι παρά ανάστροφοι άνω τριγωνικών.*

Άσκηση 4.1.4. *Υποθέτοντας ότι $k < n$, θεώρησε τους δύο πίνακες $\{D, E \in M_{\mathbb{F}}(n, n)\}$ που συντίθενται από* **υπο-πίνακες (μπλοκ)***:*

$$A_k \in M_{\mathbb{F}}(k, k) \;\;,\;\; A_{n-k} \in M_{\mathbb{F}}(n-k, n-k),$$
$$O_{k,n-k} \,,\, B_{k,n-k} \in M_{\mathbb{F}}(k, n-k) \;\;,\;\; O_{n-k,k} \,,\, C_{n-k,k} \in M_{\mathbb{F}}(n-k, k) \;:$$
$$D = \left(\begin{array}{c|c} A_k & O_{k,n-k} \\ \hline C_{n-k,k} & A_{n-k} \end{array}\right) \;,\; E = \left(\begin{array}{c|c} A_k & B_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & A_{n-k} \end{array}\right) ,$$

με τους μηδενικούς πίνακες $\{O_{n-k,k} \,,\, O_{k,n-k}\}$ (όλα τα στοιχεία μηδενικά). Δείξε ότι οι ορίζουσες των $\{D, E\}$ ισούνται με $|A_k||A_{n-k}|$.

Υπόδειξη: Δουλεύοντας με τον D και κάνοντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στις πρώτες k γραμμές, αυτό δεν αλλοιώνει τις υπόλοιπες $n-k$. Εάν μια γραμμή του A_k είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων γραμμών του A_k, τότε κάνοντας πράξεις γραμμών που δεν αλλοιώνουν την ορίζουσα του D (σημείωση 4.1.1), σχηματίζουμε μια γραμμή του D που περιέχει μόνο μηδενικά και συνεπώς $|A_k| = |D| = 0$. Εάν οι γραμμές του A_k είναι ανεξάρτητες, τότε κάνοντας πράξεις στις πρώτες k γραμμές, όπως κάναμε στην αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα (**§** 1.3), καταλήγουμε σε μια ορίζουσα ίδια με την ορίζουσα του αρχικού πίνακα και ένα πίνακα με k γραμμές σε μορφή μπλοκ που σχηματίζουν έναν διαγώνιο πίνακα ακολουθούμενο από έναν μηδενικό πίνακα, και αντίστοιχο πίνακα D' με $|D'| = |D|$:

$$(L_k|O) \;=\; \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & O_{k,n-k} \\ 0 & \dots & \lambda_k & \end{array}\right) \quad \text{και} \quad D' \;=\; \left(\begin{array}{c|c} L_k & O_{k,n-k} \\ \hline C_{n-k,k} & A_{n-k} \end{array}\right),$$

Κατόπιν είναι εύκολο, χρησιμοποιώντας κατ' επανάληψη τις ασκήσεις 4.1.2 και 4.1.3 να δείξουμε ότι

$$|D| \;=\; |D'| \;=\; \pm(\lambda_1 \dots \lambda_k)|A_{n-k}| \;=\; |A_k||A_{n-k}| \,.$$

Η αντίστοιχη ιδιότητα για τον E προκύπτει από το γεγονός ότι ο E^t με $|E^t| = |E|$ είναι της μορφής του D.

Το επόμενο θεώρημα δίδει ένα πιο βολικό τρόπο υπολογισμού (επαγωγικά) της ορίζουσας, διότι ο τύπος (4.4) είναι αρκετά περίπλοκος για τις πρακτικές εφαρμογές. Το θεώρημα συχνά αναφέρεται ώς **ανάπτυγμα της ορίζουσας** ως προς την j-στη στήλη της. Αντίστοιχο ανάπτυγμα ισχύει και ως προς την i-στη γραμμή.

Θεώρημα 4.1.3. *Για του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ και ένα $j \in \{1,\dots,n\}$ ισχύει:*

$$|A| \;=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} |A_{ij}| a_{ij} \,, \tag{4.6}$$

όπου $|A_{ij}|$ είναι η ορίζουσα ενός $(n-1)\times(n-1)$ (υπο-)πίνακα που προκύπτει απο του A παραλείποντας την i-στη γραμμή και την j-στη του στήλη.

Απόδειξη. Για παράδειγμα, αφαιρώντας την 1-τη γραμμή και 2-ρη στήλη του

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ προκύπτει ο πίνακας } A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι, συμβολίζοντας με $\{A_i\}$ τις στήλες του A έχουμε

$$\begin{aligned} |A| \;&=\; |A_1,\dots,A_n| = |A_1,\dots,\sum_{i=1}^{n} a_{ij}E_i,\dots,A_n| \quad \text{(το άθροισμα στην } j\text{-στη στήλη)} \\ &\overset{nr\text{-}1}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}|A_1,\dots,E_i,\dots,A_n|. \end{aligned}$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι $|A_1,\dots,E_i,\dots,A_n| = |A_{ij}|(-1)^{i+j}$. Αλλά ο πίνακας στα αριστερά έχει τα ίδια στοιχεία με τον A εκτός της j-στης στήλης όπου όλα τα στοιχεία

είναι μηδέν, εκτός του στοιχείο που βρίσκεται στην i-στη γραμμή και που είναι ίσο με 1. Κάνοντας $j-1$ αντιμεταθέσεις στηλών φέρνουμε το E_i στη θέση της πρώτης στήλης. Κάνοντας κατόπιν $i-1$ αντιμεταθέσεις γραμμών φέρνουμε το 1 στη θέση της πρώτης γραμμής και πρώτης στήλης. Έτσι παίρνουμε τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

του οποίου η ορίζουσα διαφέρει της $|A_{ij}|$, σύμφωνα με το *nr-2*, στο πρόσημο που προκύπτει από τις αντιμεταθέσεις και ισούται με

$$(-1)^{j-1}(-1)^{i-1} = (-1)^{i+j}. \qquad \square$$

Οι πίνακες A_{ij} λέγονται **ελάσσονες** του A και οι αριθμοί $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ λέγονται **συμπαράγοντες** του πίνακα A. Εισαγάγοντας τα **δέλτα σύμβολα** $\delta_{ij} = 1$ αν $i \neq j$ και $\delta_{ii} = 1$, που για $\{i,j = 1..n\}$ δεν είναι παρά τα στοιχεία του ταυτοτικού πίνακα I_n, έχουμε το πόρισμα:

Πόρισμα 4.1.7. $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+j}|A_{ij}| = \delta_{kj}|A|$ *για* $k,j = 1..n$.

Απόδειξη. Πράγματι, για $k=j$ αυτό ταυτίζεται με την εξίσωση (4.6). Για $k \neq j$ και κατά το θεώρημα 4.1.3, το άθροισμα στα αριστερά παριστάνει το ανάπτυγμα ως προς την j-στη στήλη μιας ορίζουσας που έχει τις ίδιες k-στη και j-στη στήλες, άρα μηδενίζεται. $\square$

Όταν η ορίζουσα είναι $|A| \neq 0$ και ορίζοντας τις παραστάσεις

$$b_{ji} = (-1)^{i+j}\frac{|A_{ij}|}{|A|}, \tag{4.7}$$

το προηγούμενο πόρισμα δείχνει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ik} = \delta_{jk} \quad \text{για} \quad k,j = 1..n, \tag{4.8}$$

που δίνει μια άλλη απόδειξη του γεγονότος ότι πίνακες A με $|A| \neq 0$ έχουν αντίστροφο $B = A^{-1}$ που τα στοιχεία του $\{b_{ji}\}$ δίδονται από τον τύπο (4.7).

Άσκηση 4.1.5. *Υπολόγισε τις ορίζουσες και επαλήθευσε τους επόμενους τύπους για τους αντιστρόφους:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Άσκηση 4.1.6. *Επαλήθευσε την επόμενη συνταγή για την ορίζουσα ενός* 3×3 *πίνακα* A*:*

Παράθεσε στον πίνακα $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *τις 2 πρώτες στήλες:*

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$$

πρόσθεσε τα 3 "κύρια" διαγώνια γινόμενα
$$aei + bfg + cdh$$
αφαίρεσε τα 3 άλλα διαγώνια γινόμενα
$$-ceg - afh - bdi$$

Η παράσταση $\{aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi\}$ *ισούται με την ορίζουσα του* A.

Θεώρημα 4.1.4. *(**Κανόνας του Cramer**) Για του πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *και τα* $\{B, X \in \mathbb{F}^n\}$, *το σύστημα γραμμικών εξισώσεων* $AX = B$ *έχει λύση* $X = A^{-1}B$ *και οι συντεταγμένες του* X *δίδονται από τους τύπους*

$$x_1 = \frac{|A_i|}{|A|}\ ,\ \dots\ ,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|}\ , \tag{4.10}$$

όπου A_i *είναι ο πίνακα που προκύπτει από τον* A *αντικαθιστώντας την* i*-στη στήλη του με το* B.

Απόδειξη. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τον τύπο $X = A^{-1}B$ καθώς και τους τύπους (4.7) για τα στοιχεία του αντίστροφου πίνακα, παίρνουμε:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{i+j} \frac{|A_{ij}|}{|A|} \right) b_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad \text{για} \quad j = 1..n\ . \qquad \square$$

Στις περισσότερες εφαρμογές της γραμμικής άλγεβρας η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ δεν υπολογίζεται μέσω του τύπου (4.4), αλλά υπολογίζεται μέσω αναγωγής της σε άνω τριγωνικό πίνακα, παρόμοια με την αναγωγή πίνακα σε κλιμακωτό. Κάνοντας αυτή την αναγωγή μέσω στοιχειωδών πράξεων γραμμών, καταγράφουμε ταυτόχρονα τις αλλαγές προσήμου που προκύπτουν για την ορίζουσα, λόγω εναλλαγών γραμμών, και στο τέλος τροποποιούμε κατάλληλα την ορίζουσα μετά το τελευταίο βήμα, δηλ. την ορίζουσα του διαγώνιου πίνακα, που κατά την άσκηση 4.1.3 είναι το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του.

Παράδειγμα 4.1.1. Ας εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για τον υπολογισμό της ορίζουσας του επόμενου πίνακα, καταγράφοντας σε κάθε βήμα την αλλαγή της ορίζουσας D

$$A = \underset{(D)}{\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}} \underset{\text{παράγει}}{r_1 \leftrightarrow r_2} \underset{(-D)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}} \underset{\text{παράγει}}{\substack{r_3 \to r_3 + r_2 \\ r_2 \to r_2 - 4r_1}} \underset{(-D)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}} \underset{\text{παράγει}}{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\underset{(D)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}} \underset{\text{παράγει}}{r_3 \to r_3 + 2r_2} \underset{(D)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad |A| = -3\ .$$

Σημείωση 4.1.2. Σχετικά με την προηγούμενη μέθοδο υπολογισμού, σημειώνουμε ότι οι πράξεις γραμμών δεν αλλάζουν την τιμή της ορίζουσας, παρά μόνο το πρόσημό της, και το τελευταίο συμβαίνει όταν εναλλάσσουμε δύο γραμμές. Σημειώσαμε προηγουμένως (σημείωση 2.4.2) ότι τέτοιες πράξεις μεταξύ των γραμμών οδηγούν σε *κλιμακωτή μορφή*, που είναι ένας *διαγώνιος πίνακας*. Στην περίπτωση αντιστρέψιμου πίνακα αυτός ο είναι διαγώνιος $diag(p_1, \dots, p_n)$ των οδηγών του αρχικού πίνακα. Άρα, σ' αυτή την περίπτωση η ορίζουσα είναι $(-1)^s p_1 p_2 \dots p_n$, όπου s είναι το πλήθος των εναλλαγών γραμμών που χρησιμοποιήσαμε στην όλη διαδικασία.

Άσκηση 4.1.7. *Υπολόγισε την ορίζουσα αναγάγοντας του αντίστοιχο πίνακα σε άνω τριγωνικό:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.1.8. *Δείξε ότι η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα είναι* ± 1. *Δείξε επίσης ότι η ορίζουσα ενός* $n \times n$ *αντι-συμμετρικού πίνακα μηδενίζεται για περιττά* n.

Άσκηση 4.1.9. *Χρησιμοποίησε το θεώρημα 4.1.2 και του συμβολισμό της άσκησης 4.1.4 για να δείξεις ότι η ορίζουσα των πινάκων με μπλοκ είναι:*

$$\left| \begin{array}{c|c} A_k & B_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & A_{n-k} \end{array} \right| = |A_k||A_{n-k}| \quad \text{και} \quad \left| \begin{array}{c|c} O_{n-k,k} & A_{n-k} \\ \hline A_k & B_{k,n-k} \end{array} \right| =$$

$$|A_k||A_{n-k}|(-1)^{n(n-k)} .$$

Άσκηση 4.1.10. *Δείξε ότι η ορίζουσα ενός μοναδιαίου πίνακα είναι ένας μοναδιαίος μιγαδικός αριθμός:* $a + ib$ *με* $a^2 + b^2 = 1$.

Άσκηση 4.1.11. *Ο γραμμικός μετασχηματισμός* f *του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^n$ *διατηρεί την ορθογωνιότητα των διανυσμάτων, δηλ. ισχύει η ιδιότητα* $\{X \cdot Y = 0 \;\Rightarrow\; f(X) \cdot f(Y) = 0\}$. *Δείξε ότι ο* f *είναι πολλαπλάσιο* $f = \lambda f_A$, *ενός ορθογώνιου πίνακα* A.

Άσκηση 4.1.12. *Έστω ότι* $\{B_1, \dots, B_n\}$ *είναι ανά δύο ορθογώνια διανύσματα του κανονικού Ευκλείδειου χώρου* $\mathbb{R}^n$. *Δείξε ότι η ορίζουσα του πίνακα με στήλες αυτά τα διανύσματα είναι ίση με* $\pm\|B_1\|\|B_2\| \dots \|B_n\|$.

Άσκηση 4.1.13. *Εάν η τάξη του πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$ *είναι* $k > 0$, *τότε υπάρχει* $k \times k$ **υποπίνακας** B *του* A, *δηλαδή πίνακας που αποτελείται από τα στοιχεία στις διασταυρώσεις* k *γραμμών και* k *στηλών του* A, *με ορίζουσα* $|B| \neq 0$.

Υπόδειξη: Υπάρχουν k ανεξάρτητες στήλες του A. Φέρε τις, κάνοντας εναλλαγές στηλών, στις πρώτες k θέσεις (στηλών) του A. Στον πίνακα A' που προκύπτει υπάρχουν k ανεξάρτητες γραμμές. Φέρε τις στις πρώτες k θέσεις (γραμμών) του A' κάνοντας εναλλαγές γραμμών.

Άσκηση 4.1.14. *Έχει η άσκηση 4.1.13 κάποια σχέση με το θεώρημα 2.4.3 ή όχι; Εάν ναι, πως ακριβώς διατυπώνεται αυτή η σχέση;*

Άσκηση 4.1.15. *Εάν η τάξη του πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(m, n)$ *είναι* $k > 0$, *τότε κάθε* $(k+1) \times (k+1)$ *υποπίνακας* B *του* A *έχει μηδενική ορίζουσα.*

4.2 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

> Μην αναβάλλεις κάτι γι' αύριο και μεθαύριο: εκείνος που εργάζεται σ' ανώφελη εποχή την αποθήκη δε γεμίζει, ούτε ο αναβλητικός. Η επιμέλεια τη δουλειά προάγει. Ο άνθρωπος που αναβάλλει τις δουλειές διαρκώς με τις ζημιές παλεύει.
>
> *Ησίοδος, Έργα και ημέρες, 410*

Ορισμός 4.2.1. **Ιδιοτιμή** ενός πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ λέγεται ένας αριθμός $\lambda \in \mathbb{F}$ για τον οποίο η εξίσωση

$$AX = \lambda X \quad \text{έχει μια μη-μηδενική λύση: } X \neq O\,. \tag{4.11}$$

Το διάνυσμα X λέγεται τότε **ένα ιδιοδιάνυσμα** του A ως προς την ιδιοτιμή λ. Σημειώνουμε ότι ένα μη-μηδενικό πολλαπλάσιο kX ενός ιδιοδιανύσματος είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα ως προς την ίδια ιδιοτιμή. Έτσι, όταν λέμε γενικά *ιδιοδιάνυσμα* X, αυτό ορίζεται ως προς μία μη-μηδενική πολλαπλασιαστική σταθερά.

Το σύνολο όλων των διανυσμάτων που ικανοποιούν την $X : AX = \lambda X$ για κάποιο σταθερό λ λέγεται **λ-ιδιοχώρος** του πίνακα A.

Η εξίσωση (4.11) παριστάνει ένα γραμμικό σύστημα το οποίο, χρησιμοποιώντας τον ταυτοτικό πίνακα I_n μπορεί να γραφεί σαν ένα ομογενές σύστημα για το οποίο αναζητούμε μη-μηδενικές λύσεις:

$$(A - \lambda I_n)X = 0 \ , \text{ με } X \neq O \quad \Rightarrow \quad |A - \lambda I_n| = 0\,. \tag{4.12}$$

Ορισμός 4.2.2. Η εξίσωση για την ορίζουσα (4.12) ορίζει ένα πολυώνυμο βαθμού n, που συμβολίζουμε με $\chi_A(x)$ και ονομάζουμε **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πινακα A. Οι ρίζες του πολυωνύμου, συχνά ονομαζόμενες **χαρακτηριστικές ρίζες** του A ορίζουν όλες τις δυνατές ιδιοτιμές του A. **Αλγεβρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ του A λέγεται η πολλαπλότητά της k ως ρίζας του πολυωνύμου $\chi_A(x)$, δηλ. η μεγαλύτερη δύναμη $(x-\lambda)^k$ που εμφανίζεται ως παράγοντας του πολυωνύμου $\chi_A(x)$. Η διάσταση του λ-ιδιοχώρου μιας ιδιοτιμής λ λέγεται **γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής** λ.

Παράδειγμα 4.2.1. Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = (1-x)^3$ με μοναδική ιδιοτιμή $\lambda = 1$ και $1-$ιδιοχώρο: $\langle E_3 \rangle$. Η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής 1 είναι 1, ενώ η αλγεβρική είναι 3.

Σημείωση 4.2.1. Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$, ανάλογα με τις ιδιότητες του σώματος $\mathbb{F}$, μπορεί να έχει ή να μην έχει ιδιοτιμές. Για παράδειγμα ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = x^2 + 1$, το οποίο, θεωρώντας τον A ως πραγματικό πίνακα, δεν έχει πραγματικές ρίζες. Ωστόσο, θεωρώντας τον A ως μιγαδικό πίνακα, το πολυώνυμο αυτό έχει τις ρίζες $\{+i, -i\}$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$.

Επίσης η πολλαπλότητα μπορεί να ποικίλει. Για παράδειγμα ο ταυτοτικός πίνακας $B = I_n$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\chi_B(x) = (1-x)^n$ και ο διαγώνιος πίνακας $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ το $\chi_D(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x)$.

Σημειώνουμε ότι διαφορετικοί πίνακες της ίδιας διάστασης μπορεί να έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, όπως για παράδειγμα οι πίνακες:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{που έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο } \chi(x) = (1-x)^3.$$

Στη σημείωση 4.2.1 με τον πραγματικό πίνακα A, που τον θεωρήσαμε σαν μιγαδικό, είδαμε ότι αυτός έχει δύο *μιγαδικές συζυγείς* χαρακτηριστικές ρίζες και δύο αντίστοιχα μιγαδικά συζυγή ιδιοδιανύσματα. Αυτό αληθεύει γενικότερα για πραγματικούς πίνακες.

Θεώρημα 4.2.1. *Κάθε πραγματικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ θεωρούμενος ταυτόχρονα και ως μιγαδικός, έχει n ιδιοτιμές (όχι κατ' ανάγκη ανά δύο διαφορετικές) $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Αυτές είναι είτε πραγματικές είτε μιγαδικές. Τα ιδιοδιανύσματα ως προς μία πραγματική ιδιοτιμή είναι πραγματικά. Εάν το λ είναι μια μιγαδική ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $X \in \mathbb{C}^n$, τότε και το $\overline{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\overline{X}$.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι μια συνέπεια του **θεμελιώδους θεωρήματος της άλγεβρας**, κατά το οποίο ένα μιγαδικό πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n έχει n ακριβώς ρίζες $\{x_1, \dots, x_n\}$ (με ενδεχόμενες επαναλήψεις) ([5, p.269]). Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από το γεγονός ότι $\{AX = \lambda X \Rightarrow \overline{AX} = \overline{\lambda X} \Rightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda X}\}$, καθώς η συζυγία του A δεν αλλάζει τον A που είναι πραγματικός. □

Παράδειγμα 4.2.2. Υπόθεσε ότι ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι διαγώνιος με k διαφορετικές ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ αντιστοίχων πολλαπλοτήτων $\{n_1, \dots, n_k\}$ που έχουν $n_1 + \cdots + n_k = n$. Τότε τα πρώτα n_k διανύσματα της κανονικής βάσης $\{E_1, \dots, E_n\}$ του $\mathbb{F}^n$ παράγουν τον λ_1-ιδιοχώρο του A, τα επόμενα n_2 διανύσματα αυτής της βάσης παράγουν τον λ_2-ιδιοχώρο του A κ.ο.κ. Ο πίνακας έχει την (μπλοκ) μορφή

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_k I_{n_k}} \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Άσκηση 4.2.1. *Δείξε ότι οι ιδιοτιμές ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πινακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.*

Άσκηση 4.2.2. *Δείξε ότι δύο ιδιοδιανύσματα $\{X, Y\}$ του πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές $\{\lambda, \mu\}$ είναι ανεξάρτητα. Γενίκευσε για n ιδιοδιανύσματα $\{X_1, \dots, X_k\}$ ως προς ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.*

Άσκηση 4.2.3. *Δείξε ότι οι ιδιοτιμές ενός μοναδιαίου πίνακα είναι μοναδιαίοι μιγαδικοί (δηλ. μιγαδικοί z με $|z| = 1$) και οι ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ± 1.*

Άσκηση 4.2.4.

Δείξε: το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ *ειναι* $(-1)^n(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n)$. *Αυτός λέγεται* **συνοδός πίνακας** *του πολυωνύμου.*

4.3 Ερμιτιανοί και συμμετρικοί πίνακες

Η φύση του αριθμού και της αρμονίας δεν επιδέχεται κανένα σφάλμα.

Φιλόλαος

Θεώρημα 4.3.1. *Οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού/συμμετρικού πίνακα* $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$, *αντίστοιχα* $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ *είναι πραγματικές και ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Σημείωσε πρώτα ότι ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ μπορεί να θεωρηθεί και ως Ερμιτιανός $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ καθώς σ' αυτή την περίπτωση ο $A^* = \overline{A}^t = A^t$. Έτσι, διαχειριζόμαστε τις δύο περιπτώσεις με ενιαίο τρόπο θεωρώντας πρώτα την ιδιότητα των ιδιοτιμών. Πράγματι, ένας Ερμιτιανός/συμμετρικός πίνακας ισούται με τον συζυγή του $A = A^* = \overline{A}^t$ και η εξίσωση για το ιδιοδιάνυσμα X συνεπάγεται

$$AX = \lambda X \quad \Rightarrow \quad \lambda(X \cdot X) \overset{1}{=} (\lambda X) \cdot X = (AX) \cdot X = X \cdot (A^*X) = X \cdot (AX) =$$
$$X \cdot (\lambda X) \overset{2}{=} \overline{\lambda}(X \cdot X) \overset{1,2}{\Longrightarrow} (\lambda - \overline{\lambda})(X \cdot X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R} ,$$

επειδή $X \cdot X \neq 0$. Χρησιμοποιώντας το ότι οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές, έχουμε

$$AX = \lambda X \ , \ AY = \mu Y, \ \lambda \neq \mu \ \Rightarrow \ \lambda(X \cdot Y) \overset{3}{=} (\lambda X) \cdot Y = (AX) \cdot Y =$$
$$X \cdot (A^*Y) = X \cdot (AY) = X \cdot (\mu Y) = \overline{\mu}(X \cdot Y) \overset{4}{=} \mu(X \cdot Y) \overset{3,4}{\Longrightarrow}$$
$$(\lambda - \mu)(X \cdot Y) = 0 \ \Rightarrow \ X \cdot Y = 0 \ . \qquad \square$$

Άσκηση 4.3.1. *Δείξε για τον Ερμιτιανό πίνακα* $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ *και τον μοναδιαίο πίνακα* $U \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ *ότι το γινόμενο πινάκων* $B = U^*AU$ *είναι επίσης Ερμιτιανός πίνακας.*

Υπόδειξη: $(BX) \cdot Y = ((U^*AU)X) \cdot Y = (AUX) \cdot (UY) = (UX) \cdot (A^*UY) =$
$(UX) \cdot (AUY) = X \cdot (U^*AUY) = X \cdot (BY)$.

Άσκηση 4.3.2. *Για τον* $U \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ *και τον πίνακα* $({}^1|U) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{U} \\ 0 & \end{array}\right)$ *δείξε ότι, αν ο* U *είναι μοναδιαίος/ορθογώνιος, τότε ο* $({}^1|U) \in M_{\mathbb{C}}(n+1, n+1)$ *είναι επίσης μοναδιαίος/ορθογώνιος.*

Θεώρημα 4.3.2. *Για κάθε $n \times n$ Ερμιτιανό/συμμετρικό πίνακα υπάρχει ένας $n \times n$ μοναδιαίος/ορθογώνιος πίνακας U έτσι ώστε $A' = U^*AU$ να είναι διαγώνιος πίνακας* $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε το θεώρημα για Ερμιτιανούς πίνακες, η απόδειξη για συμμετρικούς όντας ανάλογη με μόνη διαφορά την αντικατάσταση των λέξεων *μοναδιαίος πίνακας* με τις *ορθογώνιος πίνακας*. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς το n. Για $n = 1$ είναι τετριμμένα αληθής. Κάνοντας την υπόθεση επαγωγής, ότι ισχύει για $n - 1$, δείχνουμε ότι το θεώρημα ισχύει και για το n. Πράγματι, ξέρουμε ότι ο A έχει μια πραγματική ιδιοτιμή λ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X, έτσι ώστε $AX = \lambda X$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το X είναι μοναδιαίο διάνυσμα και να το συμπληρώσουμε σε μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{u} = \{U_1 = X, U_2, \dots, U_n\}$.

Ο πίνακας U με αυτά τα διανύσματα στήλες είναι μοναδιαίος και ικανοποιεί:

$$B = U^*AU = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{A'} \\ 0 & \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \text{όπου ο } A' \text{ είναι πάλι} \\ (n-1) \times (n-1) \\ \text{Ερμιτιανός πίνακας.} \\ \text{(άσκηση 4.3.1)} \end{array}$$

Πράγματι, χρησιμοποιώντας την κανονική βάση $\mathbf{e} = \{E_1, \dots, E_n\}$ του $\mathbb{C}^n$, τα στοιχεία b_{ij} του B είναι

$$b_{ij} = E_i \cdot (BE_j) = E_i \cdot (U^*AUE_j) = E_i \cdot (U^*AU_j) = (UE_i) \cdot (AU_j) = U_i \cdot (AU_j) \ .$$

Αυτό, για $U_j = U_1$, δείχνει τον ισχυρισμό για την πρώτη στήλη του B. Για το $U_i = U_1$ έχουμε επίσης

$$b_{1j} = U_1 \cdot (AU_j) = (A^*U_1) \cdot U_j = (AU_1) \cdot U_j = (\lambda U_1) \cdot U_j = \lambda \delta_{1j} \ ,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό και για την πρώτη γραμμή του B.

Κατά την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένας $(n-1) \times (n-1)$ μοναδιαίος πίνακας U', έτσι ώστε ο $U'^*A'U'$ να είναι διαγώνιος. Κατά την άσκηση 4.3.2 ο $n \times n$ πίνακας $U'' = ({}^1|U')$ είναι μοναδιαίος και έχουμε:

$$U''^*BU'' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{U'^*} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{A'} \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{U'} \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \boxed{U'^*A'U'} \\ 0 & \end{array}\right),$$

πράγμα που συμπληρώνει την απόδειξη, καθώς ο τελευταίος πίνακας είναι διαγώνιος και έχουμε

$$U''^*BU'' = U''^*(U^*AU)U'' = (U''^*U^*)A(UU'') = (UU'')^*A(UU'') = V^*AV \ ,$$

με $V = UU''$ μοναδιαίο πίνακα. □

Πόρισμα 4.3.1. *Οι στήλες ενός μοναδιαίου/ορθογώνιου πίνακα U για τον οποίο ο Ερμιτιανός/συμμετρικός πίνακας A ικανοποιεί κατά το θεώρημα 4.3.2, την εξίσωση $U^*AU = L$, με L διαγώνιο πίνακα, είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.*

Απόδειξη. Πράγματι, επειδή $U^* = U^{-1}$, η εξίσωση $U^*AU = L \iff AU = UL$ και εφαρμόζοντας τους πίνακες στα διανύσματα $\{E_i\}$ της κανονικής βάσης έχουμε $AUE_i = ULE_i \iff AU_i = \lambda_i U_i$ για $i = 1..n$. □

Άσκηση 4.3.3. *Βρες έναν ορθογώνιο πίνακα U έτσι ώστε ο πίνακας U^tAU να είναι διαγώνιος, για A ίσο με έναν από τους πίνακες:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.3.4. *Θεώρησε έναν αντι-Ερμιτιανό πίνακα $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ και δείξε τις επόμενες ιδιότητες:*

1. *Οι ιδιοτιμές του είναι καθαρά φανταστικές $\lambda = i\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, (το μ μπορεί να είναι και 0).*
2. *Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια.*
3. *Υπάρχει ένας μοναδιαίος πίνακας $U \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ έτσι ώστε*

$$A' = U^*AU = \begin{pmatrix} i\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & i\mu_n \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad \mu_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1..n, \tag{4.14}$$

Υπόδειξη: Προχώρησε προσαρμόζοντας σ' αυτή την περίπτωση τις αποδείξεις των αντιστοίχων ιδιοτήτων για Ερμιτιανούς πίνακες.

Σημείωση 4.3.1. Ένας αντισυμμετρικός $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ $(A^t = -A)$, μπορεί να θεωρηθεί και ως αντι-Ερμιτιανός πίνακας $(A^* = -A)$ $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ και σαν τέτοιος τα συμπεράσματα της άσκησης 4.3.4 ισχύουν και σ' αυτή την περίπτωση. Επειδή ο πίνακας είναι πραγματικός, οι ιδιοτιμές του είτε είναι 0, είτε εμφανίζονται ως ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών $\{\pm i\mu_i\}$ και ο πίνακας (4.14) πρέπει να προσαρμοσθεί κατάλληλα (δες λεπτομέρειες στην άσκηση 5.7.17).

4.4 Διγραμμικές μορφές

> Όπως η τέχνη του διαβάσματος (μετά από ένα ορισμένο στάδιο στην εκπαίδευση του ανθρώπου) είναι η τέχνη της παράλειψης, έτσι και η τέχνη της σοφίας είναι η τέχνη του να ξέρεις τι να παραβλέπεις.
>
> *W. James, Οι αρχές της ψυχολογίας, κεφ. 22*

Ορισμός 4.4.1. **Διγραμμική μορφή** ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου λέγεται μια απεικόνιση $f : V \times V \to \mathbb{F}$ που είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή„ δηλ. για όλα τα $\{X, Y \in V\}$ και όλα τα $\{a, b \in \mathbb{F}\}$:

$$f(aX + bX', Y) = af(X,Y) + bf(X',Y) \quad \text{και}$$
$$f(X, aY + bY') = af(X,Y) + bf(X,Y')\ .$$

Εάν $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ είναι μια βάση του V, τότε ο πίνακας A με στοιχεία τα $a_{ij} = f(A_i, A_j)$ λέγεται **πίνακας της διαγραμμικής μορφής ως προς τη βάση a**. Η διγραμμική μορφή λέγεται **συμμετρική/αντισυμμετρική** αν ικανοποιεί την $f(X,Y) = f(Y,X)$, αντίστοιχα: $f(X,Y) = -f(Y,X)$ για κάθε $X, Y \in V$.

Παράδειγμα 4.4.1. Θεώρησε τον κανονικό Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$ και τον συμμετρικό πίνακα $A^t = A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$. Η $f(X,Y) = X \cdot (AY)$ ορίζει μία συμμετρική διγραμμική μορφή της οποίας ο πίνακας ως προς την κανονική βάση $\mathbf{e} = \{E_1, \dots, E_n\}$ είναι ακριβώς ο $\{A : a_{ij} = E_i \cdot (AE_j)\}$. Ανάλογα η $f(X,Y) = X \cdot (AY)$ για $A^t = -A$ αντισυμμετρικό πίνακα, ορίζει μια αντισυμμετρική διγραμμική μορφή.

Το ίδιο το κανονικό εσωτερικό γινόμενο $X \cdot Y$ είναι ένα παράδειγμα συμμετρικής διγραμμικής μορφής, του οποίου ο πίνακας ως προς την κανονική βάση $\mathbf{e}$ και γενικότερα, ως προς μια ορθοκανονική βάση είναι ο ταυτοτικός πίνακας I_n.

Για έναν τυχαίο συμμετρικό πίνακα A, η διγραμμική μορφή $f(X,Y) = X \cdot (AY)$ ικανοποιεί τις τρεις πρώτες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (ορισμός 3.17), όχι όμως και την τέταρτη. Η ισχύς και αυτής της ιδιότητας απαιτεί συμμετρικούς πίνακες που πληρούν τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 4.4.2. Ο συμμετρικός πίνακας $M \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ λέγεται **θετικά ορισμένος** εάν ικανοποιεί την συνθήκη $X \cdot (AX) > 0$ για κάθε $O \neq X \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση 4.4.1. *Δείξε ότι ο πίνακας* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *είναι θετικά ορισμένος, αν και μόνον άν ισχύουν οι δύο συνθήκες: (i)* $a > 0$, *και (ii)* $|A| > 0$.

Υπόδειξη: $a = f(E_1, E_1) > 0$ και $f(X,X) > 0$ για κάθε $X \iff at^2 + 2bt + c > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4.4.2. *Δείξε ότι κάθε αντιστρέψιμος πίνακας* $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ *ορίζει έναν θετικά ορισμένο συμμετρικό πίνακα* $B = A^t A$ *και μέσω αυτού ένα Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο του* $\mathbb{R}^n$:

$$(X *_B Y) = X \cdot (BY) = X \cdot ((A^t A)Y) = (AX) \cdot (AY),$$

όπου $X \cdot Y$ *είναι το κανονικό Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο.*

Υπόδειξη: Αυτό είναι ένα συμπλήρωμα στις ασκήσεις 3.2.2 και 3.2.3.

Άσκηση 4.4.3. *Δείξε ότι μια αλλαγή βάσης* $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot M$ *συνεπάγεται ότι ο πίνακας* B *της διγραμμικής μορφής* f *ως προς τη βάση* $\mathbf{b}$ *είναι* $B = M^t A M$, *όπου* A *είναι ο πίνακας της* f *ως προς τη βάση* $\mathbf{a}$.

Θεώρημα 4.4.1. *Για μια διγραμμική μορφή του Ευκλείδειου διανυσματικού χώρου* $\mathbb{R}^n$ *που ορίζεται από τον συμμετρικό πίνακα* $f(X,Y) = X \cdot (AY)$, *υπάρχει μια ορθοκανονική βάση* $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_n\}$ *του* $\mathbb{R}^n$ *έτσι ώστε*

$$f(x_1 B_1 + \dots + x_n B_n \ , \ y_1 B_1 + \dots + y_n B_n) = \lambda_1 x_1 y_1 + \dots + \lambda_n x_n y_n \ . \qquad (4.15)$$

Απόδειξη. Εφάρμοσε στον συμμετρικό πίνακα A το θεώρημα διαγωνιοποίησης 4.3.2 και το πόρισμα 4.3.1 και βρες τις ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ του και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{B_1, \dots, B_n\}$ που αποτελούν μια βάση. Τότε

$$AY = A(y_1 B_1 + \dots + y_n B_n) = = \ y_1 A B_1 + \dots + y_n A B_n \ =$$
$$\lambda_1 y_1 B_1 + \dots + \lambda_n y_n B_n \quad \text{κτλ.} \qquad \square$$

Άσκηση 4.4.4. *Δείξε ότι μια συμμετρική διγραμμική μορφή του n-διάστατου $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου V μπορεί να* **διαγωνιοποιηθεί**, *με την έννοια ότι υπάρχει μια βάση $\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_n\}$ του V και σταθερές $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ έτσι ώστε:*

$$f(x_1B_1 + \cdots + x_nB_n \ , \ y_1B_1 + \cdots + y_nB_n) = \lambda_1 x_1 y_1 + \cdots + \lambda_n x_n y_n \ ,$$

Υπόδειξη: Αυτό είναι σχεδόν το ίδιο με το θεώρημα 4.4.1. Ξεκίνα από μια αυθαίρετη βάση $\mathbf{a}$ του V και τον αντίστοιχο συμμετρικό πίνακα A της διγραμμικής μορφής ως προς την $\mathbf{a}$ (ορισμός 4.4.1). Εφάρμοσε το θεώρημα διαγωνιοποίησης 4.3.2 στον A για να πάρεις τον ορθογώνιο πίνακα U και τον διαγώνιο πίνακα $L = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ με $L = U^tAU$ (άσκηση 4.4.3). Η βάση $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot U$.

Ορισμός 4.4.3. Για τους πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ ο B λέγεται **τετραγωνική ρίζα** του A, όταν $B^2 = BB = A$.

Άσκηση 4.4.5. *Δείξε ότι κάθε συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ έχει τετραγωνική ρίζα.*

Υπόδειξη: Εφάρμοσε το θεώρημα διαγωνιοποίησης 4.3.2 και το πόρισμα 4.3.1 στον πίνακα A και βρες τον διαγώνιο πίνακα $U^tAU = B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, όπου U ορθογώνιος πίνακας και οι ιδιοτιμές $\lambda_i = U_i \cdot (AU_i) > 0$ για κάθε $i = 1..n$ εξ υποθέσεως. Πάρε τότε $\{r_i = \sqrt{\lambda_i}, i = 1..n\}$ και τον διαγώνιο πίνακα $R = diag(r_1, \dots, r_n)$. Ο πίνακας $C = URU^t$ ικανοποιεί την

$$C^2 = (URU^t)(URU^t) = URRU^t = UBU^t = A \ .$$

Θεώρημα 4.4.2. *Ο συμμετρικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ είναι θετικά ορισμένος, τότε και μόνον τότε, όταν οι ορίζουσες όλων των* **άνω αριστερά μπλοκ**

$$A_1 = (a_{11}) \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \dots, \ A_n = A$$

είναι θετικές.

Απόδειξη. Εφάρμοσε το πόρισμα 4.3.1 και όρισε τον ορθογώνιο πίνακα U για τον οποίο

$$U^tAU = B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad \text{με} \quad \lambda_i > 0, i = 1..n \quad \Rightarrow \quad A = UBU^t \ .$$

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$|A| = |UBU^t| = |U||B||U^t| = |B| = \lambda_1 \dots \lambda_n > 0 \ .$$

Θεώρησε τώρα τα διανύσματα $X \in \mathbb{R}^n : X = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)^t$, δηλ. τα διανύσματα των οποίων μηδενίζονται οι τελευταίες $(n-k)$ συντεταγμένες. Τότε γι' αυτά επαληθεύεται η $X \cdot (AX) = Y \cdot (A_kY)$. Αφού εξ υποθέσεως $X \cdot (AX) > 0$ για κάθε $X \neq O$ έπεται ότι και ο A_k είναι επίσης θετικά ορισμένος. Κατά το προηγούμενο βήμα η $|A_k|$ είναι γινόμενο θετικών ιδιοτιμών, άρα θετική.

Για την απόδειξη του αντιστρόφου, υπόθεσε ότι $|A_k| > 0$ για $k = 1..n$. Σημειώνουμε πρώτα ότι η υπόθεση αυτή συνεπάγεται το ότι η αναγωγή του A σε κλιμακωτό δεν περιλαμβάνει εναλλαγές γραμμών. Πράγματι, αν ο A_k ήταν το πρώτο άνω αριστερά μπλοκ που περιλαμβάνει μια εναλλαγή γραμμών με μια κατώτερη γραμμή, τότε η τελευταία του στήλη θα αποτελούνταν από μηδενικά και θα ήταν $|A_k| = 0$, αντίθετα με την υπόθεση. Έτσι, κατά τη σημείωση 2.4.3 $|A_k| = p_1p_2 \dots p_k$ είναι το γινόμενο των πρώτων k οδηγών και τούτο είναι θετικό για όλα τα k, άρα όλοι οι οδηγοί είναι θετικοί. □

4.5 Πρόσθετες ασκήσεις για το πρώτο μέρος

Υπάρχουν πολλά πράγματα που μπορείς να κάνεις με τα προβλήματα εκτός από το να τα λύσεις. Πρώτα, πρέπει να τα ορίσεις, να τα θέσεις. Αλλά, φυσικά, μπορείς επίσης να τα επεξεργαστείς, να τα απορρίψεις ή να τα εκθέσεις, ακόμη και να τα διαλύσεις! Ένα δεδομένο πρόβλημα μπορεί να σε στείλει να αναζητήσεις αναλογίες, και μερικές από αυτές μπορεί να σε παρασύρουν, προτείνοντας νέα και διαφορετικά προβλήματα, σχετιζόμενα ή όχι με το αρχικό. Οι στόχοι και τα μέσα μπορεί να αναστραφούν. Είχες ένα στόχο, αλλά τα μέσα που βρήκες δεν σε οδήγησαν σε αυτόν, οπότε βρήκες ένα νέο στόχο όπου σε οδήγησαν αυτά τα μέσα. Αυτό ονομάζεται παιχνίδι. Οι δημιουργικοί μαθηματικοί παίζουν πολύ· γύρω από οποιοδήποτε πραγματικά ενδιαφέρον πρόβλημα αναπτύσσουν μια ολόκληρη συστάδα αναλογιών, παιχνιδιών.

D. Hawkins, From Cardinals to Chaos

Άσκηση 4.5.1. *Εξέτασε πότε η ένωση $V_1 \cup V_2$ δύο διανυσματικών υποχώρων του διανυσματικού χώρου V είναι και αυτή ένας διανυσματικός υπόχωρος του V.*

Άσκηση 4.5.2. *Εξέτασε αν τα πολυώνυμα $\{x^2+2x+1\ ,\ 2x-1\ ,\ 2x^2-2x-1\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}[x]$ των πολυωνύμων με συντελεστές στο $\mathbb{F}$.*

Άσκηση 4.5.3. *Βρες μια βάση και τη διάσταση των υποχώρων $\{U, V, U\cap V, U+V\}$, όπου $\{U, V\}$ είναι οι διανυσματικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$ που παράγονται από τα διανύσματα*

$$U = \langle (2,1,0,-1), (4,8,-4,-3), (1,-3,2,0), (1,10,-6,-2)\rangle\ ,$$
$$V = \langle (1,10,-6,-2), (-2,0,6,1), (3,-1,2,4)\rangle\ .$$

Άσκηση 4.5.4. *Δείξε ότι οι μετασχηματισμοί $\{I, D : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]\}$ του διανυσματικού χώρου των πολυωνύμων στον εαυτό του, που ορίζονται μέσω των:*

$$D(a_0+\cdots+a_nx^n) \ = \ a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1} \quad \textit{(Παράγωγος)}\ ,$$
$$I(a_0+\cdots+a_nx^n) \ = \ a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} \quad \textit{(Ολοκλήρωμα)},$$

είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί και οι συνθέσεις τους $\{D\circ I = Id\ ,\ I\circ D \neq Id\}$, όπου Id είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός του $\mathbb{F}[x]$. Σ' έναν διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, και δύο γραμμικούς μετασχηματισμούς $\{f_1, f_2 : V \to V\}$, δείξε ότι η $\{f_2\circ f_1 = Id$ συνεπάγεται και την $f_1\circ f_2 = Id\}$.

Υπόδειξη: Δες την εξίσωση (2.3).

Άσκηση 4.5.5. *Θεώρησε μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V. Δείξε ότι οι απεικονίσεις $\{f_i : V \to \mathbb{F}\}$, που στο $X = x_1A_1+\cdots+x_nA_n$ αντιστοιχίζουν την i-στη συντεταγμένη: $f_i(X) = x_i$, είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί και αποτελούν μια βάση του δυϊκού χώρου V^* του V. Αυτή ονομάζεται* **δυϊκή βάση** *της $\mathbf{a}$ και συμβολίζεται με $\mathbf{a}^*$.*

Άσκηση 4.5.6. *Με τον συμβολισμό της άσκησης 4.5.5 ορίζουμε του* **μηδενιστή** W^N *ενός* k*-διάστατου υποχώρου* $W \subset V$ *του* n*-διάστατου διανυσματικού χώρου* V *, ως το σύνολο όλων των* $f \in V^*$ *με την ιδιότητα* $\{f(X) = 0$ *για κάθε* $X \in W\}$*. Δείξε ότι* W^N *είναι ένας* $(n-k)$*-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του* V^* *και επίσης ότι* $\{X \in W \iff f(X) = 0$ *για κάθε* $f \in W^N\}$*.*

Άσκηση 4.5.7. *Σε συνέχεια της άσκησης 4.5.6, προσδιόρισε του μηδενιστή του παραγόμενου υποχώρου του* $\mathbb{R}^4$

$$W = \langle (1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\rangle \quad \text{και} \quad W' = \langle (1,2,3,0)\ ,\ (0,3,2,1)\rangle\ .$$

Άσκηση 4.5.8. *Βρες τους αντιστρόφους των πινάκων*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \left(\begin{array}{c|c} & a_1 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1} \\ \hline 0\dots0 & 1 \end{array}\right).$$

Άσκηση 4.5.9. *Υπάρχει πίνακας* $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ *έτσι ώστε όλοι οι πίνακες της μορφής* $\{A + \lambda I_n\ ,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ *να είναι αντιστρέψιμοι? Δώσε παραδείγματα.*

Υπόδειξη: $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ με $a \neq 0$.

Άσκηση 4.5.10. *Εξήγησε γιατί η τάξη ενός* $m \times n$ *πίνακα δεν μπορεί να υπερβαίνει το ελάχιστο των δύο αριθμών* $\{m, n\}$*.*

Άσκηση 4.5.11. *Δείξε ότι ο πίνακας* $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *που μετατίθεται με κάθε άλλον* $B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *δηλ.* $AB = BA$ *για κάθε* $B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *, είναι διαγώνιος με ίσα όλα τα διαγώνια στοιχεία.*

Άσκηση 4.5.12.

Υπολόγισε την ορίζουσα του πίνακα Vandermonde: και δείξε ότι ισούται με $\prod_{0\le j<i\le n}(x_i - x_j)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 4.5.13. *Κατασκεύασε έναν* $n \times n$ *πίνακα του οποίου το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι 1. Δείξε ότι* $\lambda = 1$ *είναι μια ιδιοτιμή ενός τέτοιου πίνακα και προσδιόρισε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.*

Άσκηση 4.5.14. *Δείξε ότι η ορίζουσα* $|A|$ *είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός* $n \times n$ *πίνακα* A*. Δείξε επίσης ότι για το ίχνος του* A *(ορισμός 3.5.2)* $tr(A) = a_{11} + \dots + a_{nn}$ *, το* $\pm tr(A)$ *είναι ο συντελεστής του* x^{n-1} *του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα* A*.*

Μέρος ΙΙ

Ενδομορφισμοί ή τελεστές

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ενδομορφισμοί ή τελεστές

5.1 Ενδομορφισμοί

> Η επιστήμη μπορεί να ορισθεί ως μια μέθοδος για να, και ως ένα σώμα πληροφοριών που αποκτήθηκε καθώς, προσπαθούμε να απαντήσουμε αυτές και μόνο τις ερωτήσεις που μπορούν να διατυπωθούν στη μορφή: «Εάν κάνω αυτή την πράξη, τι θα συμβεί κατόπιν;»
>
> *R. Feynman, Μηχανική και επιστήμη*

Εδώ ασχολούμαστε με μια κατηγορία γραμμικών μετασχηματισμών (**§** 2.1) και τις *παραστάσεις τους με πίνακες* (**§** 2.3). Το κίνητρο για την μελέτη αυτής της κατηγορίας προκύπτει από το ότι αυτή απαντάται σε πολλές εφαρμογές.

Ορισμός 5.1.1. **Ενδομορφισμός** ή **τελεστής** λέγεται ένας γραμμικός μετασχηματισμός $f : V \to V$ ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου στον εαυτό του. Εάν είναι 1-1, τότε ονομάζεται **μονομορφισμός**. Εάν είναι επιρριπτικός ονομάζεται **επιμορφισμός**, και αν είναι ταυτόχρονα 1-1 και επιμορφισμός ονομάζεται **ισομορφισμός**.

Παράδειγμα 5.1.1. Ένας πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ ορίζει τον $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ενδομορφισμό (**§** 2.1) με $X' = f_A(X) = AX$ για $X, X' \in \mathbb{F}^n$. Η άσκηση 2.1.10 δείχνει, ότι σ' αυτή την περίπτωση, αν ο ενδομορφισμός είναι μονομορφισμός/επιμορφισμός τότε είναι και επιμορφισμός/μονομορφισμός, συνεπώς ένας ισομορφισμός. Εάν η τάξη του πίνακα είναι $k < n$, τότε έχουμε ένα πυρήνα $Kern(f_A) \neq \{O\}$ και μια εικόνα $Im(f_A) \subsetneq \mathbb{F}^n$ που είναι υπόχωρος που δεν συμπίπτει με τον $\mathbb{F}^n$.

Παράδειγμα 5.1.2. Η πράξη αναστροφής ενός πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ ορίζει μια απεικόνιση $\mathscr{T} : M_{\mathbb{F}}(n,n) \to M_{\mathbb{F}}(n,n)$, $\mathscr{T}(A) = A^t$ (άσκηση 2.2.8) που είναι ισομορφισμός.

Ένας **πίνακας παράστασης** $X' = CX$ ενός ενδομορφισμού $f : V \to V$ ως προς μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\} \subset V$ ορίζεται όπως στην γενική περίπτωση της **§** 2.3. Οι

στήλες του πίνακα C εκφράζουν τις συντεταγμένες των $f(A_i)$ ως προς την ίδια βάση $\mathbf{a}$, και για τα αντίστοιχα διανύσματα συντεταγμένων $\{X, X'\}$ έχουμε:

$$f(A_i) = A_1 c_{1i} + \cdots + A_n c_{ni} \quad \Leftrightarrow \quad f(\mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot {}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}} \quad \text{με} \quad {}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}} = C \quad \text{με}$$

$$f\left(\sum_i x_i A_i\right) = \sum_i x_i f(A_i) = \sum_{i,j} A_j c_{ji} x_i = \sum_j x'_j A_j \quad \Leftrightarrow \quad X' = CX = {}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}} X$$

$$\text{συμβολικά:} \quad \mathbf{a} \cdot X' = f(\mathbf{a} \cdot X) = f(\mathbf{a})X = \mathbf{a} \cdot ({}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}} X) \ .$$

Συμβολίζοντας με I_V τον ταυτοτικό μετασχηματισμό του V και διαλέγοντας μια άλλη βάση $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot D$ με τον πίνακα $D = {}_{\mathbf{a}^{-1}}I_V{}_{\mathbf{b}}$ να ικανοποιεί ανάλογα τις σχέσεις $B_i = A_1 d_{1i} + \cdots + A_n d_{ni}$, οι αντίστοιχες παραστάσεις συνδέονται με τον κανόνα αλλαγής βάσης

$$C' \ = \ D^{-1}CD \ = \ {}_{\mathbf{b}^{-1}}f_{\mathbf{b}} = ({}_{\mathbf{b}^{-1}}I_V{}_{\mathbf{a}})({}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}})({}_{\mathbf{a}^{-1}}I_V{}_{\mathbf{b}}) \ .$$

Το σχήμα 5.1 δείχνει ένα μεταθετικό διάγραμμα με δύο παραστάσεις με πίνακες του ενδομορφισμού f ως προς δύο βάσεις $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ του V σε συνέπεια με τους συμβολισμούς της **§** 2.3:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^n \arrow[rr, "\mathbf{b}^{-1}\circ(I_V)\circ\mathbf{a}"] \arrow[dr, "\mathbf{a}"'] \arrow[dd, "\mathbf{a}^{-1}\circ f\circ\mathbf{a}"'] & & \mathbb{F}^n \arrow[dl, "\mathbf{b}"] \arrow[dd, "\mathbf{b}^{-1}\circ f\circ\mathbf{b}"] \\
& V \arrow[d, "f"] & \\
& V & \\
\mathbb{F}^n \arrow[rr, "\mathbf{b}^{-1}\circ(I_V)\circ\mathbf{a}"] \arrow[ur, "\mathbf{a}"] & & \mathbb{F}^n \arrow[ul, "\mathbf{b}"']
\end{tikzcd}$$

μεταθετικό διάγραμμα που για $\mathbf{a}X = Z = \mathbf{b}Y$ αντιστοιχεί :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathbf{b}^{-1}\circ(I_V)\circ\mathbf{a}"] \arrow[dr, "\mathbf{a}"'] \arrow[dd, "\mathbf{a}^{-1}\circ f\circ\mathbf{a}"'] & & Y \arrow[dl, "\mathbf{b}"] \arrow[dd, "\mathbf{b}^{-1}\circ f\circ\mathbf{b}"] \\
& (\mathbf{a}X = \mathbf{b}Y) \arrow[d, "f"] & \\
& (\mathbf{a}X' = \mathbf{b}Y') & \\
X' \arrow[rr, "\mathbf{b}^{-1}\circ(I_V)\circ\mathbf{a}"] \arrow[ur, "\mathbf{a}"] & & Y' \arrow[ul, "\mathbf{b}"']
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 5.1: Ενδομορφισμός και δύο παραστάσεις με πίνακες

Ορισμός 5.1.2. Πίνακες $\{C, C' \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ που ικανοποιούν την $C' = D^{-1}CD$ με $D \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ αντιστρέψιμο ονομάζονται **όμοιοι** .

Πόρισμα 5.1.1. *Όλοι οι πίνακες παράστασης του ίδιου ενδομορφισμού $f : V \to V$ ενός n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου στον εαυτό του είναι ανά δύο όμοιοι.*

Η ομοιότητα πινάκων είναι προφανώς μια ειδική περίπτωση *ισοδυναμίας* πινάκων (ορισμός 2.3.2) και είναι επίσης σχέση ισοδυναμίας, χωρίζοντας το $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ σε *κλάσεις ισοδυναμίας*. Τα στοιχεία κάθε κλάσης ισοδυναμίας είναι οι πίνακες παράστασης ενός και του αυτού ενδομορφισμού ως προς τις διάφορες βάσεις του V. Ένα πρόβλημα κεντρικού ενδιαφέροντος σ' αυτά τα μαθήματα είναι το επόμενο:

Πρόβλημα 5.1.1. *Δοθέντος ενδομορφισμού $f : V \to V$ βρες μια βάση $\mathbf{a}$ του V, ως προς την οποία ο πίνακας παράστασης ${}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ του f να έχει την απλούστερη δυνατή μορφή.*

Προφανώς αυτό είναι ισοδύναμο με το επόμενο:

Πρόβλημα 5.1.2. *Δοθέντος πίνακα $C \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ βρες έναν όμοιό του $C' = D^{-1}CD$ που να έχει την απλούστερη δυνατή μορφή.*

Ένα παρόμοιο πρόβλημα αντιμετωπίσαμε και στην περίπτωση των συμμετρικών και Ερμιτιανών πινάκων (θεώρημα 4.3.2) όπου αποδείξαμε ότι αυτοί είναι όμοιοι με διαγώνιους πίνακες.

Οι διαγώνιοι πίνακες είναι από πολλές απόψεις οι απλούστεροι πίνακες. Αποτελούν ένα διανυσματικό υπόχωρο του $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ και επιπρόσθετα μετατίθενται ανά δύο $AB = BA$.

Για γενικότερους πίνακες δεν αναμένουμε να είναι όμοιοι προς διαγώνιους. Αυτό δεν αληθεύει εν γένει. Μπορούμε ωστόσο να δείξουμε ότι μιγαδικοί και πραγματικοί τετραγωνικοί πίνακες είναι όμοιοι με πίνακες, κατά κάποιο τρόπο, *σχεδόν διαγώνιους*. Αυτό θα γίνει σαφέστερο στις επόμενες παραγράφους.

5.2 Ενδομορφισμοί και πολυώνυμα

> Ξέρεις τη μέθοδό μου. Στηρίζεται στην παρατήρηση τετριμμένων πραγμάτων.
>
> *A.C. Doyle, Bascombe Valley Mystery*

Στην προσπάθειά μας να βρούμε τον απλούστερο πίνακα παράστασης ενός ενδομορφισμού, ισοδύναμα, τον απλούστερο πίνακα μέσα σε μια κλάση ομοιότητας πινάκων, ένα σημαντικό βοήθημα είναι η δομή του διανυσματικού χώρου $L_{\mathbb{F}}(V,V)$ όλων των ενδομορφισμών $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου και του ισόμορφου (θεώρημα 2.3.1) προς αυτόν χώρου $M_{\mathbb{F}}(n,n)$.

Και οι δύο αυτοί διανυσματικοί χώροι έχουν την πρόσθετη δομή μιάς **άλγεβρας** δηλ. πέρα από τη δομή διανυσματικού χώρου, έχουμε επίσης ένα είδος **πολλαπλασιασμού** που εκφράζεται στον $L_{\mathbb{F}}(V,V)$ μέσω της σύνθεσης απεικονίσεων $g \circ f$. Έχουμε επίσης μία **μονάδα** που είναι ο ταυτοτικός ενδομορφισμός I_V, ένα **μηδενικό** ενδομορφισμό: O_V που στέλνει τα πάντα στο $O \in V$ και τους επιμεριστικούς κανόνες:

$$h \circ (g+f) = h \circ g + h \circ f \quad \text{and} \quad (g+f) \circ h = g \circ h + f \circ h \ .$$

Στον χώρο των πινάκων $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ οι ιδιότητες αυτές αντιστοιχούν: στο γινόμενο AB, στον ταυτοτικό I_n και τον μηδενικό πίνακα O_n, και τους *επιμεριστικούς κανόνες* για πίνακες $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$. Η αντιστοίχιση ενδομορφισμών $\leftrightarrow$ πινάκων γίνεται μέσω μιας βάσης $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του V και του αντίστοιχου ισομορφισμού $\mathcal{J}_{\mathbf{a},\mathbf{a}}$ (θεώρημα 2.3.1) που στον f αντιστοιχίζει τον πίνακα παράστασης ${}_{\mathbf{a}}{}^{-1}f_{\mathbf{a}}$:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{a},\mathbf{a}} \ : \ L_{\mathbb{F}}(V,V) \to M_{\mathbb{F}}(n,n) \ , \qquad \mathcal{J}_{\mathbf{a},\mathbf{a}}(f) = {}_{\mathbf{a}}{}^{-1}f_{\mathbf{a}} \ .$$

Στη συνέχεια, τον περισσότερο καιρό θα δουλεύουμε με πίνακες από το $M_{\mathbb{F}}(n,n)$. Θα έχουμε ωστόσο κατά νου ότι οι ιδιότητες στις οποίες αναφερόμαστε αντιστοιχούν σε ιδιότητες του χώρου $L_{\mathbb{F}}(V,V)$.

Έτσι, η αλγεβρική δομή του $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ μας επιτρέπει να θεωρούμε **δυνάμεις** ενός πίνακα $A, A^2, A^3, \ldots$ καθώς επίσης και πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ στα οποία αντικαθιστούμε το x με ένα πίνακα

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \quad \text{για} \quad x = A \ : \ p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_k A^k \ .$$

Μ' αυτόν τον τρόπο ταυτότητες μεταξύ πολυωνύμων μετατρέπονται σε ταυτότητες πινάκων. Για παράδειγμα η $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ συνεπάγεται την ταυτότητα $A^2 - I_n = (A - I_n)(A + I_n)$ για πίνακες. Ένα σημαντικό επακόλουθο αυτής της πραγματικότητας είναι και το επόμενο:

Θεώρημα 5.2.1. *Για κάθε πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ υπάρχουν κάποια πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ για τα οποία $p(A) = O$.*

Απόδειξη. Αυτό έπεται άμεσα από το γεγονός ότι ο $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ είναι $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n^2 (άσκηση 1.6.1). Έτσι, θεωρώντας τους πίνακες $\{I_n, A, A^2, \ldots\}$ ως διανύσματα αυτού του χώρου, δεν μπορεί περισσότερα από $N = n^2$ να είναι ανεξάρτητα. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε πίνακα A υπάρχει ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ N έτσι ώστε

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_N x^N \quad \text{με} \quad p(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots a_N A^N = O \ .$$

Θα δούμε παρακάτω ότι υπάρχει τέτοιο $p(x)$ βαθμού $k \leq n < N = n^2$. □

Παράδειγμα 5.2.1. Ένα τέτοιο παράδειγμα προσφέρει ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ με n διαφορετικές ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{B_1, \ldots, B_n\}$, που σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ (πόρισμα 4.3.1). Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε στο πολυώνυμο $p(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n)$ το x με A και λάβουμε υπόψη την $(x - \lambda_i)(x - \lambda_j) = (x - \lambda_j)(x - \lambda_i)$ έχουμε:

$$p(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_n) \quad \Rightarrow \quad p(A) = (A - \lambda_1 I_n) \ldots (A - \lambda_n I_n) \ .$$

Εφαρμόζοντας τον πίνακα $p(A)$ στο ιδιοδιάνυσμα B_i και λαμβάνοντας υπόψη την μεταθετικότητα όλων των παραγόντων $\{A - \lambda_i I_n\}$ έχουμε: $p(A)B_i =$

$$(A - \lambda_1 I_n) \ldots (A - \lambda_n I_n) B_i = (A - \lambda_1 I_n) \ldots (A - \lambda_n I_n) \ldots ((A - \lambda_i I_n) B_i) = O \ .$$

Αυτό συνεπάγεται $\{p(A)B_i = O$, για κάθε $i = 1..n\}$. Αλλά τα $\{B_i\}$ αποτελούν μια βάση, άρα $p(A)X = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$ και συνεπώς $p(A) = O$.

Παράδειγμα 5.2.2. Ένα άλλο παράδειγμα αποτελεί η διάσπαση του $\mathbb{R}^n$ σε δύο συμπληρωματικούς υποχώρους $\mathbb{R}^n = W_1^k \oplus W_2^{n-k}$, οι εκθέτες υποδεικνύοντας τις διαστάσεις των δύο συμπληρωμάτων. Μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ του W_1^k και μια βάση $\mathbf{b} = \{B_1, \ldots, B_{n-k}\}$ του W_2^{n-k} ορίζουν μια βάση $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ του $\mathbb{R}^n$.

Η προβολή $\{f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}$ στον W_1^k παριστάνεται ως προς τη βάση $\mathbf{c}$, με τον διαγώνιο πίνακα $A = diag(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ που αποτελείται από k φορές το 1 και $n - k$ φορές το 0. Εφαρμόζοντας τον πίνακα $p(A) = A(A - I_n)$ στα διανύσματα $\{A_i\}$ και τα $\{B_j\}$ βλέπουμε πάλι ότι το πολυώνυμο βαθμού 2 ικανοποιεί: $p(A) = A(A - I_n) = O$.

Άσκηση 5.2.1. *Υπόθεσε ότι ο συμμετρικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ που δεν είναι ένα πολλαπλάσιο του I_n ικανοποιεί την $(A-\mu I_n)(A-\nu I_n) = O$ με $\mu \neq \nu$. Δείξε ότι ο A έχει δύο ιδιοτιμές $\{\mu,\nu\}$ και για κάποιο $k < n$ μια ορθοκανονική βάση αποτελούμενη από τα $\{A_1,\dots,A_k,B_1,\dots,B_{n-k}\}$, έτσι ώστε τα $\{A_i\}$ να είναι ιδιοδιανύσματα ως προς μ και τα $\{B_j\}$ να είναι ιδιοδιανύσματα ως προς ν.*

Υπόδειξη: Όρισε τους υποχώρους $W_1 = \{X : AX = \mu X\}$ και $W_2 = \{X : AX = \nu X\}$. Κανένας απ' αυτούς δεν είναι τετριμμένος $\{O\}$. Διότι αν υποθέσουμε $AX - \mu X \neq O$ για κάθε $X \neq O$. Τότε ο $A - \mu I_n$ θα ήταν αντιστρέψιμος και η εικόνα $Im(A-\mu I_n)$ θα ήταν ίση με όλο το $\mathbb{R}^n$. Τότε, $(A-\nu I_n)(A-\mu I_n)X = 0$ για κάθε $X \in \mathbb{R}^n$ θα είχε συνέπεια την $(A-\nu I_n)X = 0$ για κάθε X, δηλ. ο A θα ήταν πολλαπλάσιο του I_n πράγμα που αποκλείσαμε από την αρχή.

Στη συνέχεια δείξε ότι $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$. Πράγματι, αν $\mathbb{R}^n \neq W_1 \oplus W_2$, τότε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $W_3 = (W_1 \oplus W_2)^{\perp} \neq \{O\} \Rightarrow \mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $A(W_3) = W_3$ και ένα ιδιοδιάνυσμα $X \in W_3$ του A που ικανοποιεί την $AX = \lambda X$, θα ικανοποιεί επίσης $(A-\mu I_n)(A-\nu I_n)X =$

$$(A^2 - (\mu+\nu)A + \mu\nu)X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - (\mu+\nu)\lambda + \mu\nu = 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το λ ισούται με το μ ή το ν, πράγμα που αποκλείσαμε στην αρχή. Άρα $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$.

Θεώρημα 5.2.2. *Αν ο $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ ικανοποιεί το $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$ τότε και όλοι οι όμοιοι προς αυτόν πίνακες $\{B^{-1}AB\}$ ικανοποιούν το ίδιο πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει αμέσως για μονώνυμα $p(x) = x^k$, αφού η αντίστοιχη εξίσωση $p(A) = A^k = O$ συνεπάγεται ότι για τον όμοιο πίνακα $A' = BAB^{-1}$:

$$O = B^{-1}p(A)B = B^{-1}A^kB = \underbrace{(B^{-1}AB)(B^{-1}AB)\dots(B^{-1}AB)}_{k \text{ φορές}} =$$
$$p(B^{-1}AB) = p(A') \ .$$

Η απόδειξη για το γενικό πολυώνυμο προκύπτει απ' αυτό σε συνδυασμό με τους επιμεριστικούς κανόνες. □

Πόρισμα 5.2.1. *Τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα όλων των πινάκων παράστασης του ίδιου ενδομορφισμού f συμπίπτουν και ορίζουν το* **χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού** *f.*

Απόδειξη. Η απόδειξη ανάγεται στο θεώρημα 5.2.2 μπορεί ωστόσο να γίνει και με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των οριζουσών. Πράγματι, αν για τους πίνακες παράστασης $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ του f θεωρήσουμε τους αντίστοιχους ορισμούς του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(x) = |A - xI_n|$ και $\chi_B(x) = |B - xI_n|$ έχουμε την σχέση ομοιότητας $B = C^{-1}AC$ με έναν αντιστρέψιμο πίνακα $C \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ και

$$|B - xI_n| \ = \ |C^{-1}AC - xC^{-1}C| \ = \ |C^{-1}(A - xI_n)C| \ =$$
$$|C^{-1}||A - xI_n||C| \ = \ \frac{1}{|C|}|A - xI_n||C| \ = \ |A - xI_n| \ .$$ □

5.3 Διαγωνιοποιήσιμοι και ημιαπλοί ενδομορφισμοί

> Είπε ο δάσκαλος: Όσο για μένα, τη γνώση δεν την έχω από τα γεννοφάσκια μου. Λατρεύω όμως τους Παλαιούς και την αναζητώ με ζήλο.
>
> *Κομφούκιος, Ανάλεκτα, 7.19*

Ορισμός 5.3.1. Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμος** εάν είναι όμοιος, $B^{-1}AB = A'$, προς έναν διαγώνιο πίνακα A'. Ένας ενδομορφισμός $f : V \to V$ ενός n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V λέγεται **διαγωνιοποιήσιμος** εάν έχει ένα διαγωνιοποιήσιμο πίνακα παράστασης $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$.

Από τον ορισμό έπεται ότι για τον διαγωνιοποιήσιμο ενδομορφισμό f υπάρχει μια βάση $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ από **ιδιοδιανύσματα** $\{f(A_i) = \lambda_i A_i, i = 1..n\}$. Τα $\{\lambda_i, i = 1..n\}$ ονομάζονται **ιδιοτιμές** του ενδομορφισμού f. Για δεδομένη ιδιοτιμή λ του f, το σύνολο των διανυσμάτων που ικανοποιούν την $f(X) = \lambda X$ λέγεται **λ-ιδιοχώρος** του f.

Ορισμός 5.3.2. Ένας υπόχωρος $W \neq \{O\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V λέγεται **αναλλοίωτος** ως προς τον ενδομορφισμό $f : V \to V$ ή **f-αναλλοίωτος** εάν ισχύει $f(W) \subset W$. Ειδικά, ένας διανυσματικός υπόχωρος $W \subset \mathbb{F}^n$ λέγεται αναλλοίωτος ως προς τον πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ εάν είναι αναλλοίωτος ως προς τον μετασχηματισμό $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ με $f_A(X) = AX$.

Σημείωση 5.3.1. Δουλεύοντας με τη βοήθεια μιας βάσης $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_n\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V και θεωρώντας την παράσταση πίνακα $C = {}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ ενός ενδομορφισμού οι έννοιες που ορίσθηκαν παραπάνω αντιστοιχούν μία προς μία μέσω του ισομορφισμού $\mathbf{a} : \mathbb{F}^n \to V$ με $\mathbf{a}(X) = \mathbf{a} \cdot X = X' \in V$. Ένα ιδιοδιάνυσμα $E' \in V, f(E') = \lambda E'$ του f αντιστοιχεί μέσω των συντεταγμένων του $E : \mathbf{a} \cdot E = E'$ σε ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $C : CE = \lambda E$ και ένας ιδιοχώρος $W' \subset V$ που ικανοποιεί την $f(W') = \lambda W'$ ορίζει έναν ιδιοχώρο $W \subset \mathbb{F}^n$ με $\mathbf{a}(W) = W'$ και την αντίστοιχη ιδιότητα $CX = \lambda X$ για κάθε $X \in W$.

Άσκηση 5.3.1. *Δείξε ότι κάθε f-αναλλοίωτος υπόχωρος W του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι επίσης αναλλοίωτος ως προς του ενδομορφισμό $f' = p(f)$ για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. Δείξε επίσης ότι αν ο f είναι αντιστρέψιμος και ο W είναι f-αναλλοίωτος, τότε ο W είναι και f^{-1}-αναλλοίωτος.*

Άσκηση 5.3.2. *Υπόθεσε ότι οι ενδομορφισμοί $\{f, g\}$ του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V μετατίθενται ($f \circ g = g \circ f$). Δείξε ότι κάθε ιδιοχώρος του ενός είναι αναλλοίωτος ως προς του άλλο.*

Άσκηση 5.3.3. *Δείξε ότι αν $\{X, Y\}$ είναι ιδιοδιανύσματα του ενδομορφισμού f ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές $\{\lambda, \mu\}$, τότε το διάνυσμα $sX + tY$ με $st \neq 0$, δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του f. Γενίκευσε αυτή την ιδιότητα για ιδιοδιανύσματα $\{X_1, \dots, X_k\}$ ως προς ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την άσκηση 4.2.2.

Άσκηση 5.3.4. *Δείξε ότι ένας ενδομορφισμός f του διανυσματικού χώρου V, για του οποίον κάθε διάνυσμα $O \neq X \in V$ είναι ιδιοδιάνυσμα, είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού μετασχηματισμού του $V : f = \lambda I_V$*

Άσκηση 5.3.5. *Δώσε ένα παράδειγμα ενδομορφισμού f ενός $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου ο οποίος δεν έχει ιδιοδιανύσματα ενώ ο f^2 έχει. Δείξε ότι αν ο f^2 έχει ιδιοδιανύσματα ως προς μη-αρνητική ιδιοτιμή $\lambda \geq 0$, τότε ο f έχει επίσης ένα ιδιοδιάνυσμα.*

Υπόδειξη: Παράδειγμα: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Επίσης η $(f^2 - \lambda^2 I_V)X = O$ συνεπάγεται την $(f - \lambda I_V)(f + \lambda I_V)X = O$.

Άσκηση 5.3.6. *Προσδιόρισε όλους τους f-αναλλοίωτους υποχώρους ενός διαγωνιοποιήσιμου ενδομορφισμού του n-διάστατου διανυσματικού χώρου V που έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές. Δείξε ότι υπάρχουν 2^n τέτοιοι υπόχωροι.*

Άσκηση 5.3.7. *Δείξε ότι για ενδομορφισμούς του $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V που μετατίθενται $\{f, g\}$ ισχύει ο* **δωωνυμικός τύπος***:*

$$(f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^k g^{n-k} \quad \text{εφόσον} \quad g \circ f = f \circ g.$$

Εάν ο ενδομορφισμός f είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε, θεωρώντας όλες τις διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ του f και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους $\{W_1, \dots, W_k\}$ έχουμε μια διάσπαση σε ευθύ άθροισμα:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k \quad \text{με} \quad f(X) = \lambda_i X \quad \text{για κάθε} \quad X \in W_i, i = 1..k\ .$$

Ο περιορισμός του f σε κάθε W_i είναι ένα πολλαπλάσιο του ταυτοτικού ενδομορφισμού $f|_{W_i} = \lambda_i I_{W_i} : W_i \to W_i$. Διαλέγοντας μια βάση $\mathbf{b_i}$ σε κάθε W_i και θεωρώντας την ένωση $\mathbf{a} = \mathbf{b_1} \cup \cdots \cup \mathbf{b_k}$ παίρνουμε μια βάση του V ως προς την οποία ο πίνακας παράστασης $C = {}_{\mathbf{a}}{}^{-1} f_{\mathbf{a}}$ του f έχει τη μορφή (όπως στην άσκηση 4.2.2)

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_k I_{n_k}} \end{pmatrix}.$$

Προφανώς, Οι υπόχωροι $\{W_i\}$ είναι αναλλοίωτοι ως προς f. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό των διαγωνιοποιήσιμων ενδομορφισμών.

Θεώρημα 5.3.1. *Κάθε f-αναλλοίωτος υπόχωρος $U \subset V$ ενός διαγωνιοποιήσιμου ενδομορφισμού $f : V \to V$ έχει μια βάση $\{\mathbf{b} = \{B_1, \dots, B_k\} \subset U\}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του f.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη αρκεί να θεωρήσουμε τους ιδιοχώρους $\{W_1, \dots, W_k\}$ του f και να δείξουμε ότι $U = (U \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap W_k)$.

Είναι προφανές ότι $(U \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap W_k) \subset U$. Δείχνουμε λοιπόν και ότι $U \subset (U \cap W_1) \oplus \cdots \oplus (U \cap W_k)$. Αυτό επιτυγχάνεται γράφοντας κάθε $X \in U$ σαν άθροισμα ιδιοδιανυσμάτων $X = X_1 + \cdots + X_k$ με $X_i \in W_i$ για $i = 1..k$. Αυτό είναι

δυνατόν λόγω της υπόθεσης διαγωνιοποίησης: $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Δείχνουμε λοιπόν ότι αυτά τα X_i ανήκουν επίσης στο U για $i = 1..k$. Πράγματι, καθώς ο U είναι f-αναλλοίωτος, τα επόμενα διανύσματα περιέχονται όλα στον U:

$$\begin{aligned} X &= X_1 + \cdots + X_k \ , \\ f(X) &= \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k \ , \\ f^2(X) &= \lambda_1^2 X_1 + \cdots + \lambda_k^2 X_k \ , \\ \ldots &= \quad \ldots\ldots\ldots \\ f^{k-1}(X) &= \lambda_1^{k-1} X_1 + \cdots + \lambda_k^{k-1} X_k \ , \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε μια $g \in U^N \subset V^*$ του *μηδενιστή* του U (άσκηση 4.5.6) και εφαρμόζουμε την g και στις δύο πλευρές των προηγουμένων εξισώσεων. Επειδή ισχύει $\{g(X) = g(f(X)) = \cdots = g(f^{k-1}(X)) = 0\}$, παίρνουμε ένα σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_k \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(X_1) \\ g(x_2) \\ \ldots \\ g(X_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας του ομογενούς συστήματος ως προς τα $\{g(X_i), i = 1..k\}$ είναι ο (ανάστροφος του) πίνακα του Vandermonde που είναι αντιστρέψιμος, καθώς οι ιδιοτιμές είναι ανά δύο διαφορετικές (άσκηση 4.5.12). Έτσι η λύση είναι η τετριμμένη $\{g(X_1) = \cdots = g(X_k) = 0\}$, για κάθε $g \in U^N$, άρα $X_i \in U$ για $i = 1..k$. □

Πόρισμα 5.3.1. *Δοθέντων δύο διαγωνιοποιήσιμων ενδομορφισμών $\{f, g\}$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V που μετατίθενται: $f \circ g = g \circ f$, υπάρχει βάση* **a** *του V αποτελούμενη από κοινά ιδιοδιανύσματα.*

Απόδειξη. Πράγματι, υπόθεσε ότι V_λ είναι ένας ιδιοχώρος του f. Τότε, κατά την άσκηση 5.3.2, ο V_λ είναι αναλλοίωτος ως προς g και κατά το θεώρημα 5.3.1 ο V_λ έχει μια βάση αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του g. Αλλά αυτά τα διανύσματα είναι ταυτόχρονα λ-ιδιοδιανύσματα του f. □

Ορισμός 5.3.3. Ο ενδομορφισμός $f : V \to V$ λέγεται **ημιαπλός** όταν για κάθε f-αναλλοίωτο υπόχωρο $W \subset V$ υπάρχει ένας f-αναλλοίωτος συμπληρωματικός υπόχωρος W', δηλ. $W \oplus W' = V$ και $\{f(W) \subset W \ , \ f(W') \subset W'\}$. Ο $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$ λέγεται **ημιαπλός** όταν ο ενδομορφισμός $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ είναι ημιαπλός.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι για αλγεβρικά κλειστά σώματα $\mathbb{F}$, δηλ. σώματα στα οποία κάθε πολυώνυμο $p(x)$ διασπάται $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)$ σε γραμμικούς παράγοντες, όπου $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι οι ρίζες του πολυωνύμου, οι ημιαπλοί ενδομορφισμοί συμπίπτουν με τους διαγωνιοποιήσιμους.

Θεώρημα 5.3.2. *Ο ενδομορφισμός $f : V \to V$ ενός $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V υπεράνω του κλειστού σώματος $\mathbb{F}$ είναι ημιαπλός, αν και μόνον αν είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν ο f είναι διαγωνιοποιήσιμος και W είναι ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος του n-διάστατου διανυσματικού χώρου V, τότε, κατά το θεώρημα 5.3.1, έχει μια βάση $\mathbf{b} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ από ιδιοδιανύσματα του f. Συμπληρώνοντας αυτή τη βάση με προσθήκη $n - k$ ανεξαρτήτων των **b** και ανεξαρτήτων μεταξύ

τους ιδιοδιανυσμάτων $\{C_1, \dots, C_{n-k}\}$ του f, ορίζουμε ένα f-αναλλοίωτο παραγόμενο χώρο $W' = \langle C_1, \dots, C_{n-k}\rangle$ με $V = W \oplus W'$.

Για το αντίστροφο χρησιμοποιούμε επαγωγή. Για $dim(V) = 1$ ο ισχυρισμός ισχύει τετριμμένα. Με ισχύουσα επαγωγική υπόθεση για $dim(V) = n-1$, αποδεικνύουμε την ιδιότητα και για $dim(V) = n$: Επειδή το $\mathbb{F}$ είναι κλειστό σώμα, το χαρακτηριστικό πολυώνυμου του f έχει μια ρίζα λ που είναι ιδιοτιμή του f με ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $B_1 : f(B_1) = \lambda B_1$, που ορίζει τον f-αναλλοίωτο υπόχωρο $W_1 = \langle B_1\rangle$. Κατά την υπόθεση ημιαπλότητας υπάρχει f-αναλλοίωτο συμπλήρωμα W_2 του $W_1 : W_1 \oplus W_2 = V$. Προφανώς ο περιορισμός $f|_{W_2} : W_2 \to W_2$ είναι επίσης ημιαπλός, και, καθώς $dim(W_2) = n-1$, κατά την επαγωγική υπόθεση ο W_2 έχει μια βάση $\mathbf{b}$ από ιδιοδιανύσματα. Έτσι το σύνολο $\{B_1\} \cup \mathbf{b}$ είναι μια βάση από ιδιοδιανύσματα του V, πράγμα που συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Πόρισμα 5.3.2. *Για δύο μετατιθέμενους $f \circ g = g \circ f$ ημιαπλούς ενδομορφισμούς $\{f, g\}$ ενός n-διάστατου διανυσματικού χώρου V υπεράνω του αλγεβρικά κλειστού σώματος $\mathbb{F}$, τό άθροισμα $h = g + f$ είναι επίσης ημιαπλός ενδομορφισμός.*

Απόδειξη. Πράγματι, κατά το θεώρημα 5.3.2 οι ενδομορφισμοί είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Κατά το πόρισμα 5.3.1 υπάρχει βάση $\mathbf{a} \subset V$ κοινών ιδιοδιανυσμάτων των δύο ενδομορφισμών. Αυτό συνεπάγεται ότι ο $f + g$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, άρα ημιαπλός. □

Άσκηση 5.3.8. *Προσδιόρισε τη μορφή όλων των πινάκων $A \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$ με την ιδιότητα $A^2 = O$ (ο μηδενικός πίνακας).*

Υπόδειξη: Δες ότι $|A| = 0$.

Άσκηση 5.3.9. *Στον διανυσματικό χώρο $V = \mathbb{F}[x]$ των πολυωνύμων ως προς το σώμα $\mathbb{F}$ θεώρησε τους ενδομορφισμούς της παραγώγου (άσκηση 4.5.4) $D(p(x))$, και $g(p(x)) = xp(x)$. Δείξε ότι $D \circ g - g \circ D = I_V$. Δείξε επίσης ότι σε διανυσματικούς χώρους V πεπερασμένης διάστασης δεν υπάρχουν ενδομορφισμοί $\{f, g\}$ με την ιδιότητα $f \circ g - g \circ f = I_V$.*

Υπόδειξη: Εξέτασε την $(D \circ g - g \circ D)(x^k) = x^k$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό χρησιμοποίησε παραστάσεις με πίνακες και δείξε ότι η εξίσωση για το ίχνος (ορισμός 3.5.2) $tr(AB - BA) = tr(I_n)$ είναι αδύνατη.

Άσκηση 5.3.10. *Ο ενδομορφισμός f του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V έχει την ιδιότητα $f^n = O$ αλλά $f^{n-1} \neq O$. Δείξε τις επόμενες ιδιότητες:*

1. *Υπάρχει ένα διάνυσμα $A \in V$ έτσι ώστε $f^{n-1}(A) \neq O$, και τα n διανύσματα $\{A, f(A), f^2(A), \dots, f^{n-1}(A)\}$ να αποτελούν βάση του V.*
2. *Ο πίνακας παράστασης $\mathbf{a}^{-1} f_{\mathbf{a}}$ του f ως προς αυτή τη βάση έχει τη μορφή:*

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & O & \\ & 1 & \ddots & & \\ & O & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. *Εκτός του τετριμμένου υποχώρου* $\{O\}$, *δεν υπάρχει άλλος* f*-αναλλοίωτος υπόχωρος* $W \subset V$ *με την ιδιότητα* $f(W) = W$.

Υπόδειξη: Nr-1 : Εξ υποθέσεως υπάρχει κάποιο $A \in V$ με $f^{n-1}(A) \neq O$, διαφορετικά θα ήταν επίσης $f^{n-1} = O$. Γι' αυτό το A χρησιμοποίησε επαγωγή για να δείξεις ότι τα διανύσματα

$$B_0 = A \ , \ B_1 = f(A) \ , \ B_2 = f^2(A) \ , \ \dots \ , \ B_{n-1} = f^{n-1}(A)$$

Είναι ανεξάρτητα. Πράγματι, το $B_0 = A \neq O$, και από την $B_1 = aB_0$ θα προέκυπτε $f^{n-1}(B_1) = O = af^{n-1}A \Rightarrow a = 0$, μια αντίφαση. Ανάλογα η γενικότερη υπόθεση $B_{k+1} \in \langle B_0, \dots, B_k \rangle$ οδηγεί σε αντίφαση κτλ.

Nr-2 : προκύπτει από το *nr-1*.

Nr-3 : Μια βασική παρατήρηση: το $A \notin Im(f)$, καθώς για όλα τα $X \in Im(f)$ ισχύει $f^{n-1}(X) = O$. Συνεπώς η εικόνα $Im(f) \neq V$. Ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος $W \subset V$ με $f(W) = W$ θα είχε για κάθε $X \in W$ και ένα $Y \in W$ με $f(Y) = X$. Αυτό θα είχε τη συνέπεια, ο περιορισμός $f' = f|_W : W \to W$ να ικανοποιεί και την $f'^{n-1} = O$. Θεώρησε το μικρότερο $k < n-1$ έτσι ώστε $f'^k \neq O$ και εφάρμοσε την βασική παρατήρηση στον f' για να δεις ότι η εικόνα $Im(f') \neq W$.

Άσκηση 5.3.11. *Δείξε ότι όλοι οι πίνακες* $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *που ικανοποιούν την συνθήκη* $A^n = O$ *αλλά* $A^{n-1} \neq O$, *είναι ανά δύο όμοιοι.*

Άσκηση 5.3.12. *Δείξε ότι ένας πίνακας* $A \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$ *με μιγαδικές ιδιοτιμές ορίζει έναν ημιαπλό* $f_A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Άσκηση 5.3.13. *Θεώρησε τον ενδομορφισμό* $f : V \to V$ *του* n*-διάστατου* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *και έναν* k*-διάστατο* f*-αναλλοίωτο υπόχωρο* $W \subset V$. *Δείξε τις επόμενες ιδιότητες (§ 2.5):*

1. *Ο ενδομορφισμός* f *ορίζει έναν άλλο ενδομορφισμό* $\tilde{f} : V/W \to V/W$ *μέσω της* $\tilde{f}(X+W) = f(X) + W$ *για* $X \in V$ $(\tilde{f}([X]_W) = [f(X)]_W)$, *έτσι ώστε το επόμενο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_W"'] & V \arrow[d, "p_W"] \\ V/W \arrow[r, "\tilde{f}"] & V/W \end{tikzcd}$$

2. *Θεώρησε μια βάση* $\mathbf{a} = \{A_1, \dots, A_k\}$ *του υποχώρου* W *και συμπλήρωσέ την με κάποια επιπλέον ανεξάρτητα διανύσματα* $\{B_1, \dots, B_{n-k} \in V\}$ *σε μια βάση* $\mathbf{c} = \{A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_{n-k}\}$ *του* V. *Δείξε ότι τα διανύσματα του χώρου πηλίκου:* $\mathbf{b} = \{[B_1]_W, \dots, [B_{n-k}]_W\}$ *αποτελούν μια βάση του* V/W.

3. *Ο πίνακας παράστασης του* f *ως προς τη βάση* $\mathbf{c}$ *έχει τη μορφή πίνακα με μπλοκ:*

$$\left(\begin{array}{c|c} M_k & N_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & P_{n-k} \end{array}\right)$$

με $M_k \in M_{\mathbb{F}}(k,k)$, $N_{k,n-k} \in M_{\mathbb{F}}(k, n-k)$
ο μηδενικός πίνακας $O_{n-k,k} \in M_{\mathbb{F}}(n-k, k)$,
και $P_{n-k} \in M_{\mathbb{F}}(n-k, n-k)$.

Ορισμός 5.3.4. Ένας ενδομορφισμός του n-διάστατου διανυσματικού χώρου V λέγεται **νόρμαλ** εάν ικανοποιεί την συνθήκη $f^* \circ f = f \circ f^*$ δηλ. μετατίθεται με τον συζυγή του.

Ένας πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ λέγεται **νόρμαλ** εάν μετατίθεται με τον συζυγή του $A^*A = AA^*$.

Άσκηση 5.3.14. *Δείξε ότι ο πίνακας παράστασης ενός νόρμαλ ενδομορφισμού του n-διάστατου διανυσματικού χώρου V ως προς μια ορθοκανονική βάση είναι ένας νόρμαλ πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$.*

Θεώρημα 5.3.3. *Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ είναι μοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος, ισοδύναμα: ο ενδομορφισμός $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : f_A(X) = AX$ είναι μοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος, δηλ. υπάρχει μοναδιαίος πίνακας S με $D = S^*AS$ διαγώνιο, αν και μόνον αν ο πίνακας είναι νόρμαλ: $A^*A = AA^*$.*

Απόδειξη. Αν ο A είαι διαγωνιοποιήσιμος μέσω μοναδιαίου πίνακα $S : S^{-1} = S^*$, τότε

$$A = SDS^* \;\Rightarrow\; A^* = SD^*S^* \;\Rightarrow AA^* = (SDS^*)(SD^*S^*) = SDD^*S^* \;\text{ και}$$
$$A^*A = (SD^*S^*)(SDS^*) = SD^*DS^*$$
$$\text{και καθώς οι πίνακες είναι διαγώνιοι: } D^*D = DD^*,$$

αυτό συνεπάγεται επίσης την $AA^* = A^*A$. Αντίστροφα, υπόθεσε ότι $AA^* = A^*A$ και διάλεξε μια ιδιοτιμή λ του A με αντίστοιχο ιδιοχώρο V_λ.

$$\text{Για } X \in V_\lambda \;\Rightarrow AX = \lambda X \in V_\lambda \;\text{ τότε } Y = A^*X \;\text{ ικανοποιεί } AY = A(A^*X) =$$
$$(AA^*)X = (A^*A)X = A^*(AX) = A^*(\lambda X) = \lambda A^*X = \lambda Y \;\Rightarrow\; Y \in V_\lambda.$$

Έτσι ο V_λ είναι A^*-αναλλοίωτος. Έπεται ότι $W = V_\lambda^\perp$ είναι ταυτόχρονα A αλλά και A^* αναλλοίωτος:

$$X \in W, Y \in V_\lambda \;\Rightarrow\; (AX)\cdot Y = X\cdot(A^*Y) = 0 \;\text{ καθώς } A^*Y \in V_\lambda\,.$$

Αυτό δείχνει ότι ο W είναι A-αναλλοίωτος, και ανάλογα βλέπουμε ότι ο W είναι και A^*-αναλλοίωτος.

Καθώς η διάσταση του W είναι μικρότερη της διάστασης του V, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή και να δείξουμε ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Πράγματι, για $dim(V) = 1$ το θεώρημα αληθεύει τετριμμένα. Υπόθεσε λοιπόν ότι αυτό αληθεύει και για $dim(V) < n$. Δείχνουμε ότι αληθεύει και για $dim(V) = n$ διαλέγοντας έναν A-ιδιοχώρο V_λ και το ορθογώνιο συμπλήρωμά του $W = V_\lambda^\perp$ όπως προηγουμένως. Διάλεξε μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{a}$ του V_λ. Οι ενδομορφισμοί $\{f_A, f_{A^*}\}$ ορίζουν με τους περιορισμούς τους στον W ενδομορφισμούς του W που επίσης ικανοποιούν την μεταθετική σχέση $AA^* = A^*A$. Άρα, κατά την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathbf{b}$ του W έτσι ώστε ο αντίστοιχος πίνακας παράστασης του περιορισμού του f_A στον W να είναι διαγώνιος. Έπεται ότι ο πίνακας παράστασης του f_A ως προς τη βάση $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ του V είναι διαγώνιος. □

Άσκηση 5.3.15. *Δείξε ότι ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ είναι νόρμαλ, αν και μόνον αν, για το κανονικό Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^n$ ισχύει $\|AX\| = \|A^*X\|$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^n$.*

Υπόδειξη: $(A^*A - AA^*)X \cdot X = 0 \iff (A^*AX) \cdot X = (AA^*)X \cdot X$ κτλ.

Άσκηση 5.3.16. *Δείξε ότι ο νόρμαλ πίνακας A έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

1. $Kern(f_A) = Kern(f_{A^*})$.
2. *Εάν λ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα X, τότε και $A^*X = \overline{\lambda}X$.*
3. *Για $\{\mu \neq \nu\}$ ιδιοτιμές του A και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{X, Y\} \Rightarrow X \cdot Y = 0$.*

Υπόδειξη: Nr-1 : έπεται από την $\|A^*X\| = \|AX\|$.
Nr-2 : έπεται επίσης από αυτήν, καθώς $\|(A - \lambda I_n)X\| = \|(A^* - \overline{\lambda} I_n)X\|$.
Nr-3 : $(\mu - \nu)X \cdot Y = (\mu X) \cdot Y - X \cdot (\overline{\nu} Y) = (AX) \cdot Y - X \cdot (A^*Y) =$
$(AX) \cdot Y - (AX) \cdot Y = 0$.

5.4 Το ελάχιστο πολυώνυμο

> Έχω το εξής ελάττωμα: Εκείνο που με τραβά σε κάτι που δεν ξέρω, η με απομακρύνει, είναι πάντα μια λεπτομέρεια ασήμαντη, αστάθμητη, περιφρονήσιμη. Από την πείρα μου βρίσκω πως δεν έχω άδικο να διαλέγω έτσι, ό,τι μου πηγαίνει καλύτερα.
>
> *Γ. Σεφέρης, Μέρες 28/5/1932*

Όπως σημειώσαμε στην **§** 5.2, δοθέντος ενδομορφισμού $f : V \to V$ ενός n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου, το σύνολο $I_{\mathbb{F}}^f = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] : p(f) = 0\} \subset \mathbb{F}[x]$ είναι ένας μη-τετριμμένος διανυσματικός υπόχωρος του πολυωνύμων $\mathbb{F}[x]$. Μάλιστα το $\mathbb{F}[x]$ είναι μια **άλγεβρα** [7, p.180], καθώς εκτός της δομής διανυσματικού χώρου έχουμε επίσης ένα πολλαπλασιασμό $p(x)q(x)$ πολυωνύμων. Σχετικά με αυτό το γινόμενο το $I_{\mathbb{F}}^f \subset \mathbb{F}[x]$ είναι ένα **ιδεώδες** [7, p. 204], δηλαδή ισχύει ότι για ένα $p(x) \in I_{\mathbb{F}}^f$ και ένα $q(x) \in \mathbb{F}[x]$ το γινόμενο $p'(x) = p(x)q(x) \in I_{\mathbb{F}}^f$.

Ορισμός 5.4.1. Το **ελάχιστο πολυώνυμο** του ενδομορφισμού f είναι ένα **μονικό** πολυώνυμο (δηλ. πολυώνυμο με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου = 1) ελαχίστου βαθμού $m_f(x) \in I_{\mathbb{F}}^f$, δηλ. πολυώνυμο $m_f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ελαχίστου βαθμού, έτσι ώστε $m_f(f) = 0$.

Για έναν πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$ το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του A είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του ενδομορφισμού $f_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ με $f_A(X) = AX$.

Άσκηση 5.4.1. *Δείξε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $p(x)$ του ενδομορφισμού $f : V \to V$ συμπίπτει με το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα παράστασής του $\mathbf{a}^{-1}f_{\mathbf{a}}$ ως προς μια βάση $\mathbf{a}$ του V.*

Υπόδειξη: Αυτό είναι παρόμοιο με το θεώρημα 5.2.2. Χρησιμοποιώντας τον ισομορφισμό $\mathbf{a} : \mathbb{F}^n \to V$ που ορίζεται από μια βάση $\mathbf{a}$ (δες εξίσωση

$$eq :: bbaX \tag{5.1}$$

), ο πίνακας παράστασης $\mathbf{a}^{-1}f_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}^{-1} \circ f \circ \mathbf{a}$ και η σχέση $(\mathbf{a}^{-1}f_{\mathbf{a}})^k = \mathbf{a}^{-1}(f^k)_{\mathbf{a}}$ συνεπάγονται τη σχέση $\mathbf{a}^{-1}p(f)_{\mathbf{a}} = p(\mathbf{a}^{-1}f_{\mathbf{a}})$ για κάθε πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, και ιδιαίτερα και για το ελάχιστο πολυώνυμο.

Θεώρημα 5.4.1. *Το ελάχιστο πολυώνυμο m_f ενός ενδομορφισμού f διαιρεί όλα τα στοιχεία $p(x)$ του ιδεώδους $I_{\mathbb{F}}^f$.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν $k = deg(m_f)$ ο βαθμός του m_f, διαιρώντας ένα πολυώνυμο $p(x) \in I_{\mathbb{F}}^f$ με το $m_f(x)$ παίρνουμε

$$p(x) = m_f(x)q(x) + r(x) \quad \text{με} \quad q(x)\ ,\ r(x) \quad \text{και} \quad deg(r(x)) < k, \tag{5.2}$$

όπου $\{q(x), r(x)\}$ είναι αντίστοιχα το **πηλίκον** και το **υπόλοιπο** της διαίρεσης ([7, p.181]), και $deg(r(x)) < k$. Εάν ήταν $r(x) \neq O$, θα είχαμε ένα πολυώνυμο $r(x) \in I_{\mathbb{F}}^f$ βαθμού μικρότερου του k, που αντιφάσκει στον ορισμό του m_f. □

Το ελάχιστο πολυώνυμο m_f του ενδομορφισμού f διαιρεί πάντοτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Αυτό είναι μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος των Cayley και Hamilton.

Θεώρημα 5.4.2 (Θεώρημα των Cayley και Hamilton)**.** *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ του ενδομορφισμού $f : V \to V$, του n-διάστατου διανυσματικού χώρου V ικανοποιεί την $\chi_f(f) = O$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε έναν πίνακα παράστασης A του f και η απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα 4.1.3. Το τελευταίο εκφράζει την ορίζουσα ενός πίνακα A μέσω του πίνακα $A^{\#}$ και της σχέσης

$$|A|I_n = A^{\#}A. \tag{5.3}$$

Ο πίνακας $A^{\#}$ έχει στοιχεία $(A^{\#})_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$, όπου A_{ij} είναι οι *ελάσσονες* του A, που είναι οι $(n-1)\times(n-1)$ πίνακες που προκύπτουν από τον A αφαιρώντας την i-στη γραμμή και την j-στη στήλη.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (5.3) στον $A - \lambda I_n$ και αναπτύσσοντας τον $(A - \lambda I_n)^{\#}$ σε δυνάμεις $\{\lambda^k\}$ με συντελεστές κάποιους πίνακες $\{A_1, \dots, A_n\}$ έχουμε

$$\chi_A(\lambda)I_n = |A - \lambda I_n|I_n = (A - \lambda I_n)^{\#}(A - \lambda I_n) \quad \Leftrightarrow$$
$$(\lambda^{n-1}A_1 + \lambda^{n-2}A_2 + \cdots + \lambda A_{n-1} + A_n)(A - \lambda I_n) = a_n\lambda^n I_n + \cdots + a_1\lambda I_n + a_0 I_n$$
$$\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rr} -A_1 = & a_n I_n \\ A_1A - A_2 = & a_{n-1}I_n \\ A_2A - A_3 = & a_{n-2}I_n \\ \dots \quad \dots & \dots \\ A_{n-1}A - A_n = & a_1 I_n \\ A_nA = & a_0 I_n \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rr} -A_1A^n = & a_nA^n \\ (A_1A - A_2)A^{n-1} = & a_{n-1}A^{n-1} \\ (A_2A - A_3)A^{n-2} = & a_{n-2}A^{n-2} \\ \dots \quad \dots & \dots \\ (A_{n-1}A - A_n)A = & a_1 A \\ A_nA = & a_0 A \end{array}\right.$$

Οι αριστερές πλευρές έχουν άθροισμα O και οι δεξιές πλευρές έχουν άθροισμα $\chi_A(A)$, άρα προκύπτει $O = \chi_A(A)$. □

Δείχνει λοιπόν το θεώρημα ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του f είναι βαθμού μικρότερου ή ίσου με την $n = dim(V)$. Η γενική ιδέα για την ανάλυση του ενδομορφισμού f είναι να πετύχουμε μια διάσπαση $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ σε f-αναλλοίωτους υποχώρους έτσι ώστε ο f να δρα σε καθένα από αυτούς με απλό τρόπο. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας το ελάχιστο πολυώνυμο και τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 5.4.3. *Εάν το ελάχιστο πολυώνυμο $p(x)$ του ενδομορφισμού $f : V \to V$ είναι γινόμενο $p(x) = p_1(x)p_2(x)$ δύο* **σχετικά πρώτων** *(ορισμός 7.3.4) πολυωνύμων, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:*

1. *Ο V διασπάται σε ευθύ άθροισμα $V = V_1 \oplus V_2$ f-αναλλοίωτων υποχώρων.*
2. $V_i = \{X \in V : p_i(f)X = 0\}$ *για* $i = 1, 2$.
3. $V_1 = Im(p_2(f))$ *και* $V_2 = Im(p_1(f))$.
4. *Το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού $f_i = f|_{V_i} : V_i \to V_i$ είναι $p_i(x)$ για $i = 1, 2$.*

Απόδειξη. Nrs 1-2: Επειδή τα πολυώνυμα $\{p_1(x), p_2(x)\}$ είναι σχετικά πρώτα, υπάρχουν δύο πολυώνυμα $\{q_1(x), q_2(x)\}$ έτσι ώστε (παράρτημα 7.3):

$$p_1(x)q_1(x) + p_2(x)q_2(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad p_1(f)q_1(f) + p_2(f)q_2(f) = I_V \quad \Leftrightarrow$$
$$p_1(f)q_1(f)(X) + p_2(f)q_2(f)(X) = X \quad \text{για κάθε} \quad X \in V\,. \tag{5.4}$$

Χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα $p(f)q(f) = q(f)p(f)$ και εφαρμόζοντας τον $p_2(f)$ στο $p_1(f)q_1(f)X$ έχουμε

$$p_2(f)(p_1(f)q_1(f)X) = p(f)q_1(X) = O \quad \Rightarrow \quad X_2 = p_1(f)q_1(f)X \in V_2 \quad \text{και}$$
$$\text{ανάλογα} \quad p_1(f)(p_2(f)q_2(f)X) = p(f)q_2(X) = O \;\Rightarrow\; X_1 = p_2(f)q_2(f)X \in V_1$$
$$\overset{(5.4)}{\Longrightarrow} \quad X = X_1 + X_2 \in V_1 + V_2 \quad \text{για κάθε} \quad X \in V\,.$$

Ισχύει όμως $V_1 \cap V_2 = \{O\}$, διότι από τη σχέση (5.4) για $X \in V_1 \cap V_2$ η εξίσωση $p_1(f)X = p_2(f)X = O$ συνεπάγεται την $X = O$. Αυτό αποδεικνύει τη διάσπαση $V = V_1 \oplus V_2$.

Η μεταθετικότητα $p_i(f)(f(X)) = f(p_i(f)(X)) = O$ για $X \in V_i, i = 1, 2$, δείχνει το f-αναλλοίωτο των υποχώρων $\{V_1, V_2\}$ και συμπληρώνει την απόδειξη των δύο πρώτων *nrs*.

Nr-3 : Αφού, εξ ορισμού $V_1 = Kern(p_1(f))$, έπεται $Im(p_2(f)) \subset V_1$. Αντίστροφα, αν $X \in V_1$, τότε η (5.4) γίνεται $X = p_2(f)q_2(f)X \in Im(p_2(f))$. Ανάλογα αποδεικνύεται η $V_2 = Im(p_1(f))$.

Nr-4 : Για την απόδειξη υπόθεσε ότι $\{\hat{p}_1, \hat{p}_2\}$ είναι τα ελάχιστα πολυώνυμα των $\{f_1, f_2\}$. Τότε το γινόμενό τους $\hat{m} = \hat{p}_1\hat{p}_2$ ικανοποιεί $\hat{m}(f) = O$. Πράγματι, γράφοντας το $X \in V$, ως $X = X_1 + X_2 \in V_1 \oplus V_2$ και χρησιμοποιώντας την μεταθετικότητα $\{\hat{p}_1(f)\hat{p}_2(f) = \hat{p}_2(f)\hat{p}_1(f)\}$ βλέπουμε ότι για $X = X_1 + X_2 \in V_1 \oplus V_2$

$$\hat{m}(f)X = (\hat{p}_1(f)\hat{p}_2(f))(X_1 + X_2) = (\hat{p}_2(f)\hat{p}_1(f))(X_1) + (\hat{p}_1(f)\hat{p}_2(f))(X_2) = O.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι το $\hat{m}(x)$ διαιρεί το $p(x)$. Εξ ορισμού επίσης $p_1(f)X = O$ για κάθε $X \in V_1$. Άρα, το $\hat{p}_i(x)$ διαιρεί το $p_i(x)$. Όμως ο βαθμός του $\hat{p}_i(x)$ δεν μπορεί να είναι μικρότερος του $p_i(x)$, διότι τότε το $\hat{m}(x)$ θα είχε βαθμό μικρότερο του ελαχίστου πολυωνύμου $p(x)$, αντιφατικά προς τον ορισμό του τελευταίου. Αυτό δείχνει ότι $\hat{p}_i(x) = p_i(x)$ για $i = 1, 2$. □

Θεωρώντας το γινόμενο σχετικά πρώτων πολυωνύμων $p_1(x) \dots p_k(x)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.4.3 διαδοχικά στα $p_1(x), [p_2(x) \dots p_k(x)]$, κατόπιν στα $p_2(x), [p_3(x) \dots p_k(x)]$ κ.ο.κ, συμπεραίνουμε την επόμενη γενίκευση.

Θεώρημα 5.4.4. *Εάν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ του ενδομορφισμού $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι γινόμενο $m_f(x) = p_1(x) \dots p_k(x)$ σχετικά πρώτων πολυωνύμων, τότε ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:*

1. *Ο διανυσματικός χώρος V διασπάται σ' ένα ευθύ άθροισμα $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ f-αναλλοίωτων υποχώρων.*
2. *Κάθε $V_i = \{X \in V : p_i(f)X = O\}$ για $i = 1..k$.*
3. *Το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού $f_i = f|_{V_i} : V_i \to V_i$ είναι $p_i(x)$ για $i = 1..k$.*

Το θεώρημα δείχνει και τη σημασία του σώματος $\mathbb{F}$ στο θέμα της διάσπασης του V σε f-αναλλοίωτους υποχώρους στους οποίους ο ενδομορφισμός δρα με έναν απλό τρόπο. Κάθε πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, όπως και το ελάχιστο $m_f(x)$, αναλύεται σε γινόμενο **αναγώγων** πολυωνύμων of $q(x) \in \mathbb{F}[x]$, δηλ. πολυωνύμων που δεν γράφονται σαν γινόμενα άλλων μικρότερου βαθμού. Αυτό μοιάζει με την παραγοντοποίηση ενός ακεραίου σε γινόμενο πρώτων αριθμών. Έτσι, στη διάσπαση σύμφωνα με το θεώρημα 5.4.4 ένα κρίσιμο ρόλο παίζουν τα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{F}[x]$, τα οποία διαφέρουν από σώμα σε σώμα.

Έτσι, στο σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών, και γενικότερα σε κάθε **κλειστό** σώμα, τα ανάγωγα πολυώνυμα είναι *γραμμικά* της μορφής $\{(x - \lambda)\}$. Στο σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι γραμμικά και τετραγωνικά $\{ax^2 + bx + c\}$ και στο σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών τα ανάγωγα πολυώνυμα μπορεί να είναι οποιουδήποτε βαθμού (κάτι που δυσκολεύει αρκετά τον προσδιορισμό της διάσπασης ενός ενδομορφισμού ενός $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου).

Το κλειδί είναι η απλότητα των αναγώγων πολυωνύμων του $\mathbb{F}[x]$. Όσο πιο απλά είναι αυτά, τόσο πιο απλή είναι και η παράσταση με πίνακα του ενδομορφισμού f. Για παράδειγμα, οι απλούστεροι ενδομορφισμοί, που είναι οι *διαγωνιοποιήσιμοι* έχουν το επόμενο χαρακτηριστικό.

Θεώρημα 5.4.5. *Ο ενδομορφισμός $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε και μόνον τότε, όταν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ είναι γινόμενο διαφορετικών γραμμικών παραγόντων*

$$m_f(x) \;=\; (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k) \;.$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν ο f είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε υπάρχει μια βάση $\mathbf{a}$ από ιδιοδιανύσματα του f, και αντίστοιχη παράσταση με πίνακα (δες (4.13))

$$_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}} \;=\; \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1 I_{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\lambda_k I_{n_k}} \end{pmatrix},$$

όπου τα $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ είναι οι διαφορετικές ιδιοτιμές και $\{I_{n_i}, i = 1..k\}$ οι ταυτοτικοί πίνακες στους αντίστοιχους ιδιοχώρους $\{W_1, \dots, W_k\}$ του $_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$. Βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει

$$(f - \lambda_1 I_V) \dots (f - \lambda_k I_V) = O \;,$$

πράγμα που συνεπάγεται ότι το $m_f(x)$ διαιρεί το $m'(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_k)$. Αυτό σημαίνει ότι το $m_f(x)$ θα είναι γινόμενο κάποιων από τα $\{(x - \lambda_i)\}$. Όμως διαπιστώνουμε αμέσως ότι κανένας από αυτούς τους παράγοντας δεν είναι δυνατόν

να λείπει. Εάν για παράδειγμα ήταν $m_f(x) = (x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_k)$, τότε για ένα $X \neq O$ του λ_1-ιδιοχώρου θα είχαμε $m_f(f)X \neq O$, που αντιφάσκει στον ορισμό του $m_f(x)$.

Αντίστροφα, αν ισχύει $m_f(x) = m'(x)$ τότε το θεώρημα 5.4.4 εξασφαλίζει μια διάσπαση του διανυσματικού χώρου V σε ευθύ άθροισμα $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ υποχώρων του $\{V_i\}$ στους οποίους το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού $f_i = f|_{V_i}$ είναι $(x-\lambda_i)$. Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε V_i, ο $f_i = \lambda_i I_{V_i}$ και συνολικά ο f είναι διαγωνιοποιήσιμος. □

Άσκηση 5.4.2. *Δείξε, χωρίς χρήση του θεωρήματος 5.4.5, ότι ο ενδομορφισμός f του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V έχει ιδιοτιμή λ, τότε και μόνον τότε, όταν το ελάχιστο πολυώνυμό του $m_f(x)$ έχει το $x-\lambda$ ως παράγοντα.*

Υπόδειξη: Εάν το $X \neq O$ και $f(X) = \lambda X$ όμως το $m_f(x)$ δεν έχει το $x-\lambda$ ως παράγοντα, τότε κάνε διαίρεση $m_f(x) = q(x)(x-\lambda) + r$ με $\mathbb{F} \ni r \neq 0$. Τότε

$$O = m_f(f)X = q(f)(f-\lambda I_V)X + rX = rX \neq O \quad \text{που είναι άτοπο.}$$

Αντίστροφα αν $m_f(x) = q(x)(x-\lambda)$, τότε υπάρχει X έτσι ώστε $q(f)X \neq O$, διαφορετικά το $q(x)$ θα ήταν βαθμού μικρότερου από αυτόν του $m_f(x)$ και θα μηδένιζε όλα τα $X \in V$ πράγμα που αντιφάσκει στον ορισμό του $m_f(x)$. Για ένα τέτοιο λοιπόν X : $Y = q(f)X \neq 0$ έπεται $f(Y) = \lambda Y$.

Άσκηση 5.4.3. *Υπολόγισε του πίνακα $(A-\lambda I_n)^{\#}$ και γράψε του στη μορφή του θεωρήματος 5.4.2: $\lambda^k A_k + \dots + \lambda A_1 + A_0$, όπου $\{A_0, A_1, \dots, A_k\}$ σταθεροί πίνακες, για τους:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 5.4.4. *Επαλήθευσε το θεώρημα 5.4.2 για τους πίνακες του 5.4.3.*

Άσκηση 5.4.5. *Έστω $f : V \to V$ ενδομορφισμός του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V και $W \subset V$ ένας f-αναλλοίωτος υπόχωρος του V. Θεώρησε τον προκύπτοντα ενδομορφισμό στο χώρο πηλίκου (άσκηση 5.3.13) $\tilde{f} : V/W \to V/W$ για τον οποίο ισχύει $\tilde{f}([X]_W) = [f(X)]_W$. Δείξε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x)$ του f είναι γινόμενο $\chi_f(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$ των χαρακτηριστικών πολυωνύμων $\chi_1(x)$ του περιορισμού $f_W = f|_W$ και του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_2(x)$ του $\tilde{f}$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την άσκηση 5.3.13 και την παράσταση του f, που εξηγήθηκε εκεί, μέσω του πίνακα

$$\left(\begin{array}{c|c} M_k & N_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & P_{n-k} \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \chi_f(x) = \left|\begin{array}{c|c} M_k - xI_k & N_{k,n-k} \\ \hline O_{n-k,k} & P_{n-k} - xI_{n-k} \end{array}\right| =$$
$$|M_k - xI_k||P_{n-k} - xI_{n-k}| = \chi_1(x)\chi_2(x) \ .$$

Άσκηση 5.4.6. *Έστω $f : V \to V$ ενδομορφισμός του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V του οποίου το ελάχιστο πολυώνυμο είναι της μορφής $m_f(x) = p(x)^k$ για ένα ανάγωγο πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$. Δείξε ότι:*

1. *Ο υπόχωρος $W = Im(p(f)^{k-1}) \subset V$ είναι f-αναλλοίωτος.*

2. *Το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού* $f_W = f|_W$ *είναι* $p(x)$.
3. *Το ελάχιστο πολυώνυμο του* $\tilde{f} : V/W \to V/W$ *είναι* $p(x)^{k-1}$.

Υπόδειξη: Nr-1 : $f((p^{k-1}(f))(V)) = (p^{k-1}(f))(f(V))) \subset (p^{k-1}(f))(V)$.

Nr-2 : Σίγουρα $p(f)(W) = p(f)^k(W) = \{O\}$, που συνεπάγεται ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $\chi_W(x)$ του W διαιρεί το $p(x)$. Επειδή το τελευταίο είναι ανάγωγο, $p(x) = \chi_W(x)$.

Nr-3 : Έπεται από το *nr-2* και την άσκηση 5.4.5.

Θεώρημα 5.4.6. *Υπόθεσε ότι το* $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0$ *: ελάχιστο πολυώνυμο του ενδομορφισμού* $f : V \to V$ *του n-διάστατου* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *είναι ανάγωγο. Τότε:*

1. *Για κάθε* $O \neq X \in V$ *τα διανύσματα* $\{X, f(X), \ldots, f^{k-1}(X)\}$ *είναι ανεξάρτητα και παράγουν έναν* f*-αναλλοίωτο υπόχωρο* $V_X \subset V$.
2. *Ως προς αυτή τη βάση ο πίνακας παράστασης του περιορισμού* $f_X = f|_{V_X}$ *είναι*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}.$$

3. *Για δύο διαφορετικά διανύσματα* $\{X, Y \in V\}$ *οι αντίστοιχοι υπόχωροι* $\{V_X, V_Y\}$ *ή συμπίπτουν ή έχουν τομή του τετριμμένο υπόχωρο* $\{O\}$.
4. *Υπάρχουν ανεξάρτητα διανύσματα* $\{X_1, \ldots, X_l\}$ *έτσι ώστε* $V = V_{X_1} \oplus \cdots \oplus V_{X_l}$.
5. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του* f *είναι* $(-1)^{kl}p(x)^l$ *και η διάσταση* $dim(V)$ *διαιρείται με το* k.

Απόδειξη. Nr-1 : Όρισε τα $\{A_1 = X, A_2 = f(X), \ldots, A_k = f^{k-1}(X)\}$, για τα οποία $V_X = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$. Τότε

$$\begin{aligned} f(A_i) = A_{i+1} \text{ για } i < k \text{ και } f(A_k) = f^k(X) \;&=\; -(a_{k-1}f^{k-1}(X) + \cdots + a_0X) = \\ -(a_{k-1}A_k + \cdots + a_0A_1) \quad &\Rightarrow \quad f(V_X) \subset V_X\,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Αυτό δείχνει το f-αναλλοίωτο του V_X. Υπόθεσε τώρα ότι $p'(x)$ είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού $f_X = f|_{V_X}$. Επειδή $p(f)X = O$ για κάθε $X \in V_X$, το $p'(x)$ διαιρεί το $p(x)$ και επειδή το τελευταίο είναι ανάγωγο $p'(x) = p(x)$. Αυτό συνεπάγεται την ανεξαρτησία των $\{A_1, \ldots, A_k\}$. Πράγματι αν $1 < s < k$ ήταν ο μικρότερος δείκτης για τον οποίο τα $A_1, \ldots, A_s$ ήταν ανεξάρτητα, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο $p'(x)$ θα ήταν βαθμού s πράγμα που αντιφάσκει στο $deg(p'(x)) = k$.

Nr-2 : έπεται από τις εξισώσεις (5.5).

Nr-3 : Υπόθεσε ότι $O \neq Z \in V_X \cap V_Y$. Τότε, από το f-αναλλοίωτο των $\{V_X, V_Y\}$ ολόκληρο το V_Z πρέπει να περιέχεται στον V_X καθώς επίσης και στον V_Y, πράγμα που συνεπάγεται την αλήθεια του ισχυρισμού.

Nr-4 : Ξεκίνησε με ένα $X_1 \neq O$ και τον υπόχωρο V_{X_1}. Εάν είναι $V_{X_1} = V$ τότε τελειώσαμε. Διαφορετικά, εάν είναι $O \neq X_2 \notin V_{X_1}$ τότε $V_{X_1} \cap V_{X_2} = \{O\}$. Εάν είναι

πάλι $V_{X_1} \oplus V_{X_2} = V$ τελειώσαμε. Διαφορετικά, εάν $O \neq X_3 \notin V_{X_1} \oplus V_{X_2}$ τότε είναι πάλι $V_{X_3} \cap (V_{X_1} \oplus V_{X_2}) = \{O\}$. Αυτό διότι ένα $O \neq Z \in V_{X_3} \cap (V_{X_1} \oplus V_{X_2})$, από το f-αναλλοίωτο αυτών των υποχώρων, θα σήμαινε ότι $V_{X_3} = V_Z \subset V_{X_1} \oplus V_{X_2}$ που αντιφάσκει στην επιλογή του $X_3 \notin V_{X_1} \oplus V_{X_2}$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την ακολουθία $\{X_1, \dots, X_l\}$ που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Nr-5 : Αυτό είναι συνέπεια της άσκησης 4.2.4 και του *nr-2*. □

Το τελευταίο θεώρημα δείχνει ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός ενδομορφισμού f με ανάγωγο ελάχιστο πολυώνυμο $p(x)$ είναι ακριβώς μια δύναμη $\pm p(x)^k$ του $p(x)$. Αυτό γενικεύεται με το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.7. *Υπόθεσε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ του ενδομορφισμού $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V είναι μιά δύναμη $p(x)^r$ του $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ το οποίο είναι ανάγωγο. Τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x) = \pm p(x)^s$ είναι επίσης μια δύναμη του ιδίου πολυωνύμου με $s \geq r$.*

Απόδειξη. Κάνουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς r. Για $r = 1$ αυτό ταυτίζεται με το θεώρημα 5.4.6. Με βάση την υπόθεση επαγωγής ότι το θεώρημα αληθεύει για δυνάμεις μικρότερες ή ίσες του $r - 1$ δείχνουμε ότι αυτό αληθεύει και για το r.

Πράγματι, κατά την άσκηση 5.4.6 ο υπόχωρος $W = Im(p(f)^{r-1})$ είναι f-αναλλοίωτος και το ελάχιστο πολυώνυμο του περιορισμού $f_W = f|_W : W \to W$ είναι το $p(x)$. Από το θεώρημα 5.4.6 πάλι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f_W θα είναι μια δύναμη $\pm p(x)^s$. Κατά την άσκηση 5.4.6 πάλι, ξέρουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο του $\tilde{f} : V/W \to V/W$ είναι $p(x)^{r-1}$, και από την επαγωγική υπόθεση το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\tilde{f}$ θα είναι μια δύναμη $\pm p(x)^t$ με $t \geq r - 1$. Εφαρμόζοντας την άσκηση 5.4.5 βλέπουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f είναι $\chi_f = \pm p(x)^{s+t}$. □

Το θεώρημα αυτό έχει ως συνέπεια, ένα είδος βελτίωσης του θεωρήματος 5.4.3 :

Θεώρημα 5.4.8. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x)$ του ενδομορφισμού f του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V διασπάται σε δυνάμεις πολυωνύμων με τους ίδιους ακριβώς ανάγωγους παράγοντες που διασπάται το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$. Ακριβέστερα, αν*

$$\begin{aligned} m_f(x) &= p_1(x)^{k_1} \dots p_r(x)^{k_r}, \quad \text{τότε} \\ \chi_f(x) &= \pm p_1(x)^{n_1} \dots p_r(x)^{n_r}, \quad \text{με} \\ & n_1 \geq k1, \dots, n_r \geq k_r . \end{aligned}$$

Άσκηση 5.4.7. *Υπόθεσε ότι ο $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος V διασπάται $V = V_1 \oplus V_2$ σε δύο f-αναλλοίωτους υποχώρους του ενδομορφισμού $f : V \to V$. Δείξε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_f(x)$ του f είναι το γινόμενο $\chi_f(x) = \chi_1(x)\chi_2(x)$ των περιορισμών $f_i = f|_{V_i}$ του f στους V_i για $i = 1, 2$. Δείξε επίσης ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ του f είναι το* **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο** *των ελαχίστων πολυωνύμων $\{m_1(x), m_2(x)\}$ των $\{f_1, f_2\}$.*

Υπόδειξη: Διαλέγοντας δυο βάσεις $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ στους $\{V_1, V_2\}$, και θεωρώντας τη βάση $\mathbf{c} = \mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ του V, ο πίνακας παράστασης του f έχει τη μορφή πίνακα με μπλοκ:

$$C = {}_{\mathbf{c}}{}^{-1} f_{\mathbf{c}} = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array} \right) \quad \text{με} \quad A = {}_{\mathbf{a}}{}^{-1} f_{1\mathbf{a}}, \; B = {}_{\mathbf{b}}{}^{-1} f_{2\mathbf{b}}.$$

Από αυτό έπεται ο ισχυρισμός για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $m'(x)$ των $\{m_1(x), m_2(x)\}$ σχηματίζεται πολλαπλασιάζοντας τους ανάγωγους παράγοντες στην υψηλότερη δύναμη που εμφανίζεται σ' αυτούς (ορισμός 7.3.5). Χρησιμοποιώντας αυτό δείξε ότι το $m_f(x)$ διαιρεί το $m'(x)$ και αντίστροφα.

Άσκηση 5.4.8. *Δείξε ότι ένας πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ και ο ανάστροφός του A^t έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό και το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

Υπόδειξη: Από την $(AB)^t = B^t A^t$ για πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ έχουμε την σχέση $(A^t)^n = (A^n)^t$ και απ' αυτήν, για πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ προκύπτει η ισότητα $(p(A))^t = p(A^t)$ κτλ.

Άσκηση 5.4.9. *Δείξε ότι ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ με n το πλήθος και διαφορετικές ανά δύο ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Υπόδειξη: Συνδύασε το θεώρημα 5.4.5 και το θεώρημα 5.4.8.

Άσκηση 5.4.10. *Δείξε ότι ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ με n περιττό, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ιδιοτιμή. Δείξε ότι για n άρτιο και ορίζουσα $|A| < 0$, ο πίνακας A έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.*

Υπόδειξη: Για n περιττό $\lim_{x\to\pm\infty} \chi_A(x) \to \pm\infty$. Για n άρτιο $\lim_{x\to\pm\infty} \chi_A(x) \to +\infty$. Χρησιμοποίησε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής ([5, p.312]).

Άσκηση 5.4.11 (Θεώρημα του Shur)**.** *Δείξε ότι για έναν ενδομορφισμό f του n-διάστατου Ερμιτιανού διανυσματικού χώρου V υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\mathbf{a}$ έτσι ώστε ο πίνακας παράστασης $A = {}_{\mathbf{a}}{}^{-1}f_{\mathbf{a}}$ να είναι άνω τριγωνικός.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ ισχύει τετριμμένα. Υποθέτοντας ότι ισχύει για $n-1$, θεώρησε μια ιδιοτιμή λ και το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του f^*: $f^*(X) = \lambda X$. Ο $(n-1)$-διάστατος υπόχωρος $W = \langle X \rangle^{\perp}$ είναι f-αναλλοίωτος:

$$Y \in W \;\Rightarrow (f(Y)) \cdot X = Y \cdot (f^*(X)) = Y \cdot (\lambda X) = \overline{\lambda} Y \cdot X = 0 \,.$$

Εξ υποθέσεως υπάρχει ορθοκανονική βάση $\mathbf{b} = \{B_1, \ldots, B_{n-1}\}$ του W, έτσι ώστε ο πίνακας παράστασης ${}_{\mathbf{b}}{}^{-1}f_{\mathbf{b}}$ του περιορισμού του f στον W να είναι άνω τριγωνικός. Τότε η $\mathbf{a} = \{X\} \cup \mathbf{b}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{C}^n$ για την οποία ο πίνακας παράστασης του f είναι επίσης άνω τριγωνικός.

5.5 Μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί

> Πολλές φορές λογιάζομουν ευτυχής που είχα κατορθώσει να κλείσω ολόκληρο ποίημα σε τέσσερες στίχους, σ' ένα δίστιχο. Συνηθισμένος να την απλώνω την ιδέα, τέτοια της αποκρυστάλλωση με τραβούσε, με θάμπωνε, σαν εύρημα σπάνιο και διαλεχτό, και μόνο τότε ταιριαστό με της τέχνης το νόημα.
>
> *Κ. Παλαμάς, Τα χρόνια μου και τα χαρτιά μου*

Σ' αυτή την παράγραφο εξετάζουμε και κάνουμε αναγωγή σε απλούστερη μορφή (δηλ. βρίσκουμε έναν απλό πίνακα παράστασης) ενδομορφισμούς $f : V \to V$ που

ονομάζονται **μηδενοδύναμοι**. Αυτοί χαρακτηρίζονται από την απλή μορφή του ελαχίστου πολυωνύμου τους, που είναι $p(x) = x^k$ για $k > 1$. Ο ακέραιος k λέγεται **δείκτης μηδενικότητας** του ενδομορφισμού και είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο συμβαίνει $f^k = O$.

Ανάλογα ορίζεται ο **μηδενοδύναμος πίνακας** και ο **δείκτης μηδενικότητάς** του. Ο πίνακας παράστασης ενός μηδενοδύναμου ενδομορφισμού είναι ένας μηδενοδύναμος πίνακας.

Σημείωση 5.5.1. Ελάχιστο πολυώνυμο της μορφής $p(x) = x$ αντιστοιχεί σε μηδενικούς ενδομορφισμούς/πίνακες, θα λέγαμε με δείκτη μηδενικότητας $k = 1$, που σύμφωνα με τον γενικό ορισμό ικανοποιούν την $p(f) = f = O$.

Κατά το θεώρημα 5.4.8, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του f διαιρείται με το x^k και έχει τη μορφή $\chi_f(x) = (-x)^n$ με $n = dim(V)$. Έτσι, όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0. Το παράδειγμα 5.3.10 είναι χαρακτηριστικό ενός μηδενοδύναμου πίνακα $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ για τον οποίο και το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο έχουν τον μέγιστο δυνατό βαθμό: $\{m_A(x) = x^n\ ,\ \chi_A(x) = (-x)^n\}$ (ο δείκτης μηδενικότητας συμπίπτει με την διάσταση του V). Ένα πιο γενικό παράδειγμα δίδεται από τους παρακάτω τριγωνικούς πίνακες :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ * & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{για παράδειγμα:} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί $\{f : V \to V\}$ ορίζουν με έναν απλό τρόπο ορισμένους f-αναλλοίωτους υποχώρους που έχουνε αξιοσημείωτες ιδιότητες. Πράγματι, για κάθε $O \neq A \in V$ είτε θα είναι $f(A) = 0$ και το A θα περιέχεται στον πυρήνα $A \in Kern(f)$ είτε θα υπάρχει ένας ελάχιστος ακέραιος $s > 1$ έτσι ώστε $f^s(A) = O$ και $f^{s-1}(A) \neq O$. Αν $s > 1$, τότε, τα διανύσματα $\mathbf{a} = \{A, f(A), \dots, f^{s-1}(A)\}$ θα είναι ανεξάρτητα. Αυτό, διότι άν είχαμε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$x_1 A + x_2 f(A) + \cdots + x_s f^{s-1}(A) \ = \ O\ ,$$

τότε, εφαρμόζοντας διαδοχικά σ' αυτόν τους ενδομορφισμούς $\{f^{s-1}, f^{s-2}, \dots\}$ θα παίρναμε $\{x_1 = 0, x_2 = 0, \dots\}$. Προφανώς επίσης υπόχωρος $W_A = \langle \mathbf{a} \rangle$ που παράγεται από το $\mathbf{a}$ είναι f-αναλλοίωτος, το $\mathbf{a}$ είναι βάση του W_A και ο περιορισμός του f σ' αυτόν τον υπόχωρο $f_{\mathbf{a}} = f|_{W_A}$ έχει πίνακα παράστασης

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Ορισμός 5.5.1. Με τους προηγούμενους συμβολισμούς, ο διανυσματικός υπόχωρος W_A του V λέγεται **κυκλικός υπόχωρος** παραγόμενος από το A ή A-κυκλικός υπόχωρος ως προς τον μηδενοδύναμο ενδομορφισμό f.

Σημείωση 5.5.2. Η φιλοσοφία της ανάλυσης του μηδενοδύναμου ενδομορφισμού επικεντρώνεται στον προσδιορισμό διανυσμάτων $\{A_1, \dots, A_t\}$ έτσι ώστε ο διανυσματικός χώρος V να διασπασθεί σε ευθύ άθροισμα κυκλικών υποχώρων:

$$V = W_{A_1} \oplus W_{A_2} \oplus \cdots \oplus W_{A_t} \oplus W_O ,$$

όπου W_O ένας υπόχωρος του $Kern(f)$ ο οποίος μπορεί να είναι ο τετριμμένος $\{O\}$ στην περίπτωση που $t = dim(Kern(f))$, καθώς σε κάθε W_{A_i} το τελευταίο διάνυσμα $f^{s-1}(A_i) \in Kern(f)$. Διαλέγοντας σε κάθε κυκλικό υπόχωρο W_{A_i} μια βάση $\mathbf{a}_i$ όπως προηγουμένως, παίρνουμε έναν πίνακα παράστασης του f στη μορφή του επόμενου πίνακα με μπλοκ $\{J_1, \dots, J_t\}$, που καθένα έχει τη μορφή του πίνακα (5.6) και ένα μηδενικό μπλοκ, αντίστοιχο του W_O, το οποίο συμμετέχει στον πίνακα μόνον όταν $t < dim(Kern(f))$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{J_t} & \\ 0 & & & \boxed{O} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Ορισμός 5.5.2. Ο πίνακας (5.7) λέγεται **Μορφή Jordan** του μηδενοδύναμου ενδομορφισμού f ή του μηδενοδύναμου ενδομορφισμού f_B, στην περίπτωση μηδενοδύναμου πίνακα $B \in M_{\mathbb{F}}(n, n)$. Οι υποπίνακες $\{J_1, \dots, J_t\}$ λέγονται **Μπλοκ του Jordan** του μηδενοδύναμου ενδομορφισμού, αντίστοιχα του μηδενοδύναμου πίνακα.

Θεώρημα 5.5.1. *Δοθέντος του μηδενοδύναμου ενδομορφισμού $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V με δείκτη μηδενικότητας k, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:*

1. $V = Kern(f^k) \supset Kern(f^{k-1}) \supset \cdots \supset Kern(f^2) \supset Kern(f) \supset \{O\}$.
2. *Όλοι οι εγκλεισμοί $Kern(f^s) \supset Kern(f^{s-1})$ είναι γνήσιοι.*
3. $f(Kern(f^s)) \subset Kern(f^{s-1})$.

Απόδειξη. Nr-1 : Προφανώς αν $f^s(X) = O$ τότε και $f^{s+1}(X) = f(f^s(X)) = O$.

Nr-2 : Αν $Kern(f^s) = Kern(f^{s+1})$ για κάποιο $s < k$, τότε για όλα τα $X \in V$ θα είχαμε

$$f^{s+1}((f^{k-s-1}(X))) = f^k(X) = O \;\Rightarrow\; f^{k-s-1}(X) \in Kern(f^{s+1}) = Kern(f^s)$$

για κάθε $X \in V$. Τούτο όμως συνεπάγεται την $f^s(f^{k-s-1}(X)) = f^{k-1}(X) = O$ για κάθε $X \in V$, που αντιφάσκει στον ορισμό του k ως δείκτη μηδενικότητας του f.

Nr-3 : $X \in Kernf^s \Leftrightarrow f^s(X) = O = f^{s-1}(f(X)) \Rightarrow f(X) \in Kern(f^{s-1})$. □

Θεώρημα 5.5.2. *Δοθέντος μηδενοδύναμου ενδομορφισμού $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V με δείκτη μηδενικότητας $k > 1$ και βάσης του $Im(f^{k-1}) \subset V$ αποτελούμενης από τα διανύσματα $\{f^{k-1}(A_1), \dots, f^{k-1}(A_r)\}$ ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:*

1. *Οι κυκλικοί χώροι $\{W_{A_1}, \dots W_{A_r}\}$ είναι k-διάστατοι.*
2. *Τα διανύσματα $\{f^s(A_1), \dots, f^s(A_r)\}$ είναι ανεξάρτητα για $s = 1..(k-1)$.*

3. $W_{A_i} \cap W_{A_j} = \{O\}$ *για* $i \neq j$.
4. $Kern(f^{k-1}) \cap \langle A_1, \dots, A_r \rangle = \{O\}$.
5. $V = Kern(f^{k-1}) \oplus \langle A_1, \dots, A_r \rangle$.

Απόδειξη. Nr-1 : Αποδείχθηκε στις παρατηρήσεις πριν το θεώρημα.

Nr-2 : Υπόθεσε $\{\lambda_1 f^s(A_1) + \dots + \lambda_r f^s(A_r) = O\}$. Τότε, εφαρμόζοντας τον ενδομορφισμό f^{k-s-1} θα παίρναμε

$$\lambda_1 f^{k-1}(A_1) + \dots + \lambda_r f^{k-1}(A_r) = O \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0.$$

Nr-3 : Αν $X \in W_{A_i} \cap W_{A_j}$ τότε, γράφοντας το X με δυο τρόπους θα είχαμε:

$$X = \mu_1 A_i + \mu_2 f(A_i) + \dots \quad = \quad \nu_1 A_j + \nu_2 f(A_j) + \dots \ ,$$

και εφαρμόζοντας στην ισότητα διαδοχικά τους ενδομορφισμούς $\{f^{k-1}, f^{k-2}, \dots\}$ θα παίρναμε, χρησιμοποιώντας το *nr-2*: $\{\mu_1 = \nu_1 = 0, \mu_2 = \nu_2 = 0, \dots\}$.

Nr-4 : Πράγματι, $X \in Kern(f^{k-1}) \cap \langle A_1, \dots, A_r \rangle \Rightarrow X = x_1 A_1 + \dots + x_r A_r$ και εφαρμόζοντας τον f^{k-1} συνεπάγεται

$$O = f^{k-1}(X) = x_1 f^{k-1}(A_1) + \dots + x_r f^{k-1}(A_r) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dots = x_r = 0 \ ,$$

αφού τα $\{f^{k-1}(A_i), i = 1..r\}$ είναι ανεξάρτητα.

Nr-5 : Η ανεξαρτησία των $\{f^{k-1}(A_i) \ , \ i = 1..r\}$ συνεπάγεται την ανεξαρτησία των $\{A_i, i = 1..r\}$ και η σχέση έπεται από την βασική ισότητα διαστάσεων 2.12. □

Άσκηση 5.5.1. *Με τους συμβολισμούς του προηγουμένου θεωρήματος δείξε ότι για* $s = 1..k$ *ισχύει:* $Kern(f^{k-s}) \cap \langle f^{s-1}(A_1), \dots, f^{s-1}(A_r) \rangle = \{O\}$.

Άσκηση 5.5.2. *Ο επόμενος πραγματικός πίνακας* A *είναι μηδενοδύναμος με δείκτη μηδενικότητας 3.*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ , \ A^2 = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \ , \ A^3 = O \ .$$

Με τους συμβολισμούς του θεωρήματος 5.5.2 και την κανονική βάση $\{E_i, i = 1..6\}$ *του* $\mathbb{R}^6$ *ισχύει:*

1. $Kern(A) = \{E_3, E_5, E_6\}$, $Kern(A^2) = Kern(A) \cup \{E_2, E_4\}$.
2. $Im(A) = \{E_2, E_3, E_5\}$, $Im(A^2) = \{E3\}$.
3. $r = 1$, $A_1 = E_1$, $AE_1 = E_2$, $A^2E_1 = E_3$, $W_1 = \{E_1, E_2, E_3\}$.
4. $\mathbb{R}^6 = Kern(A^2) \cup \{A_1\}$.

Διαπίστωσε ότι ισχύει και το συμπέρασμα της άσκησης 5.5.1.

Θεώρημα 5.5.3. *Δοθέντος μηδενοδύναμου ενδομορφισμού* $f : V \to V$ *του* n*-διάστατου* $\mathbb{F}$*-διανυσματικού χώρου* V *δείκτη μηδενικότητας* k *, υπάρχουν υπόχωροι* $\{U_i, i = 1..k\}$ *τέτοιοι ώστε:*

1. $Kern(f^s) = U_s \oplus Kern(f^{s-1})$, $s = 1..k$, *με τις ιδιότητες:*
2. *Ο* f *απεικονίζει το* U_i *με τρόπο 1-1 στο* U_{i-1} .
3. $V = U_k \oplus \cdots \oplus U_1$.

Απόδειξη. Σημείωσε ότι για $s = 1$ η ισότητα $Kern(f) = (U_1 \oplus Kern(f^0)) = U_1$ καθώς $f^0 = I_V$ θεωρείται ότι είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός του V του οποίου ο πυρήνας είναι ο τετριμμένος υπόχωρος $\{O\}$. Έτσι, το *nr-3* προκύπτει από τους δύο άλλους ισχυρισμούς.

Σημείωσε επίσης ότι η ύπαρξη κάποιων συμπληρωματικών υποχώρων $\{U_i\}$, που να ικανοποιούν την *nr-1* και μόνο, εξασφαλίζεται από το *nr-1* του θεωρήματος 5.5.1. Το ίδιο θεώρημα εξασφαλίζει ότι η απεικόνιση

$$Kern(f^s) = U_s \oplus Kern(f^{s-1}) \xrightarrow{f} U_{s-1} \oplus Kern(f^{s-2}) = Kern(f^{s-1}) ,$$

που στέλνει επίσης το $Kern(f^{s-1})$ μέσα στο $Kern(f^{s-2})$ απεικονίζει ένα διάνυσμα $U_s \ni X \neq O$ σε ένα $Y = f(X) \neq O$ επίσης. Πράγματι, ένα τέτοιο X ικανοποιεί τις $f^s(X) = O$, και $f^{s-1}(X) \neq O$. Αν είχαμε και $f(X) = O$ τότε θα ίσχυε και $f^{s-1}(X) = f^{s-2}(f(X)) = O$, πράγμα που αντιβαίνει στην υπόθεση. Αυτό έχει σαν συνέπεια ο περιορισμός του f στο U_s να είναι 1-1. Ισχύει επίσης η σχέση $f(U_s) \cap Kern(f^{s-2}) = \{O\}$ για τον ίδιο λόγο, καθώς η $Y = f(X) \in Kern(f^{s-2})$ συνεπάγεται την $f^{s-1}(X) = 0$ που είναι αδύνατον αν το $O \neq X \in U_s$.

Το παρόν θεώρημα κατασκευάζει τα $\{U_i\}$ με ειδικό τρόπο, ώστε $f(U_i) \subset U_{i-1}$ και τότε, όπως αναλύσαμε προηγουμένως, ο περιορισμός του $f : U_i \to U_{i-1}$ να είναι 1-1. Οι χώροι $\{U_k, \dots, U_1\}$ κατασκευάζονται διαδοχικά με αυτή τη σειρά.

Ο πρώτος υπόχωρος U_k είναι ο παραγόμενος $U_k = \langle \mathbf{a}_{r_1} \rangle = \{A_1, \dots, A_{r_1}\}$, όπου, κατά το θεώρημα 5.5.2, τα διανύσματα $f^{k-1}(\mathbf{a}_{\mathbf{r_1}}) = \{f^{k-1}(A_1), \dots, f^{k-1}(A_{r_1})\}$ που αποτελούν βάση του $Im(f^{k-1}(V))$ ικανοποιούν

$$V = Kern(f^k) = U_k \oplus Kern(f^{k-1}).$$

Για την κατασκευή του δεύτερου υποχώρου U_{k-1} θεωρούμε τα διανύσματα

$$f(\mathbf{a}_{r_1}) = \{f(A_1), \dots, f(A_{r_1})\},$$

τα οποία κατά το θεώρημα 5.5.2, είναι ανεξάρτητα διανύσματα του $Kern(f^{k-1})$, και ο παραγόμενος χώρος τους $f(U_k)$, όπως αναλύσαμε προηγουμένως, ικανοποιεί την $Kern(f^{k-2}) \cap f(U_k) = \{O\}$.

Έτσι, μπορούμε να συμπληρώσουμε το $f(\mathbf{a}_{r_1})$ με διανύσματα

$$\mathbf{a}_{r_2} = \{A_{r_1+1}, \dots, A_{r_2}\},$$

σε μία βάση ενός συμπληρώματος U_{k-1} του $Kern(f^{k-2})$ εντός του $Kern(f^{k-1})$, έτσι ώστε

$$Kern(f^{k-1}) = U_{k-1} \oplus Kern(f^{k-2}),$$

$$\text{με } U_{k-1} = \langle f(A_1), \dots, f(A_{r_1}), A_{r_1+1}, \dots, A_{r_2} \rangle = \langle f(\mathbf{a}_{r_1}) \cup \mathbf{a}_{r_2} \rangle.$$

Η κατασκευή του τρίτου χώρου U_{k-2} είναι παρόμοια με αυτήν του U_{k-1} . Και πάλι, όπως αναλύσαμε παραπάνω, τα διανύσματα $f(f(\mathbf{a}_{r_1}) \cup \mathbf{a}_{r_2})$ είναι ανεξάρτητα, και η εικόνα του παραγόμενου υποχώρου $f(U_{k-1}) \cap Kern(f^{k-3}) = \{O\}$.

Έτσι, η εικόνα του παραγόμενου χώρου $f(U_{k-1}) = f^2(\mathbf{a}_{r_1}) \cup f(\mathbf{a}_{r_2})$ μπορεί πάλι να συμπληρωθεί με διανύσματα $\mathbf{a}_{r_3} = \{A_{r_2+1}, \dots, A_{r_3}\}$ σε ένα συμπλήρωμα U_{k-2} του $Kern(f^{k-3})$ εντός του $Kern(f^{k-2})$ έτσι ώστε

$$Kern(f^{k-2}) = U_{k-2} \oplus Kern(f^{k-3})$$

με τον υπόχωρο $U_{k-2} = f(U_{k-1}) \cup \mathbf{a}_{r_3} = f^2(\mathbf{a}_{r_1}) \cup f(\mathbf{a}_{r_2}) \cup \mathbf{a}_{r_3}$.

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο ορίζουμε τους υποχώρους

$$U_i = f^{k-i}(\mathbf{a}_{r_1}) \cup \dots \cup f(\mathbf{a}_{r_{k-i}}) \cup \mathbf{a}_{r_{k-i+1}}$$

που ικανοποιούν την $Kern(f^i) = U_i \oplus Kern(f^{i-1})$ για $\{i = (k-3)..1\}$ με

$$U_2 = f^{k-2}(\mathbf{a}_{r_1}) \cup \dots \cup f(\mathbf{a}_{r_{k-2}}) \cup \mathbf{a}_{r_{k-1}} \quad \text{και}$$

$$U_1 = Kern(f) = f^{k-1}(\mathbf{a}_{r_1}) \cup \dots \cup f(\mathbf{a}_{r_{k-1}}) \cup \mathbf{a}_{r_k}. \qquad \square$$

Θεώρημα 5.5.4. *Δοθέντος μηδενοδύναμου ενδομορφισμού $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V με δείκτη μηδενικότητας k, υπάρχουν κυκλικοί υπόχωροι $\{W_{A_1}, \dots, W_{A_s}\}$ έτσι ώστε ο V να διασπάται σε ευθύ άθροισμα*

$$V = W_{A_1} \oplus \dots \oplus W_{A_s} \oplus W_O ,$$

που, όπως αναλύσαμε στη σημείωση 5.5.2, ο W_0 είναι υπόχωρος του $Kern(f)$ ο οποίος είναι διαφορετικός του τετριμμένου $\{O\}$ όταν $s < dim(Kern(f))$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από τον τρόπο κατασκευής των υποχώρων $\{U_i\}$ για $i = k..1$ στο θεώρημα 5.5.3. Τα διανύσματα $\mathbf{a}_{r_1} = \{A_1, \dots, A_{r_1}\}$ μαζί με τις εικόνες τους μέσω των ενδομορφισμών $\{f(\mathbf{a}_{r_1}), f^2(\mathbf{a}_{r_1}), \dots, f^{k-1}(\mathbf{a}_{r_1})\}$ ορίζουν τους r_1 το πλήθος κυκλικούς υποχώρους $\{W_{A_1}, \dots, W_{A_{r_1}}\}$ μεγίστης διάστασης k.

Κατόπιν τα διανύσματα $\mathbf{a}_{r_2} = \{A_{r_1+1}, \dots, A_{r_2}\}$ μαζί με τις εικόνες τους μέσω των ενδομορφισμών $\{f(\mathbf{a}_{r_2}), f^2(\mathbf{a}_{r_2}), \dots, f^{k-2}(\mathbf{a}_{r_2})\}$ ορίζουν τους $r_2 - r_1$ κυκλικούς υποχώρους $\{W_{A_{r_1+1}}, \dots, W_{A_{r_2}}\}$ διάστασης $k-1$, κ.ο.κ. $\square$

Πόρισμα 5.5.1. *Κάθε μηδενοδύναμος ενδομορφισμός $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V έχει ένα πίνακα παράστασης σε μορφή Jordan* (5.7).

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει διαλέγοντας τις βάσεις $\{A_i, f(A_i), f^2(A_i), \dots\}$ σε κάθε κυκλικό υπόχωρο W_{A_i} που συμμετέχει στην διάσπαση του V σε κυκλικούς υποχώρους στο θεώρημα 5.5.4. $\square$

Άσκηση 5.5.3. *Δείξε ότι για έναν μηδενοδύναμο $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ δείκτη μηδενικότητας $k > 1$ ο πίνακας $I - A$ είναι αντιστρέψιμος.*

Υπόδειξη: $(I - A)(1 + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) = I$.

Άσκηση 5.5.4. *Δείξε ότι για δύο μετατιθέμενους μηδενοδύναμους ενδομορφισμούς $\{f, g\}$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V το άθροισμά τους $f + g$ είναι επίσης μηδενοδύναμος ενδομορφισμός.*

Υπόδειξη: Εφάρμοσε τον δυωνυμικό τύπο της άσκησης 5.3.7.

Άσκηση 5.5.5. *Δείξε ότι το τετράγωνο A^2 του πίνακα (5.6) που παριστάνει τον ενδομορφισμό $f_A^2 : \mathbb{F}^k \to \mathbb{F}^k$ είναι*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & 0 & & O & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Γενίκευσε την άσκηση περιγράφοντας τον πίνακα A^s για $1 < s < k$. Δείξε ότι ο $Kern(f_A)^s$ έχει διάσταση s.

Υπόδειξη: Ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{F}}(k,k)$ της εξίσωσης (5.6) παριστάνει ένα μηδενοδύναμο ενδομορφισμό $f = f_A$ δείκτη μηδενικότητας k σε μια βάση που παράγεται από ένα διάνυσμα B με $f^{k-1}(B) \neq O$. Η βάση αυτή είναι $\{B, f(B), \dots, f^{k-1}(B)\}$. Ο πυρήνας $Kern(f^s)$ έχει βάση αποτελούμενη από τα $\{f^{k-1}(B), \dots, f^{k-s}(B)\}$.

Άσκηση 5.5.6. *Δείξε ότι ο μηδενοδύναμος πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

έχει δείκτη μηδενικότητας 4 και η διάσπαση κατά το θεώρημα 5.5.3 είναι

$$< U > \oplus < AU > \oplus < A^2U > \oplus Kern(A)$$

με $U = (1,0,0,0,0)^t$ *και* $Kern(A) =< (0,0,p,-p,q), p,q \in \mathbb{R} >$.

Άσκηση 5.5.7. *Θεώρησε τον μηδενοδύναμο ενδομορφισμό $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V δείκτη μηδενικότητας k, του οποίου η μορφή Jordan (5.7) συμπεριλαμβάνει d_1 : 1×1 μπλοκ, d_2 : 2×2 block, ..., d_k : $k \times k$ μπλοκ. Δείξε ότι*

$$\begin{aligned}
d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_k &= dim(Kern(f)) &&= n_1, \\
d_1 + 2d_2 + 2d_3 + \cdots + 2d_k &= dim(Kern(f^2)) &&= n_2, \\
d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 3d_4 + \cdots + 3d_k &= dim(Kern(f^3)) &&= n_3, \\
\dots &= \dots &&= \dots \\
d_1 + \cdots + (s-1)d_{s-1} + s(d_s + \cdots + d_k) &= dim(Kern(f^s)) &&= n_s, \\
\dots &= \dots &&= \dots \\
d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots + (k-1)d_{k-1} + kd_k &= dim(Kern(f^k)) &&= n_k = n.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5.5.8. *Συνεχίζοντας την άσκηση 5.5.7, λύσε το σύστημα των εξισώσεων ως προς τα $\{d_1, \dots, d_k\}$ και δείξε ότι*

$$\begin{aligned}
d_1 &= 2n_1 - n_2, \\
d_2 &= 2n_2 - n_1 - n_3, \\
\dots &= \dots \\
d_{k-1} &= 2n_{k-1} - n_{k-2} - n_k, \\
d_k &= n_k - n_{k-1}.
\end{aligned}$$

Συμπέρανε ότι δύο μηδενοδύναμοι πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{F}}(n,n)\}$ *δείκτη μηδενικότητας* k *που ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$\begin{aligned} dim(Kern(f_A)) &= dim(Kern(f_B)) = n_1, \\ dim(Kern(f_A^2)) &= dim(Kern(f_B^2)) = n_2, \\ \dots &= \dots \\ dim(Kern(f_A^k)) &= dim(Kern(f_B^k)) = n_k = n, \end{aligned}$$

είναι όμοιοι.

Άσκηση 5.5.9. *Δείξε ότι ο προσδιορισμός της μορφής Jordan ενός μηδενοδύναμου πίνακα* $A \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ *δείκτη μηδενικότητας* k, *μπορεί να γίνει λύνοντας* $k-1$ *ομογενή συστήματα* $\{AX = O, A^2X = O, \dots, A^{k-1}X = O\}$.

Άσκηση 5.5.10. *Έχοντας υπόψη το θεώρημα 5.5.2, δείξε ότι ο υπόχωρος που ορίζεται εκεί:* $U = W_{A_1} \oplus \cdots \oplus W_{A_r}$ *είναι* f*-αναλλοίωτος και ο εισαγόμενος ενδομορφισμός* $\tilde{f} : V/U \to V/U$ *είναι μηδενοδύναμος με δείκτη μηδενικότητας* $m \le k-1$.

Υπόδειξη: Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής, καθώς όλοι οι κυκλικοί υπόχωροι $\{W_{A_i}, i = 1..r\}$ είναι f-αναλλοίωτοι. Επίσης από το θεώρημα 5.5.2 κάθε $X \in V$ είναι άθροισμα $X = Y + Z$ με $Y \in Kern(f^{k-1})$ και $Z \in \langle A_1, \dots, A_r \rangle \subset U$. Έτσι, η προβολή $[X]_U = [Y]_U \in V/U$ και $\tilde{f}^{k-1}([X]_U) = \tilde{f}^{k-1}([Y]_U) = [f^{k-1}Y] = O$. Συνεπώς ο $\tilde{f}$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη μηδενικότητας $m \le k-1$.

Άσκηση 5.5.11. *Συνεχίζοντας την άσκηση 5.5.10, θεώρησε μια βάση*

$$\{\, \tilde{f}^{m-1}([B_1]_U), \dots, \tilde{f}^{m-1}([B_s]_U) \,\}$$

του υποχώρου $Im(\tilde{f}^{m-1}) \subset V/U$. *Κατά το θεώρημα 5.5.2*

$$V/U = Kern(\tilde{f}^{m-1}) \oplus \langle [B_1]_U, \dots, [B_s]_U \rangle.$$

Δείξε τις επόμενες ιδιότητες:

1. $\langle B_i, f(B_i), \dots, f^{m-1}(B_i) \rangle \cap U = \{O\}$ *για* $i = 1..s$.
2. *Για κάθε* $i = 1..s$ *υπάρχει ένα* $U_i \in U$ *έτσι ώστε* $C_i = B_i - U_i$ *να ορίζει κυκλικό υπόχωρο του* V *διάστασης* m.
3. *Ο* $W_{C_1} \oplus \cdots \oplus W_{C_s} \oplus U$ *είναι ευθύ άθροισμα υποχώρων του* V.

Υπόδειξη: Nr-1 : Υπόθεσε ότι ένας συνδυασμός $x_1 B_i + \cdots + x_m f^{m-1}(B_i) \in U$. Περνώντας στο πηλίκον, αυτό σημαίνει ότι $x_1[B_i]_U + \cdots + x_m \tilde{f}^{m-1}([B_i]_U) = O$. Όμως κατά το θεώρημα 5.5.2, τα $\{\tilde{f}^j([B_i]_U) \in V/U\}$ είναι ανεξάρτητα, άρα τα $\{x_i = 0\}$.

Nr-2 : Ισχύει $\tilde{f}^m([B_i]_U) = O \Rightarrow f^m(B_i) \in U$. Αυτό όμως συνεπάγεται και την ύπαρξη ενός $U_i \in U$ έτσι ώστε $f^m(B_i) = f^m(U_i)$. Αυτό αποδεικνύεται γράφοντας το $f^m(B_i)$ σαν γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων μιας βάσης του U :

$$f^m(B_i) \;=\; \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=0}^{k-1} \lambda_{pq} f^q(A_p) \;\; \text{και εφάρμοσε τον } f^{k-m+t} \;\; \text{για } t = 1, 2, \dots \quad \Rightarrow$$

$$O = f^{k+t}(B_i) \;=\; \sum_{p=1}^{r} \sum_{q=0}^{k-1} \lambda_{pq} f^{k-m+t+q}(A_p).$$

Για τα $j = k - m + t + q > k - 1 \Rightarrow t + q > m - 1$ έχουμε $f^j(A_p) = O$ και για τα $t + q < m$, που συνεπάγεται $j = k - m + t + q < k$, όλα τα αντίστοιχα διανύσματα $\{f^j(A_p)\}$ είναι ανεξάρτητα, άρα οι συντελεστές λ_{pq} με $q < m - t$ μηδενίζονται. Αυτό, για μεταβλητά $t = 1, 2, \dots$ δείχνει ότι όλα τα λ_{pq} με $q < m$ μηδενίζονται, πράγμα που αποδεικνύει την ύπαρξη ενός $U_i \in U$, έτσι ώστε $f^m(B_i) = f^m(U_i)$.

Το διάνυσμα $C_i = B_i - U_i$ έχει $[C_i]_U = [B_i]_U$ και $\{C_i, f(C_i), \dots, f^{m-1}(C_i)\}$ είναι ανεξάρτητα καθώς η προβολή τους στον χώρο πηλίκον

$$\{\ [C_i]_U = [B_i]_U, \dots, \tilde{f}^{m-1}([C_i]_U) = \tilde{f}^{m-1}([B_i]_U)\ \}$$

είναι ανεξάρτητα διανύσματα. Επίσης $f^m(C_i) = f^m(B_i - U_i) = O$, άρα τα διανύσματα $\{C_i, f(C_i), \dots, f^{m-1}(C_i)\}$ παράγουν κυκλικό υπόχωρο του V διάστασης m.

Nr-3: Από το *nr-1*, και επειδή $C_i = B_i - U_i$ με $U_i \in U$, όπως αυτό ορίστηκε στο *nr-2*, έχουμε $W_{C_i} \cap U = \{O\}$. Όμως και $W_{C_i} \cap W_{C_j} = \{O\}$. Αυτό αποδεικνύεται όπως στο *nr-3* του θεωρήματος 5.5.2.

Σημείωση 5.5.3. Για όσους δεν έχουν κουρασθεί, και έχουν ακόμη δυνάμεις για μια δεύτερη ματιά στο θεώρημα 5.5.4, η άσκηση 5.5.11 υποβάλλει την ιδέα μιας άλλης απόδειξής του:

Υπόθεσε ότι το θεώρημα ισχύει για διαστάσεις $dim(V) < n$. Για $dim(V) = 1$ ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς τη διάσταση $dim(V)$ δείχνουμε ότι ισχύει και για $dim(V) = n$. Με το συμβολισμό και τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.5.2 θεώρησε τον f-αναλλοίωτο υπόχωρο

$$U = W_{A_1} \oplus \cdots \oplus W_{A_r} \subset V$$

και τον εισαγόμενο ενδομορφισμό $\tilde{f} : V/U \to V/U$.

Ο $\tilde{f}$ είναι μηδενοδύναμος ενδομορφισμός με δείκτη μηδενικότητας $m \le k - 1$ στον διανυσματικό χώρο V/U διάστασης μικρότερης του n. Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε μια διάσπασή του σε κυκλικούς υποχώρους του $\tilde{f}$:

$$V/U \ = \ W_{[B_1]_U} \oplus \cdots \oplus W_{[B_p]_U}\ , \tag{5.9}$$

με $dim(W_{[B_i]_U}) = n_i$ για $i = 1..p$. Θεώρησε τον υπόχωρο

$$W_i = \langle B_i, f(B_i), \dots, f^{n_i - 1}(B_i)\rangle \subset V.$$

Από την (5.9) προκύπτει εύκολα ότι τα διανύσματα $\{f^i(B_j)\}$ είναι ανεξάρτητα και

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_p \oplus U\ , \tag{5.10}$$

και θα είχαμε τελειώσει με την απόδειξη αν ξέραμε ότι οι υπόχωροι W_i είναι κυκλικοί. Αλλά ξέρουμε μόνο ότι $f^{n_i}(B_i) \in U$. Χρησιμοποιώντας ωστόσο την ίδια μέθοδο με αυτήν του *nr-2* της άσκησης 5.5.11 βρίσκουμε ένα $U_i \in U$ έτσι ώστε $f^{n_1}(B_i) = f^{n_1}(U_i)$. Έτσι **διορθώνουμε** το B_i αντικαθιστώντας το με το διάνυσμα $C_i = B_i - U_i$. Τότε οι υπόχωροι $W'_i = \langle C_i, f(C_i), \dots, f^{n_i - 1}(C_i)\rangle$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι κυκλικοί και

$$V = W'_1 \oplus \cdots \oplus W'_p \oplus U$$

ορίζουν μια διάσπαση του V σε κυκλικούς υποχώρους.

5.6 Κανονική μορφή του Jordan

Η κατεύθυνση της σκέψης είναι πιο σημαντική από την πρόοδό της.

J. Joubert, Pensées

Η δουλειά έχει γίνει στην προηγούμενη παράγραφο. Εδώ υποθέτουμε ότι το σώμα $\mathbb{F}$ είναι **αλγεβρικά κλειστό**, συνεπώς τα ανάγωγα πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ είναι γραμμικά $p(x) = (x - \lambda)$. Έτσι, το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\{m_f(x), \chi_f(x)\}$ του ενδομορφισμού $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου έχουν τη μορφή:

$$m_f(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_k)^{m_k} \quad \text{και} \quad \chi_f(x) = (x - \lambda_1)^{p_1} \dots (x - \lambda_k)^{p_k},$$

όπου $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ είναι οι διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές του f και

$$m_1 \le p_1, \dots, m_k \le p_k \quad \text{και} \quad p_1 + \dots + p_k = n.$$

Κατά το θεώρημα 5.4.4 ο διανυσματικός χώρος V διασπάται σε ευθύ άθροισμα f-αναλλοίωτων υποχώρων $\{V_i\}$ σε καθένα από τους οποίους ο περιορισμός του $f - \lambda_i I$ είναι μηδενοδύναμος με δείκτη μηδενικότητας m_i.

$$V_i = \{X \in V : (f - \lambda_i I)^{m_i} X = O\} \ , \quad V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k \ . \tag{5.11}$$

Ο περιορισμός $f_i = f|_{V_i}$ σ' αυτόν τον υπόχωρο έχει ελάχιστο πολυώνυμο: $(x - \lambda_i)^{m_i}$ και χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $(x - \lambda_i)^{p_i}$, όπου p_i είναι η διάσταση του V_i.

Βλέπουμε λοιπόν ότι ο ενδομορφισμός $g_i = f_i - \lambda_i I_i$ είναι μηδενοδύναμος ή μηδενικός αν $m_i = 1$, με I_i να συμβολίζει τον ταυτοτικό μετασχηματισμό του V_i. Έτσι θα υπάρχει βάση του V_i ως προς την οποία ο g_i έχει πίνακα παράστασης αποτελούμενο από μπλοκ του Jordan (ορισμός 5.5.2):

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{J_s} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f_i = g_i + \lambda_i I_i = \begin{pmatrix} \boxed{H_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{H_s} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

$$\begin{array}{c} \text{με } H_j \\ \text{μορφής:} \\ \text{για } j = 1..s \\ \text{αν } m_i > 1 \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_i & & & & \\ 1 & \lambda_i & & 0 & \\ & 1 & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{ή διαγώνιας} \\ \text{ή μορφής:} \\ \text{αν } m_i = 1 \end{array} \begin{pmatrix} \lambda_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}. \tag{5.13}$$

Διαλέγοντας σε κάθε V_i μια τέτοια βάση, παίρνουμε μια βάση $\mathbf{a}$ του V ως προς την οποία f έχει τη μορφή:

$$\mathbf{a}^{-1} f_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \boxed{H_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{H_t} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{με } H_j \text{ μορφής όπως} \\ \text{αυτή που περιγράφεται .} \\ \text{παραπάνω στην (5.12).} \end{array} \tag{5.14}$$

Αποδείξαμε το θεώρημα **κανονικής παράστασης του Jordan**:

Θεώρημα 5.6.1. *Για κάθε ενδομορφισμό $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου, υπεράνω του κλειστού σώματος $\mathbb{F}$, υπάρχει μια βάση $\mathbf{a}$ του V ως προς την οποία ο πίνακας παράστασης ${}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ του f έχει τη μορφή.* (5.14).

Παράδειγμα 5.6.1. Ας προσδιορίσουμε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, του οποίου το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $(x-2)^2(x-3)$. Από το θεώρημα 5.4.4 ξέρουμε ότι ο διανυσματικός χώρος $V = \mathbb{R}^3$ διασπάται σε ευθύ άθροισμα με $V = V_1 \oplus V_2$ όπου:

$$V_1 = \{X \ : \ (A-2I_3)^2X = O\} \quad \text{και} \quad V_2 = \{X \ : \ (A-3I_3)X = O\} \quad \Rightarrow$$

$$(A-3I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ (A-2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ (A-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = Kern((A-2I_3)^2) = \langle B_1, B_2 \rangle \quad \text{με} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (A-2I_3)B_1,$$

$$V_2 = Kern((A-3I_3)) = \langle B_3 \rangle \quad \text{και} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Στη βάση } \mathbf{b} = \{B_1, B_2, B_3\}$$

$$\text{ο πίνακας παράστασης του } A \text{ is} \quad A\mathbf{b} = \mathbf{b}C \ , \ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.7 Μορφή Jordan πραγματικών πινάκων

> Τίποτα δεν υπάρχει που να πρέπει να αποτελεί σύσταση για τη νεότητα όσο η δραστηριότητα και η εγρήγορση. Η ζωή μας δεν είναι άλλο από κίνηση.
>
> *M. de Montaigne, Για την εμπειρία*

Ταυτίζουμε εδώ τον πραγματικό πίνακα $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ με τον $\mathbb{C}$-ενδομορφισμό $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, με $f_A(X) = AX$. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι αλγεβρικά κλειστό, άρα κατά το θεώρημα 5.6.1 υπάρχει μια βάση $\mathbf{a}$ του $\mathbb{C}$ ως προς την οποία ο πίνακας παράστασης ${}_{\mathbf{a}^{-1}}f_{\mathbf{a}}$ του f_A έχει την κανονική μορφή του Jordan (5.14).

Το κλειδί σ' αυτή την παράγραφο είναι το θεώρημα 4.2.1 που εξασφαλίζει, ότι εκτός από τις πραγματικές ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα πραγματικά ιδιοδιανύσματα του A, εάν υπάρχουν μιγαδικές ιδιοτιμές $c = a + ib$: $AX = cX$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα X, τότε αυτά εμφανίζονται κατά ζεύγη μαζί με τα μιγαδικά συζυγή τους $\overline{c} = a - ib$: $A\overline{X} = \overline{c}\overline{X}$ και το αντίστοιχο μιγαδικό συζυγές διάνυσμα $\overline{X}$.

Σύμφωνα με τη θεωρία μας η αναγωγή του πίνακα f_A σε κανονική μορφή Jordan γίνεται διασπώντας τον $\mathbb{C}^n$ σε κυκλικούς f_A-αναλλοίωτους υποχώρους

$$V_\lambda \ = \ \{X \in V : \ (A-\lambda)^k X = O\} \quad \text{και} \quad V_{\overline{\lambda}} \ = \ \{X \in V : \ (A-\overline{\lambda})^k X = O\}$$

για κάποιο k και όταν $\lambda \neq \overline{\lambda}$. Σημειώνουμε ότι αν $V_\lambda = W_{B_1} \oplus \cdots \oplus W_{B_s}$ είναι η διάσπαση του V_λ σε κυκλικούς υποχώρους, τότε ο $W_{\overline{B}_1} \oplus \cdots \oplus W_{\overline{B}_s}$ είναι ένας υπόχωρος του $V_{\overline{\lambda}}$ και για λόγους διάστασης ταυτίζεται με αυτόν. Έτσι στην περίπτωση μιας **μιγαδικής** ιδιοτιμής λ έχουμε τη διάσπαση σε κυκλικούς υποχώρους

$$V_\lambda \oplus V_{\overline{\lambda}} \;=\; W_{B_1} \oplus W_{\overline{B}_1} \oplus \cdots \oplus W_{B_s} \oplus W_{\overline{B}_s} \;.$$

Σε κάθε υπόχωρο $W_B \oplus W_{\overline{B}}$ αντί της βάσης

$$\begin{aligned} &C_1 = B\ ,\ C_2 = (A-\lambda I)B, \dots, C_k = (A-\lambda I)^{k-1}B \quad \text{με} \quad k = dim(W_B)\ ,\\ &\overline{C}_1 = \overline{B}\ ,\ \overline{C}_2 = (A-\overline{\lambda} I)\overline{B}, \dots, \overline{C}_k = (A-\overline{\lambda} I)^{k-1}\overline{B} \end{aligned}$$

διαλέγουμε την βάση που αποτελείται από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αυτών των διανυσμάτων:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2}(C_1 + \overline{C}_1), \dots, P_k = \frac{1}{2}(C_k + \overline{C}_k),\\ Q_1 &= \frac{1}{2i}(C_1 - \overline{C}_1), \dots, Q_k = \frac{1}{2i}(C_k - \overline{C}_k). \end{aligned}$$

Γνωρίζοντας ότι η παράσταση του f_A ως προς τη βάση των $\{C_i, \overline{C}_i, i = 1..k\}$ είναι με πίνακες της μορφής

$$B \;=\; \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ 1 & \lambda & & 0 & \\ & 1 & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \overline{B} \;=\; \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & & & & \\ 1 & \overline{\lambda} & & 0 & \\ & 1 & \ddots & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}, \tag{5.15}$$

προσδιορίζουμε τον πίνακα παράστασης του f_A ως προς τη νέα βάση $\{P_i, Q_i\}$. Πράγματι, η προηγούμενη μορφή των πινάκων συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} AC_i &= \lambda C_i + C_{i+1} \quad \text{για} \quad i < k \quad \text{και} \quad AC_k = \lambda C_k\ ,\\ A\overline{C}_i &= \overline{\lambda C}_i + \overline{C}_{i+1} \quad \text{για} \quad i < k \quad \text{και} \quad A\overline{C}_k = \overline{\lambda C}_k\ . \end{aligned}$$

Έτσι, γράφοντας $\lambda = \mu + i\nu$, έχουμε την παράσταση ως προς $\{P_i, Q_i, i = 1..k\}$:

$$\begin{aligned} AP_j &= A\frac{1}{2}(C_j + \overline{C}_j) = \frac{1}{2}(\lambda C_j + \overline{\lambda C}_j) + \frac{1}{2}(C_{j+1} + \overline{C}_{j+1})\\ &= \frac{1}{2}((\mu + i\nu)(P_j + iQ_j) + (\mu - i\nu)(P_j - iQ_j)) + P_{j+1}\\ &= \mu P_j - \nu Q_j + P_{j+1}\ ,\\ AQ_j &= A\frac{1}{2i}(C_j - \overline{C}_j) = \frac{1}{2i}(\lambda C_j - \overline{\lambda C}_j) + \frac{1}{2i}(C_{j+1} - \overline{C}_{j+1})\\ &= \frac{1}{2i}((\mu + i\nu)(P_j + iQ_j) - (\mu - i\nu)(P_j - iQ_j)) + Q_{j+1}\\ &= \nu P_j + \mu Q_j + Q_{j+1}, \quad \text{για} \quad j < k. \quad \text{Ανάλογα}\\ AP_k &= \mu P_k - \nu Q_k \quad \text{and} \quad AQ_k = \nu P_k + \mu Q_k\ . \end{aligned}$$

Έτσι, ως προς αυτή την βάση ο πίνακας παράστασης του περιορισμού $f_A|_{W_B \oplus W_{\overline{B}}}$ είναι

$$M_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{matrix}} & & & & \\ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{matrix}} & & & \\ & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{matrix}} \end{pmatrix}. \tag{5.16}$$

Καθώς οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού πίνακα εμφανίζονται είτε ως ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών είτε ως μεμονωμένοι πραγματικοί αριθμοί, βλέπουμε ότι διαλέγοντας τα διανύσματα μιας βάσης όπως προηγουμένως, ο αντίστοιχος πίνακας παράστασης είναι ένας πίνακας με μπλοκ:

Θεώρημα 5.7.1. *Κάθε πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ είναι όμοιος ενός πίνακα με μπλοκ*

$$\begin{pmatrix} \boxed{H_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{H_t} \end{pmatrix}$$

όπου τα μπλοκ που αντιστοιχούν σε ζεύγη μιγαδικών κυκλικών χώρων $W_{B_i} \oplus W_{\overline{B}_i}$ ως προς ιδιοτιμές: $\mu \pm i\nu$ είναι της μορφής (5.16),

και τα μπλοκ που αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιοτιμές λ είναι της μορφής B στην εξίσωση (5.15) ή πολλαπλάσια λI_k ταυτοτικών πινάκων.

Σημείωσε ότι τα μονοδιάστατα μπλοκ που αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιοτιμές είναι της μορφής corresponding $[\lambda]$ (μονοδιάστατοι πραγματικοί πίνακες), ενώ τα ελάχιστης διάστασης μπλοκ της μορφής (5.16) είναι πίνακες $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$. Ένα

παράδειγμα πραγματικής μορφή Jordan είναι το:

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{matrix}} & & & & & & & \\ & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{matrix}} & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{matrix}} & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{matrix}} & & & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix} 5 & & \\ 1 & 5 & \\ & 1 & 5 \end{matrix}} & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} 5 & \\ 1 & 5 \end{matrix}} & \\ & & & & & & & \boxed{5} \\ & & & & & & & & \boxed{7} \end{pmatrix} . \tag{5.17}$$

Άσκηση 5.7.1. *Προσδιόρισε το χαρακτηριστικό $\chi_N(x)$ και το ελάχιστο $m_N(x)$ πολυώνυμο του πίνακα*

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{matrix}} & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda & & \\ 1 & \lambda & \\ & 1 & \lambda \end{matrix}} & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda & \\ 1 & \lambda \end{matrix}} & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \mu & \\ 1 & \mu \end{matrix}} & & & & \\ & & & & \boxed{\mu} & & & \\ & & & & & \boxed{\mu} & & \\ & & & & & & \boxed{\mu} & \\ & & & & & & & \boxed{\mu} \end{pmatrix} .$$

Υπόδειξη: $\chi_N(x) = (x-\lambda)^8(x-\mu)^4$ and $m_N(x) = (x-\lambda)^3(x-\mu)^2$.

Άσκηση 5.7.2. *Προσδιόρισε το χαρακτηριστικό $\chi_M(x)$ και το ελάχιστο $m_M(x)$ πολυώνυμο του πίνακα M της* (5.17).

Άσκηση 5.7.3. *Δείξε ότι ο πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$ είναι όμοιος προς έναν της μορφής:*

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} .$$

Άσκηση 5.7.4. *Προσδιόρισε όλες τις δυνατές κανονικές μορφές των Jordan πινάκων $A \in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ και πινάκων $B \in M_{\mathbb{R}}(4,4)$.*

Άσκηση 5.7.5. *Ένας πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ ονομάζεται* **αδύναμος** *αν ικανοποιεί την $A^2 = A$. Βρες παραδείγματα τέτοιων πινάκων. Βρες το ελάχιστο πολυώνυμο τέτοιων πινάκων και δείξε ότι είναι διαγωνιοποιήσιμοι με ιδιοτιμές 0 και 1. Εξήγησε γιατί αυτοί οι πίνακες ονομάζονται* **προβολές** *στον $Im(A)$ (δες ορισμό 3.1.4).*

Υπόδειξη: Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $x(x-1)$ και δες το θεώρημα 5.4.3.

Άσκηση 5.7.6. *Ένας πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ λέγεται* **ενέλιξη** *εάν ικανοποιεί την $A^2 = I_n$. Βρες παραδείγματα τέτοιων πινάκων. Βρες το ελάχιστο πολυώνυμο τέτοιων πινάκων και δείξε ότι είναι διαγωνιοποιήσιμοι με ιδιοτιμές $\{\pm 1\}$.*

Άσκηση 5.7.7. *Δείξε ότι δύο πίνακες $\{A, B \in M_{\mathbb{R}}(n,n)\}$ είναι όμοιοι τότε και μόνον τότε όταν έχουν τα ίδια ακριβώς μπλοκ Jordan $\{H_1, \dots, H_s\}$, όπως στο θεώρημα 5.7.1, ως προς αναδιάταξη.*

Άσκηση 5.7.8. *Δείξε ότι ο πίνακας B της (5.15) είναι όμοιος προς τον ανάστροφό του. Χρησιμοποίησε αυτό για να δείξεις ότι μιγαδικοί τετραγωνικοί πίνακες ή πραγματικοί τετραγωνικοί πίνακες με πραγματικές και μόνο ιδιοτιμές είναι όμοιοι με τους ανάστροφούς τους.*

Υπόδειξη: Για έναν πίνακα $B \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ όπως αυτός της (5.15) χρησιμοποίησε τους στοιχειώδεις πίνακες $[\epsilon_{ij}] = [\epsilon_{ij}]^{-1}$ (**§** 2.4) και θεώρησε τα γινόμενα

$$\cdots [\epsilon_{3(n-2)}][\epsilon_{2(n-1)}][\epsilon_{1n}]B[\epsilon_{1n}][\epsilon_{2(n-1)}][\epsilon_{3(n-2)}]\cdots .$$

Άσκηση 5.7.9. *Βρες την κανονική μορφή Jordan του πίνακα B της (5.8).*

Άσκηση 5.7.10. *Δείξε ότι ένας μιγαδικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ που ικανοποιεί την $A^k = I_n$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Βρες την κανονική μορφή Jordan ενός πραγματικού πίνακα $B \in M_{\mathbb{R}}(3,3)$ που ικανοποιεί $B^3 = I_3$.*

Υπόδειξη: Δες ότι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι οι k-τες μιγαδικές ρίζες της μονάδος και εφάρμοσε το θεώρημα 5.4.5.

Άσκηση 5.7.11. *Δείξε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο $m_f(x)$ ενός ενδομορφισμού f του διανυσματικού χώρου V διαιρείται με το πολυώνυμο $m_g(x)$ όπου $g = f|_W : W \to W$ είναι ο περιορισμός του f σ' έναν f-αναλλοίωτο υπόχωρο $W \subset V$.*

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε την άσκηση 5.4.5.

Άσκηση 5.7.12. *Βρες όλες τις κανονικές μορφές Jordan πινάκων $A \in M_{\mathbb{C}}(7,7)$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = (x-2)^3(x^2+5)$.*

Άσκηση 5.7.13. *Βρες τις κανονικές μορφές Jordan πινάκων A με χαρακτηριστικό $\chi_A(x) = (x-5)^4(x-3)^2$ και ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x) = (x-5)^2(x-3)^2$.*

Άσκηση 5.7.14. *Δείξε ότι όλοι οι πίνακες $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ που ικανοποιούν $A^n = I_n$, με n πρώτο αριθμό, είναι ανά δύο όμοιοι.*

Άσκηση 5.7.15. *Δείξε ότι ο ενδομορφισμός $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου είναι αντιστρέψιμος, τότε και μόνον τότε, όταν ο σταθερός όρος του ελαχίστου πολυωνύμου του $m_f(x)$ είναι μη-μηδενικός.*

Άσκηση 5.7.16. *Δείξε ότι κάθε μιγαδικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ είναι όμοιος προς έναν άνω τριγωνικό πίνακα.*

Άσκηση 5.7.17. *Δείξε ότι κάθε πραγματικός αντισυμμετρικός πίνακας $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ είναι όμοιος ενός πίνακα της μορφής*

$$N = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & \mu_1 \\ -\mu_1 & 0 \end{matrix}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & \mu_k \\ -\mu_k & 0 \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{0} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη: Θεώρησε τον $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. που είναι αντι-Ερμιτιανός

$$AX = \lambda X \Rightarrow \langle AX, X\rangle = \langle X, A^t X\rangle = \langle X, -AX\rangle \Rightarrow \lambda\langle X, X\rangle = -\overline{\lambda}\langle X, X\rangle \Rightarrow \lambda + \overline{\lambda} = 0$$

δηλ. οι ιδιοτιμές του είναι ζεύγη καθαρά φανταστικών $\lambda = \pm i\mu$ ή $\lambda = 0$.
δες επίσης την σημείωση 4.3.1.

5.8 Η διάσπαση των Jordan-Chevalley

> Υπάρχουν πολλοί άνθρωποι που βγάζουν τα συμπεράσματά τους για τη ζωή όπως κάποια παιδιά του σχολείου. Ξεγελούν τον δάσκαλο και αντιγράφουν την απάντηση από ένα βιβλίο χωρίς να έχουν επεξεργασθεί το θέμα οι ίδιοι.
>
> *S. Kierkegaard, Ημερολόγιο, 1837*

Στη μορφή που θα την αναλύσουμε, η διάσπαση αυτή είναι αποτέλεσμα της κανονικής μορφής Jordan για $\mathbb{F}$-διανυσματικούς χώρους, όπου $\mathbb{F}$ είναι αλγεβρικά κλειστό σώμα. Τα μπλοκ που εμφανίζονται στη μορφή Jordan στο θεώρημα 5.6.1 αποτελούνται είτε από διαγώνιους πίνακες είτε από πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = S + N = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Το πρώτο μέρος S είναι ημιαπλός (διαγώνιος) πίνακας και το δεύτερο μέρος N είναι μηδενοδύναμος πίνακας, προφανώς δε μετατίθενται $SN = NS$. Κάνοντας αυτό για κάθε μπλοκ της κανονικής μορφής Jordan του θεωρήματος 5.6.1 θα είχαμε την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος, εκτός του τελευταίου ισχυρισμού του.

Προχωράμε εν τούτοις στην απόδειξη με δυο βοηθητικά λήμματα, που μας δείχνουν κάποιες αξιοσημείωτες ιδιότητες των ενδομορφισμών.

Θεώρημα 5.8.1 (Διάσπαση Jordan-Chevalley). *Κάθε ενδομορφισμός $f : V \to V$ του n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V με $\mathbb{F}$ αλγεβρικά κλειστό σώμα, διασπάται με μοναδικό τρόπο $f = g + h$ σε έναν ημιαπλό g και ένα μηδενοδύναμο h ενδομορφισμό, οι οποίοι μετατίθενται $g \circ h = h \circ g$. Οι ενδομορφισμοί $\{g, h\}$ εκφράζονται ως πολυώνυμα του f.*

Λήμμα 5.8.1. *Ο αντίστροφος f^{-1} ενός αντιστρέψιμου ενδομορφισμού $f : V \Rightarrow V$ ενός n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου μπορεί να εκφρασθεί ως πολυώνυμο του f : $f^{-1} = p(f)$ μέσω ενός πολυωνύμου $p(x) \in \mathbb{F}[x]$.*

Απόδειξη. Αυτό είναι μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος των Cayley-Hamilton 5.4.2, που λέει ότι ο f ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_f(x) = (-1)^n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

με a_0 ίσο με την ορίζουσα ενός πίνακα παράστασης του f (άσκηση 4.5.14). Έτσι,

$$O = ((-1)^n f^n + \cdots + a_1 f + a_0 I_V) \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{-1}{a_0}((-1)^n f^{n-1} + \cdots + a_1)\right) = I_V$$

δείχνει ότι ο f^{-1} εκφράζεται μέσω του πολυωνύμου εντός της παρένθεσης. □

Λήμμα 5.8.2. *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.6.1 και την $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ διάσπαση της (5.11), οι προβολές $\{p_i : V \to V_i \subset V\ ,\ i = 1..k\}$, θεωρούμενες ως ενδομορφισμοί του V, εκφράζονται με πολυώνυμα ως προς f.*

Απόδειξη. Πράγματι, εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.4.3 στα πολυώνυμα

$$m_1(x) = (x - \lambda_i)^{k_i} \quad \text{and} \quad m_2(x) = \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{k_j}\ ,$$

βλέπουμε ότι $g = m_2(f)$ έχει $Kern(g) = \oplus_{j \neq i} V_j$ και $Im(g) = V_i$. Έπεται ότι ο περιορισμός $g_i = g|_{V_i} : V_i \to V_i$ είναι αντιστρέψιμος, και κατά το λήμμα 5.8.1, ο g_i^{-1} θα εκφράζεται με πολυώνυμο ως προς g_i : $g_i^{-1} = q(g_i)$ με $q(x) \in \mathbb{F}[x]$. Όμως ισχύει $p_i = q(m_2(f))m_2(f)$, που εκφράζει την p_i με πολυώνυμο ως προς f. □

του θεωρήματος 5.8.1. Με τον συμβολισμό του προηγουμένου λήμματος και το θεώρημα 5.6.1 ο ενδομορφισμός $g = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_k p_k$ είναι ημιαπλός (διαγωνιοποιήσιμος) και εκφράζεται επίσης με πολυώνυμο ως προς f. Άρα μετατίθεται με τον $f : f \circ g = g \circ f$ και το ίδιο συμβαίνει και με τον $h = f - g$, του οποίου ο περιορισμός σε κάθε V_i συμπίπτει με ένα μηδενοδύναμο ενδομορφισμό δείκτη μηδενικότητας k_i. Έπεται ότι ο h είναι μηδενοδύναμος δείκτη $max_i\{k_i\}$. Η μεταθετική σχέση $g \circ h = h \circ g$ προκύπτει επίσης από την μεταθετική $f \circ g = g \circ f$ που είναι ισοδύναμη με την $f \circ (g + h) = (g + h) \circ f$.

Σχετικά με το μονοσήμαντο της διάσπασης, εάν $f = g' + h'$ είναι μια άλλη διάσπαση αντίστοιχα σε ημιαπλό και μηδενοδύναμο ενδομορφισμό που μετατίθενται, τότε οι $\{g', h'\}$ μετατίθενται και με τον f, συνεπώς και με τον g και τον h που είναι πολυώνυμα του f. Επίσης η ισότητα $f = g' + h' = g + h$ συνεπάγεται την $g - g' = h' - h$. Κατά το πόρισμα 5.3.1, επειδή τα $\{g, g'\}$ μετατίθενται, ο $g - g'$ είναι ημιαπλός (διαγωνιοποιήσιμος) και κατά την άσκηση 5.5.4, επειδή οι $\{h, h'\}$ μετατίθενται, ο $h' - h$ είναι μηδενοδύναμος και όλες οι ιδιοτιμές του είναι 0. Αυτό συνεπάγεται ότι ο ημιαπλός ενδομορφισμός $g - g' = h' - h$ έχει όλες τις ιδιοτιμές του 0, άρα είναι ο μηδενικός ενδομορφισμός $g - g' = O$, πράγμα που συνεπάγεται και την $h' - h = O$. □

Σημείωση 5.8.1. Σημείωσε ότι για έναν πίνακα $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$, θεωρώντας τον αντίστοιχο ενδομορφισμό $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, η διάσπαση Jordan-Chevalley $f_A = g + h$ σε ημιαπλό g και μηδενοδύναμο h ενδομορφισμό του $\mathbb{C}^n$, παράγει έναν πραγματικό ενδομορφισμό g που είναι διαγωνιοποιήσιμος στο $\mathbb{C}^n$ όχι όμως αναγκαστικά και στο $\mathbb{R}^n$, και ένα πραγματικό μηδενοδύναμο h που δρα στο $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, ταυτίζοντας τους αντίστοιχους ενδομορφισμούς με πίνακες, έχουμε από το θεώρημα 5.8.1:

$$A = \overline{A} = \overline{g} + \overline{h} \quad \text{και} \quad \overline{g}\overline{h} = \overline{h}\overline{g} \quad \Longrightarrow \quad g = \overline{g} \quad \text{and} \quad h = \overline{h}\ .$$

Σημείωσε επίσης ότι, εν γένει, υπάρχουν περισσότερες από μία διασπάσεις σε ημιαπλό και μηδενοδύναμο ενδομορφισμούς, για τις οποίες όμως δεν ισχύει η μεταθετικότητα $gh = hg$ π.χ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = g + h\ ,$$

δεν είναι μια διάσπαση Jordan-Chevalley, καθώς η συνθήκη $gh = hg$ δεν ισχύει. Πράγματι, ο f_A θεωρούμενος ως ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{C}^2$ είναι ημιαπλός (άσκηση 5.3.12).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εκθετική

6.1 Εκθετική πινάκων

> ... τάξη είναι επανάληψη, κανονικότητα, απλότητα. Αποτελεί την ραχοκοκαλιά των προσπαθειών μας να μετρήσουμε, να ελέγξουμε και να κατανοήσουμε.
>
> *F. Frankel, On the surface of things*

Εδώ δουλεύουμε με την *άλγεβρα* πινάκων $M_{\mathbb{F}}(n,n)$ αλλά θα πρέπει να έχουμε κατά νου το ισοδύναμό της που είναι η άλγεβρα των ενδομορφισμών $L_{\mathbb{F}}(V,V)$ ενός n-διάστατου $\mathbb{F}$-διανυσματικού χώρου V, καθώς και τα σχόλια στην αρχή της **§** 5.2.

Όπως κάναμε με τα πολυώνυμα $p(x) \in \mathbb{F}[x]$, έτσι και σε κάποιες άπειρες **δυναμοσειρές**

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \ldots \tag{6.1}$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε το x με ένα πίνακα $X \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$ και να θεωρήσουμε την αντίστοιχη σειρά

$$g(X) = a_0 I_n + a_1 X + \cdots + a_k X^k + \ldots \ , \tag{6.2}$$

που ενδεχομένως να ορίζει ένα νέο πίνακα $Y = g(X) \in M_{\mathbb{F}}(n,n)$. Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει πάντα όταν ο X είναι *μηδενοδύναμος* πίνακας, καθώς τότε, από ένα k και πέρα όλες οι δυνάμεις X^s του πίνακα για $s > k$ μηδενίζονται, και το $g(X)$ γίνεται ένα πολυώνυμο ως προς X. Αυτό συνεπάγεται ότι σε μια οποιαδήποτε δυναμοσειρά η αντικατάσταση του x με έναν μηδενοδύναμο πίνακα X παράγει ένα νέο πίνακα.

Ειδικού ενδιαφέροντος για κάποιες εφαρμογές είναι η περίπτωση των μιγαδικών δυναμοσειρών (6.1) δηλ. σειρών στις οποίες οι συντελεστές $\{a_i, i = 0..\infty\}$ και το x είναι μιγαδικοί αριθμοί. Στον απειροστικό λογισμό αποδεικνύεται ([6, p.402]) ότι κάθε τέτοια σειρά καθορίζει μια **ακτίνα σύγκλισης** r έτσι ώστε για $|x| < r$ η δυναμοσειρά **συγκλίνει απολύτως**. Αυτό σημαίνει ότι η αντίστοιχη σειρά των απολύτων

τιμών

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \cdots + |a_n||x|^n + \ldots$$

συγκλίνει, πράγμα που συνεπάγεται ότι και η ίδια η σειρά (6.1) συγκλίνει. Επιπρόσθετα, αποδεικνύεται ότι για όλα τα $|x| < r$ υπάρχουν οι παράγωγοι της $g(x)$ και μάλιστα προκύπτουν σχηματίζοντας τη σειρά των παραγώγων όρο προς όρο. Για παράδειγμα, η πρώτη παράγωγος είναι:

$$g'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \ldots \ . \tag{6.3}$$

Μια ενδιαφέρουσα λόγω των εφαρμογών της σειρά είναι η **εκθετική**

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k + \ldots \ , \tag{6.4}$$

που συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{C}$ $(r = \infty)$ και ορίζει τη μιγαδική συνάρτηση e^x. Εφαρμόζοντας τον τύπο (6.3) βλέπουμε εύκολα ότι ισχύει

$$(e^x)' = e^x.$$

Με κάποια εξάσκηση στη **συγκλιση** και χρησιμοποιώντας μια νόρμα $\|A\|$ για πίνακες $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$, όπως αυτή του ορισμού 3.1.7, που μιμείται το **μέτρο** $|z|$ μιγαδικών αριθμών, μπορεί κανείς να δείξει ότι για $\|A\| < r$, όπου r είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, η αντίστοιχη σειρά πινάκων (6.2) συγκλίνει σε έναν πίνακα $g(X)$. Ειδικά, αυτό αληθεύει για την εκθετική δυναμοσειρά και για κάθε πίνακα $X \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$, πράγμα που ορίζει την εκθετική συνάρτηση για πίνακες:

$$e^X = I_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots + \frac{1}{k!}X^k + \ldots \ . \tag{6.5}$$

Θεώρημα 6.1.1. *Για δυο αντιμετατιθέμενους πίνακες* $\{X, Y \in M_{\mathbb{C}}(n,n) : \ XY = YX\}$ *ισχύει* $e^{X+Y} = e^X e^Y$.

Αυτό θα το αποδείξουμε παρακάτω (στο τέλος της **§** 6.2), προς το παρόν το χρησιμοποιούμε για να δείξουμε κάποιες συνέπειες και ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης για πίνακες.

Θεώρημα 6.1.2. *Η εκθετική συνάρτηση* e^X *για πίνακες* $X \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ *έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

1. $e^O = I_n$.
2. *Ο* e^X *είναι αντιστρέψιμος για κάθε* $X \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ *και* $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.
3. $Y^{-1}(e^X)Y = e^{(Y^{-1}XY)}$ *για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα* $Y \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$.
4. *Αν* $J = Q^{-1}AQ$ *είναι η μορφή Jordan του* A *τότε* $e^A = Qe^JQ^{-1}$.
5. *Αν* $\{X, Y \in M_{\mathbb{C}}(n,n) : XY = YX\}$ *τότε και* $Ye^X = e^XY$.
6. *Για έναν διαγώνιο πίνακα* $e^{diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = diag(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$.
7. $|e^X| = e^{tr(X)}$.

Απόδειξη. Nr-1 : έπεται από την εξίσωση (6.5) αντικαθιστώντας τον μηδενικό πίνακα $X = O$ του $M_{\mathbb{C}}(n,n)$.

Nr-2 : έπεται από το *nr-1* και το θεώρημα 6.1.1: $I_n = e^O = e^Xe^{-X}$.

Nr-3 : έπεται από την $Y^{-1}X^nY = (Y^{-1}XY)^n$ προχωρώντας όπως στο θεώρημα 5.2.2.

Nr-4 : έπεται από το *nr-3* και την $e^A = e^{QJQ^{-1}} = Qe^JQ^{-1}$.

Nr-5 : έπεται από την αντίστοιχη ιδιότητα για δυνάμεις:

$$XY = YX \;\Rightarrow\; Y(X^n) = (X^n)Y\ .$$

Nr-6 : έπεται επίσης από την αντίστοιχη ιδιότητα για δυνάμεις:

$$(diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^k = diag(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Nr-7 : αποδεικνύεται ανάγοντάς την στην περίπτωση μορφής Jordan, όπως στις επόμενες ασκήσεις. □

Άσκηση 6.1.1. *Δείξε ότι η εκθετική πίνακα με μπλοκ*

$$\begin{pmatrix} \boxed{H_1} & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \boxed{H_t} \end{pmatrix} \quad \textit{είναι ο πίνακας με μπλοκ} \quad \begin{pmatrix} \boxed{e^{H_1}} & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \boxed{e^{H_t}} \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 6.1.2. *Για τον μηδενοδύναμο πίνακα $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ και έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό t δείξε ότι:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ t & 1 & & 0 & & \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & & \\ \frac{t^3}{3!} & \frac{t^2}{2!} & t & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \dots & \frac{t^2}{2!} & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπόδειξη: Μελέτησε πρώτα τη μορφή των $\{A, A^2, \dots, A^n\}$ εξετάζοντας τη δράση τους στην κανονική βάση $\{E_i, i = 1..n\}$: $\{AE_1 = E_2, AE_2 = E_3, \dots\}$ κτλ.

Άσκηση 6.1.3. *Δείξε ότι για του μηδενοδύναμο πίνακα A της άσκησης 6.1.2 και του ταυτοτικό πίνακα $I_n \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ ισχύει*

$$e^{t(A+\lambda I_n)} \;=\; e^{t\lambda}e^{tA} = e^{tA}e^{t\lambda} \quad \textit{για πραγματικό ή μιγαδικό} \quad t\ . \tag{6.6}$$

Υπόδειξη: $e^{t(A+\lambda I_n)} = e^{t\lambda}e^{tA}$ έπεται από το θεώρημα 6.1.1 καθώς οι δύο πίνακες $\{tA, \lambda I_n\}$ μετατίθενται.

Απόδειξη. (*του nr-7*): Από το θεώρημα 5.6.1 ξέρουμε ότι ο πίνακας $X \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ είναι όμοιος με πίνακα J σε μορφή Jordan και από το πόρισμα 4.1.6 ξέρουμε επίσης ότι όμοιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη και το *nr-3*, η ορίζουσα e^A είναι ίση με την ορίζουσα του e^J. Αλλά κατά την άσκηση 6.1.1 ο e^J είναι πίνακας με μπλοκ $e^{H_i} = e^{\lambda_i}e^{A_i}$ με λ_i κάποια ιδιοτιμή του A. Η

ορίζουσα $det(e^A)$ είναι ίση με το γινόμενο αυτών των οριζουσών, το οποίο, αν m_i είναι η διάσταση του μπλοκ H_i, ισούται με

$$det(e^{\lambda_i}e^{A_i}) = (e^{\lambda_i})^{m_i} = e^{m_i\lambda_i}, i = 1..k \quad \Rightarrow$$
$$det(A) = (e^{\lambda_1})^{m_1} \dots (e^{\lambda_k})^{m_k} = e^{\lambda_1 m_1 + \dots + \lambda_k m_k} .$$

που είναι ακριβώς η παράσταση του $e^{tr(A)}$. □

Σταθεροποιώντας ένα διάνυσμα $U \in \mathbb{C}^n$ και έναν πίνακα $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$, η αντιστοίχιση $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{At}U \in \mathbb{C}^n$ ορίζει μια **καμπύλη** $X_A(t)$ μέσα στο $\mathbb{C}^n$.

Θεώρημα 6.1.3. *Η εφαπτόμενη στην καμπύλη $X_A(t)$ είναι*

$$X_A'(t) = (e^{At}U)' = Ae^{At}U = AX_A(t).$$

Απόδειξη. Αυτό είναι το ανάλογο της γνωστής από τον απειροστικό λογισμό πρότασης της συνήθους εκθετικής: $(e^{at})' = ae^{at}$. Μπορεί ν' αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την παραγώγιση της σειράς όρο-προς-όρο of και χρησιμοποιώντας επίσης τον **κανόνα της αλυσίδας**:

$$(e^{At}U)' = \left(I_n + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \frac{1}{4!}(At)^4 + \dots\right)' U =$$

$$\left(A + \frac{1}{2!}(2(At)A) + \frac{1}{3!}(3(At)^2A) + \frac{1}{4!}(4(At)^3A) + \dots\right) U = Ae^{At}U . \qquad \square$$

Άσκηση 6.1.4. *Δείξε ότι για έναν πίνακα $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ και του συζυγή του A^* είναι $e^{(A^*)} = (e^A)^*$. Συμπέρανε ότι για ένα αντι-Ερμιτιανό πίνακα $A^* = -A$ ο αντίστοιχος e^A είναι μοναδιαίος $(e^A)^* = (e^A)^{-1}$. Δείξε ανάλογα ότι για έναν πίνακα $A \in M_{\mathbb{R}}(n,n)$ και του ανάστροφό του A^t είναι $e^{(A^t)} = (e^A)^t$ και ότι για έναν αντισυμμετρικό πίνακα $A^t = -A$ ο αντίστοιχος e^A είναι ορθογώνιος $(e^A)^t = (e^A)^{-1}$.*

Άσκηση 6.1.5. *Βρες του εκθετικό e^A για του πίνακα A του παραδείγματος 5.6.1.*

Άσκηση 6.1.6. *Βρες του εκθετικό του πίνακα :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \ , \ D = \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & \nu & 0 & 0 \\ -\nu & \mu & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & \mu & \nu \\ 0 & 1 & -\nu & \mu \end{array}\right).$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε το γεγονός ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x) \quad \text{και} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

και δες ότι $e^A = \begin{pmatrix} \cos(\nu) & \sin(\nu) \\ -\sin(\nu) & \cos(\nu) \end{pmatrix}$. Επίσης $e^B = e^{\mu}I_2$ και $e^C = e^{A+B} = e^Ae^B$ καθώς $AB = BA$, συνεπάγεται $e^C = e^{\mu}\begin{pmatrix} \cos(\nu) & \sin(\nu) \\ -\sin(\nu) & \cos(\nu) \end{pmatrix}$. Για τον πίνακα D

δες ότι για ανιμετατιθέμενους $\{N, S\}$:

$$D = N + S \quad \text{με} \quad N = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{και} \quad S = \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & \nu & 0 & 0 \\ -\nu & \mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mu & \nu \\ 0 & 0 & -\nu & \mu \end{array}\right) \quad \Rightarrow$$

$$e^D = e^N e^S = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & O \\ \hline I_2 & I_2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} e^\mu e^A & O \\ \hline O & e^\mu e^A \end{array}\right) = e^\mu \left(\begin{array}{c|c} e^A & O \\ \hline e^A & e^A \end{array}\right).$$

Άσκηση 6.1.7. *Με του συμβολισμό της άσκησης 6.1.6 ο $2n \times 2n$ πραγματικός πίνακας σε μορφή Jordan μπλοκ (5.16) μπορεί να γραφεί με μπλοκ 2×2, όπου O συμβολίζει του 2×2 μηδενικό πίνακα:*

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{C} & & & \\ \boxed{I_2} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \boxed{I_2} & \boxed{C} \end{pmatrix} = N' + S' = \begin{pmatrix} \boxed{O} & & & \\ \boxed{I_2} & \boxed{O} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \boxed{I_2} & \boxed{O} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{C} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{C} \end{pmatrix}.$$

Δείξε τις επόμενες ιδιότητες:

1. *Οι πίνακες $\{N', S'\}$ μετατίθενται $N'S' = S'N'$.*
2. *Ο πίνακας N' είναι μηδενοδύναμος δείκτη μηδενικότητας n, συνεπώς $e^{N'} = I_{2n} + N' + \frac{N'^2}{2!} + \cdots + \frac{N'^{n-1}}{(n-1)!}$.*
3. *Γράψε αναλυτικά τη μορφή του πίνακα e^J.*

6.2 Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων

> Ένας δάσκαλος που δεν σκέφτεται διαρκώς λύσεις προβλημάτων - προβλημάτων που δεν ξέρει την λύση τους- είναι ψυχολογικά απλώς ανέτοιμος να διδάξει λύση προβλημάτων στους μαθητές του.
>
> *P. Halmos, I want to be a mathematician*

Για την ακρίβεια, ασχολούμεθα εδώ με **συνήθεις διαφορικές εξισώσεις** που αφορούν σε άγνωστες μιγαδικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής

$$\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$$

και τις οποίες θέλουμε να προσδιορίσουμε ξεκινώντας από κάποιες σχέσεις μεταξύ των παραγώγων τους. Συγκεκριμένα, το πρόβλημα εξαρτάται από έναν πίνακα $A \in M_{\mathbb{C}}(n, n)$ και θέλουμε να προσδιορίσουμε *παραγωγίσιμες* ή *διαφορίσιμες* συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι ικανοποιούν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & a_{11}y_1(t) + \cdots + a_{1n}y_n(t)\ , \\ y_2'(t) & = & a_{21}y_1(t) + \cdots + a_{2n}y_n(t)\ , \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ y_n'(t) & = & a_{n1}y_1(t) + \cdots + a_{nn}y_n(t)\ . \end{array}\right\} \tag{6.7}$$

Αυτές υποτίθεται ότι ισχύουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ειδικά για $t = 0$ το σύστημα ικανοποιεί τις λεγόμενες **αρχικές συνθήκες**

$$y_1(0) = u_1, \dots y_n(0) = u_n \quad \text{με} \quad (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n \quad \text{δοθέν διάνυσμα.} \tag{6.8}$$

Με διανυσματικό συμβολισμό, αυτό γράφεται συνοπτικά:

$$Y'(t) = AY(t) \quad \text{και} \quad Y(0) = U\ . \tag{6.9}$$

Θεώρημα 6.2.1. *Η καμπύλη $Y(t) = e^{tA}U$ του $\mathbb{C}^n$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος 6.9.*

Απόδειξη. Πράγματι, κατά το θεώρημα 6.1.3 η καμπύλη αυτή είναι διαφορίσιμη και ικανοποιεί την εξίσωση (6.9).

Εάν $Y_1(t)$ είναι μια άλλη λύση του συστήματος (6.9), τότε η καμπύλη του $\mathbb{C}^n$, $Z(t) = e^{-At}Y_1(t)$ θα έχει παράγωγο

$$Z'(t) = -Ae^{-tA}Y_1(t) + e^{-tA}(AY_1(t)) \ = \ O\ ,$$

και θα ικανοποιεί $Z'(0) = Y_1(0) = U$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $Z(t) = U$ είναι σταθερό για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και έχουμε $e^{-At}Y_1(t) = U$ που σημαίνει $Y_1(t) = e^{tA}U$. □

Πόρισμα 6.2.1. *Η μοναδική λύση $Y(t)$ του συστήματος (6.9) με $Y(0) = U = O$ είναι η ταυτοτικά μηδενική $Y(t) = O$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

Σημείωση 6.2.1. Το θεώρημα όχι μόνο εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσης του συστήματος (6.9) και την μοναδικότητα της λύσης για δοθείσες αρχικές συνθήκες U, αλλά οδηγεί και σε μια αναλυτική μορφή της λύσης του. Πράγματι, από την άσκηση 6.1.3 και την άσκηση 6.1.2 ξέρουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα e^{tJ}, όπου J είναι πίνακας σε μορφή Jordan, Θα είναι είτε μηδενικά είτε της μορφής $e^{t\lambda}t^s$, όπου λ είναι κάποια ιδιοτιμή του A και s ένας ακέραιος $0 \le s < n$.

Αυτό, για έναν αυθαίρετο πίνακα $A \in M_{\mathbb{C}}(n,n)$ με αντίστοιχη μορφή Jordan $A = Q^{-1}JQ$, συνεπάγεται ότι τα στοιχεία $\{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ του

$$Y(t) = e^{tA}U = Q^{-1}(e^{tJ})QU \tag{6.10}$$

θα είναι γραμμικοί συνδυασμοί συναρτήσεων της μορφής $e^{t\lambda}p(t)$, με λ κάποια ιδιοτιμή του A και $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές βαθμού μικρότερου του n.

Σημείωση 6.2.2. Πρέπει να σημειώσουμε ότι το σύστημα (6.7) είναι ομογενές ή, όπως λέγεται, **αυτόνομο** σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Χρησιμοποιώντας διανυσματικό συμβολισμό $Y'(t) = AY(t)$ βλέπουμε εύκολα ότι το σύνολο των λύσεων του συστήματος ορίζει ένα διανυσματικό χώρο $\mathscr{S}_A$.

Πράγματι, αν $\{Y_1(t), Y_2(t)\}$ είναι δυο λύσεις, το άθροισμά τους $Y_1(t) + Y_2(t)$, καθώς και το γινόμενο με έναν σταθερό αριθμό $\mu Y_1(t)$, είναι πάλι λύσεις του ιδίου συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, η αντιστοίχιση μιας λύσης $e^{At}U$ σ' ένα διάνυσμα αρχικών συνθηκών $U \in \mathbb{C}^n$ ορίζει έναν ισομορφισμό $f : \mathbb{C}^n \to \mathscr{S}_A$ με $f(U) = e^{At}U \in \mathscr{S}_A$.

Μπορούμε να ορίσουμε επίσης και **μη-ομογενή** ή **μη-αυτόνομα** γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων προσθέτοντας ένα διάνυσμα $B(t)$ γνωστών συναρτήσεων $\{b_1(t), \dots, b_n(t)\}$, οπότε το σύστημα σε διανυσματική μορφή γίνεται

$$Y'(t) = AY(t) + B(t) \ . \tag{6.11}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η διαφορά $Y_1(t) - Y_2(t)$ δύο λύσεων του μη-ομογενούς συστήματος είναι μια λύση του ομογενούς συστήματος $Y'(t) = AY(t)$. Αυτό, όπως και στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων (θεώρημα 1.2.1), αποδεικνύει το θεώρημα:

Θεώρημα 6.2.2. *Η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι το άθροισμα της γενικής λύσης του αντιστοίχου ομογενούς συστήματος και μιας ειδικής λύσης του μη-ομογενούς συστήματος.*

Πράγματι, αποδεικνύεται ([9, p.131]) ότι η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος (6.11) μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα της μορφής:

$$Y(t) \ = \ e^{tA}\left(U + \int_0^t e^{-sA}B(s)ds\right) \quad \text{με} \quad Y(0) = U \ . \tag{6.12}$$

Σημείωσε ότι η ονομασία του ομογενούς συστήματος διαφορικών εξισώσεων (6.7) ως *αυτόνομου* σημαίνει ότι οι παράγωγοι $\{y_i'(t)\}$ των συναρτήσεων εξαρτώνται μόνο από τις ίδιες τις συναρτήσεις $\{y_j(t)\}$, ενώ η ονομασία των μη-ομογενών συστημάτων (6.11) ως *μη-αυτόνομα* σημαίνει ότι οι παράγωγοι $\{y_i'(t)\}$ των συναρτήσεων εξαρτώνται όχι μόνον από τις ίδιες τις συναρτήσεις $\{y_j(t)\}$ αλλά και από κάποιες άλλες αυθαίρετες συναρτήσεις $\{b_j(t)\}$.

Απόδειξη του θεωρήματος 6.1.1. Χρησιμοποιούμε την μοναδικότητα των λύσεων των διαφορικών εξισώσεων του θεωρήματος 6.2.1. Πράγματι, για ένα πίνακα $U \in \mathbb{C}^n$ οι δύο καμπύλες $X(t) = e^{At}e^{Bt}U$ και $Y(t) = e^{(A+B)t}U$ ικανοποιούν τις δύο διαφορικές εξισώσεις με τις ίδιες αρχικές συνθήκες:

$$X'(t) = Ae^{At}e^{Bt}U + e^{At}Be^{Bt}U \overset{(*)}{=} (Ae^{At}e^{Bt}U + Be^{At}e^{Bt})U = (A+B)e^{At}e^{Bt}U \ ,$$
$$Y'(t) = (A+B)e^{(A+B)t}U \quad \text{and} \quad X(0) = Y(0) = U.$$

Η ισότητα $(*)$ ισχύει διότι, όταν ο B μετατίθεται με τον A τότε μετατίθεται και με τον e^A. Έτσι η διαφορά $Z(t) = (X(t) - Y(t))$ ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα

$$Z'(t) = (A+B)Z(t) \quad \text{με αρχικές συνθήκες} \quad Z(0) = O \ ,$$

που, κατά το πόρισμα 6.2.1 συνεπάγεται ότι $Z(t) = O$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, άρα και για $t = 1$. Αυτό συνεπάγεται την $e^Ae^B = e^{(A+B)}$. □

6.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης

> Η τελευταία λειτουργία της λογικής είναι το να αναγνωρίσει ότι υπάρχουν άπειρα πράγματα που την ξεπερνούν.
>
> *B. Pascal, Pensées, 267*

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης είναι σχέσεις που συνδέουν παραγώγους διαφόρων τάξεων $\{x(t), x'(t), x^{(2)}(t), \dots\}$ της ίδιας συνάρτησης και το

πρόβλημα είναι, να βρούμε συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις. Η ονομασία *γραμμικές* σημαίνει ότι οι διάφορες παράγωγοι ικανοποιούν μια γραμμική εξίσωση:

$$a_0 x(t) + a_1 x'(t) + \cdots + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + x^{(n)}(t) \;=\; 0\,. \tag{6.13}$$

Υπάρχουν πάλι οι λεγόμενες **αρχικές συνθηκες** που απαιτούν από την συνάρτηση και τις παραγώγους της να έχουν προκαθορισμένες τιμές για το $t = 0$:

$$x(0) = u_1\ ,\ x'(0) = u_2\ ,\ \ldots\ ,\ x^{(n-1)}(0) = u_n\ . \tag{6.14}$$

Σε τέτοιες διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγηθείσα θεωρία, εισαγάγοντας πρώτα τις βοηθητικές συναρτήσεις:

$$y_1(t) = x(t)\ ,\ y_2(t) = x'(t)\ ,\ y_3(t) = x^{(2)}(t)\ ,\ \ldots\ ,\ y_n(t) = x^{(n-1)}(t)\ . \tag{6.15}$$

Τότε οι παράγωγοι αυτών των συναρτήσεων ορίζουν ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων $Y' = AY$:

$$Y'(t) \;=\; \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}'(t) \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix}\ , \tag{6.16}$$

$$\text{με} \quad \chi_A(t) = (-1)^n (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\ , \tag{6.17}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A, που εκτός προσήμου συμπίπτει με το πολυώνυμο $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ που ορίζεται από τους συντελεστές της διαφορικής εξίσωσης (άσκηση 4.2.4).

Έτσι, από το θεώρημα 6.2.1 και την σημείωση 6.2.1 συμπεραίνουμε το επόμενο θεώρημα που περιγράφει τη μορφή των λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (6.13).

Θεώρημα 6.3.1. *Η διαφορική εξίσωση 6.13 με αρχικές συνθήκες (6.14) έχει μια μοναδική λύση που συμπίπτει με την πρώτη συντεταγμένη $y_1(t) = x(t)$ του διανύσματος των συναρτήσεων $e^{tA}U$, όπου A είναι ο πίνακας (6.16).*

Επιπλέον, η λύση αυτή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων της μορφής $e^{t\lambda}p(t)$, όπου $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ είναι ένα πολυώνυμο του t και λ είναι ρίζα του πολυωνύμου $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ που ορίζει τη διαφορική εξίσωση.

Παράδειγμα 6.3.1. Ας δούμε το παράδειγμα του **απλού αρμονικού ταλαντωτή** ([10, p.50])

$$\left.\begin{array}{r} x'' + kx = 0 \\ x(0) = u_1\ , \\ x'(0) = u_2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} \text{με} \\ y_1 = x \\ y_2 = x' \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad Y = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} \;=\; AY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$Y(t) = e^{tA}U \quad \Rightarrow \quad Y(t) =$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!} \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3!} \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k^2 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^4}{4!} \begin{pmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & k^2 \end{pmatrix} + \ldots \right) U$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - k\frac{t^2}{2!} + k^2\frac{t^4}{4!} - \ldots\ , & t - k\frac{t^3}{3!} + k^2\frac{t^5}{5!} - \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Εξαρτώμενες από το πρόσημο του k οι δύο σειρές της πρώτης γραμμής του πίνακα παράγουν τις λύσεις:

$$x(t) = u_1 \cos\left(\sqrt{k}t\right) + u_2 \frac{\sin\left(\sqrt{k}t\right)}{\sqrt{k}} \quad \text{για} \quad k > 0 \ ,$$

$$x(t) = u_1 + t u_2 \quad \text{για} \quad k = 0 \quad \text{και}$$

$$x(t) = u_1 \cosh\left(\sqrt{|k|}t\right) + u_2 \frac{\sinh\left(\sqrt{|k|}t\right)}{\sqrt{|k|}} \quad \text{για} \quad k < 0 \ .$$

Μέρος ΙΙΙ

Παραρτήματα

Α. Σώματα

Ορισμός 7.2.1. **Σώμα** είναι ένα μη-κενό σύνολο $\mathbb{F}$ εφοδιασμένο με δύο **πράξεις**: την **πρόσθεση** $(a,b) \mapsto a+b$ και τον **πολλαπλασιασμό** $(a,b) \mapsto ab$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (αξιώματα):

1. $a+b=b+a$ και $ab=ba$ για κάθε $a,b \in \mathbb{F}$ (αντιμεταθετικότητα).
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ και $a(bc)=(ab)c$ για κάθε $a,b,c \in \mathbb{F}$ (προσεταιριστικότητα).
3. Για κάθε ζεύγος (a,b) η εξίσωση $a+x=b$ έχει μοναδική λύση $x \in \mathbb{F}$.
4. Υπάρχει ένα στοιχείο 0 ονομαζόμενο **μηδέν** έτσι ώστε $a+0=a$ για κάθε $a \in \mathbb{F}$.
5. Για κάθε $a \neq 0$ και κάθε $b \in \mathbb{F}$ η εξίσωση $ax=b$ έχει μοναδική λύση $x \in \mathbb{F}$.
6. Για κάθε τριάδα $a,b,c \in \mathbb{F}$ ισχύει $(a+b)c=ac+bc$ (επιμεριστικός κανόνας).

Σημείωση 7.2.1.

1. Θέτοντας στο *nr-3* $b=0$ συμπεραίνουμε την ύπαρξη ενός μοναδικού στοιχείου a' έτσι ώστε

$$a+a'=a'+a=0. \text{ Αυτό το συμβολίζουμε με } \quad a'=-a\ .$$

   Το a' ονομάζουμε **αντίθετο** του a.

2. Θέτοντας στο *nr-5* $b=a$ συμπεραίνουμε την ύπαρξη ενός στοιχείου $1_a \in \mathbb{F}$ έτσι ώστε $a1_a=1_a a=a$. Θεωρώντας ένα άλλο $b \neq 0$ και το αντίστοιχο 1_b έτσι ώστε $b1_b=b$ βλέπουμε ότι $1_a=1_b$. Αυτό έπεται από τις απλές παρατηρήσεις:

$$(ab)1_a=a(b1_a)=b(a1_a)=ba=ab \ \Rightarrow 1_a=1_{ab},$$
$$\text{και ανάλογα } 1_b=1_{ab} \ \Rightarrow 1_a=1_{ab}=1_b.$$

   Θέτουμε $1=1_a=1_b=\ldots$ και το ονομάζουμε **μονάδα** ή **πολλαπλασιαστική μονάδα**. Αυτό είναι ένα διακεκριμένο στοιχείο του $\mathbb{F}$ που ικανοποιεί την:

$$a1=1a=a \ \text{ για κάθε } \ a \in \mathbb{F}.$$

3. Ισχύει $1 \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε $1+1=1 \Rightarrow a(1+1)=a+a=a \Rightarrow a=0$ για κάθε $a \in \mathbb{F}$, που είναι παράλογο αν $\mathbb{F} \neq \{0\}$.

4. Ισχύει $01=0$, καθώς $a+01=a1+01=(a+0)1=a1=a \Rightarrow 01=0$.

5. Θέτοντας στο *nr-5* $b=1$ παίρνουμε ένα μοναδικό a' έτσι ώστε $aa'=1$. Αυτό το συμβολίζουμε με a^{-1} και το ονομάζουμε **αντίστροφο** του a.

6. $ab=0$ συνεπάγεται $a=0$ ή (όχι αποκλειστικό) $b=0$, καθώς, αν $a \neq 0$ τότε

$$a^{-1}(ab)=(a^{-1}a)b=(1)b=0 \Rightarrow b=0$$

και ανάλογα, if $b \neq 0$ τότε $a=0$.

Παράδειγμα 7.2.1. Παραδείγματα σωμάτων είναι:

1. Το σώμα $\mathbb{Q}$ όλων των ρητών αριθμών.

2. Το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών που περιέχει το $\mathbb{Q}$ σαν ένα **υποσώμα** δηλ. σώμα με τις ίδιες πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού.

3. Το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών $\{z=x+iy\}$ με $\{x,y \in \mathbb{R}\}$ και πράξεις

$$(x+iy)+(x'+iy)=(x+x')+i(y+y') \quad \text{και}$$
$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)\ .$$

Το $\mathbb{C}$ περιέχει το $\mathbb{R}$, που ταυτίζουμε με το σύνολο $\{x+i0, x \in \mathbb{R}\}$.

4. Το $\mathbb{Z}_n$ σώμα των υπολοίπων της διαίρεσης ακεραίων με ένα σταθερό πρώτο αριθμό n.

Υπάρχουν πολλά είδη σωμάτων, με τα **αλγεβρικά κλειστά** σώματα (ορισμός 7.3.1) να αποτελούν μια ιδιαίτερα σημαντική κατηγορία. Για κάθε σώμα $\mathbb{F}$ υπάρχουν πολλές **επεκτάσεις** δηλ. άλλα σώματα $\mathbb{F}'$ που περιέχουν το $\mathbb{F}$ ως **υποσώμα** δηλ. ως σώμα με τις πράξεις του $\mathbb{F}$ να είναι περιορισμοί στο $\mathbb{F}$ των πράξεων που ορίζονται στο $\mathbb{F}'$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν $\mathbb{F}' \supset \mathbb{F}$ είναι μια επέκταση του $\mathbb{F}$, τότε το $\mathbb{F}'$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{F}$. Για παράδειγμα, το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι μια επέκταση του σώματος των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Σ' αυτό το $\mathbb{R}$ ταυτίζεται με το υποσύνολο του $\mathbb{C}$ που αποτελείται από τους μιγαδικούς αριθμούς της μορφής $z=x+i0, x \in \mathbb{R}$ και το $\mathbb{C}$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$ με την διακεκριμένη βάση $\{1,i\}$.

Β. Πολυώνυμα

Ορισμός 7.3.1. Πολυώνυμο $p(x)$ ως προς το σώμα $\mathbb{F}$ είναι ένας πεπερασμένος συνδυασμός **μονωνύμων** $x^n, x \in \mathbb{F}$:

$$p(x) \;=\; a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \;.$$

Το n λέγεται **βαθμός** του πολυωνύμου $p(x)$ και συμβολίζεται με $n = deg(p(x))$. Το πολυώνυμο λέγεται **μονικό** όταν ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $a_n = 1$. Το σύνολο όλων των πολυωνύμων $\mathbb{F}[x]$ είναι ένας $\mathbb{F}$-διανυσματικός χώρος με βάση το $\{1, x, x^2, ...\}$. Το πολυώνυμο ονομάζεται **μη-σταθερό** όταν ο βαθμός του είναι $n > 0$, διαφορετικά ονομάζεται **σταθερό**. Δύο πολυώνυμα

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n X^n \quad \text{και} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$$

μπορούν να πολλαπλασιασθούν:

$$\begin{aligned} r(x) = q(x)p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n+m} x^{n+m} \quad &\text{με} \\ c_0 \;&=\; a_0 b_0 \;, \\ c_1 \;&=\; a_0 b_1 + a_1 b_0 \;, \\ c_2 \;&=\; a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \;, \\ \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \;, \\ c_p \;&=\; \sum_{i+j=p} a_i b_j \end{aligned} \tag{7.1}$$

Ένα πολυώνυμο ονομάζεται **πρώτο** ή **ανάγωγο** όταν δεν είναι γινόμενο δύο άλλων μη-σταθερών πολυωνύμων. Ένα σώμα ονομάζεται **αλγεβρικά κλειστό** όταν τα ανάγωγα πολυώνυμά του είναι όλα (γραμμικά) βαθμού 1.

Ορισμός 7.3.2. Όταν ο βαθμός του πολυωνύμου $p_1(x) \in \mathbb{F}[x]$ είναι μεγαλύτερος του βαθμού του πολυωνύμου $p_2(x)$, τότε ορίζεται το **πηλίκον** $q(x)$ και το **υπόλοιπο** r(x), που είναι μονοσήμαντα ορισμένα πολυώνυμα που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$p_1(x) \;=\; p_2(x)q(x) + r(x) \quad \text{με} \quad deg(r(x)) < deg(p_2(x)) \;. \tag{7.2}$$

Σημείωση 7.3.1. Σημείωσε ότι η διαίρεση πολυωνύμων, ονομαζόμενη **Ευκλείδεια διαίρεση** πολυωνύμων, μπορεί να γίνει λύνοντας ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων.

Αυτό το διασαφηνίζω με ένα παράδειγμα: Υπόθεσε ότι θέλουμε να διαιρέσουμε το

$$a(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad \text{με το}$$
$$b(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \ .$$

Για να έχουμε ισότητα βαθμών στην εξίσωση (7.2) που τώρα είναι

$$(*): \quad a(x) = b(x)q(x) + r(x),$$

το πηλίκον $q(x)$ και το υπόλοιπο $r(x)$ πρέπει να είναι βαθμού 2. Αυτά λοιπόν έχουν τη μορφή:

$$q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0 \quad \text{and} \quad r(x) = r_2x^2 + r_1x + r_0$$

και πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές αυτών των δύο πολυωνύμων με τη βοήθεια των συντελεστών των δοθέντων πολυωνύμων $\{a(x), b(x)\}$. Εξισώνοντας τους συντελεστές των δύο πλευρών της εξίσωσης $(*)$ σύμφωνα με τον κανόνα (7.1) ευρίσκουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$\begin{pmatrix} b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \\ q_0 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_5 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}.$$

Το πρότυπο της γενικής περίπτωσης είναι σαφές. Για $n = deg(a(x))$ προκύπτει σύστημα $n+1$ εξισώσεων και $n+1$ αγνώστων. Σημείωσε ότι για μονικό $b(x) \Rightarrow b_3 = 1$.

Ορισμός 7.3.3. Ο **μέγιστος κοινός διαιρέτης** δύο πολυωνύμων $\{p_1(x), p_2(x)\}$ με $deg(p_1(x)) \geq deg(p_2(x))$ μπορεί να ορισθεί μέσω διαδοχικών διαιρέσεων

$$\begin{aligned} p_1(x) &= p_2(x)q_1(x) + p_3(x), \\ p_2(x) &= p_3(x)q_2(x) + p_4(x), \\ p_3(x) &= p_4(x)q_3(x) + p_5(x), \\ \dots \quad & \dots \quad \dots \\ p_{k-2}(x) &= p_{k-1}(x)q_{k-2}(x) + p_k(x), \\ p_{k-1}(x) &= p_k(x)q_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Η διαδικασία των διαδοχικών διαιρέσεων θα τερματισθεί όταν κάποιο υπόλοιπο $p_{k+1} = O$, καθώς οι βαθμοί των $p_i(x)$ γίνονται ολοένα μικρότεροι σε κάθε βήμα. Όταν συμβεί $p_{k+1}(x) = 0$, τότε το $p_k(x)$ είναι ο απαιτούμενος μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{p_1(x), p_2(x).\}$

Αυτό το πολυώνυμο $p_k(x)$ μπορούμε να το εκφράσουμε με τη βοήθεια των αρχικών $\{p_1(x), p_2(x)\}$. Πράγματι, λύνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς $p_3(x)$ και αντικαθιστώντας στη δεύτερη έχουμε:

$$p_4(x) = p_2(x) - [p_1(x) - p_2(x)q_1(x)]q_2(x) \ = \ A_4(x)p_1(x) + B_4(x)p_2(x),$$

με κάποια πολυώνυμα $\{A_4(x) = -q_2(x)\ ,\ B_4 = 1 + q_1(x)q_2(x)\}$ μη εξαρτώμενα των $\{p_1(x), p_2(x)\}$ Αντικαθιστώντας αυτό στην τρίτη εξίσωση και λύνοντας ως προς το $p_5(x)$ βλέπουμε ότι και αυτό εκφράζεται:

$$p_5(x) = A_5(x)p_1(x) + B_5(x)p_2(x)$$

με κατάλληλα πολυώνυμα $\{A_5(x), B_5(x)\}$ μη εξαρτώμενα από τα $\{p_1(x), p_2(x)\}$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε τέλος μια παράσταση του μέγιστου κοινού διαιρέτη στη μορφή:

$$p_k(x) = A_k(x)p_1(x) + B_k(x)p_2(x),$$

με κατάλληλα πολυώνυμα $\{A_k(x), B_k(x)\}$ μη εξαρτώμενα από τα $\{p_1(x), p_2(x)\}$.

Ορισμός 7.3.4. Δύο πολυώνυμα $\{p_1(x), p_2(x)\}$ λέγονται **σχετικά πρώτα** ή **πρώτα μεταξύ τους** όταν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους είναι το σταθερό πολυώνυμο $1 \in \mathbb{F}[x]$ (ή κάποιο μη-μηδενικό σταθερό πολλαπλάσιό του). Ο ορισμός επεκτείνεται και σε περισσότερα πολυώνυμα $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)\}$ και λέμε ότι είναι *σχετικά πρώτα* αν είναι ανά δύο σχετικά πρώτα.

Ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ λέγεται **ανάγωγο** όταν δεν αναλύεται σε γινόμενο άλλων πολυωνύμων, βαθμών ≥ 1.

Από τις παρατηρήσεις που προηγούνται του ορισμού βλέπουμε ότι ισχύει η επόμενη ιδιότητα:

Θεώρημα 7.3.1. *Τα πολυώνυμα $\{p_1(x), p_2(x)\}$ είναι σχετικά πρώτα, τότε και μόνον τότε, αν υπάρχουν πολυώνυμα $\{A(x), B(x)\}$ έτσι ώστε*

$$A(x)p_1(x) + B(x)p_2(x) \ = \ 1\ .$$

Θεώρημα 7.3.2. *Κάθε πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ αναλύεται σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων $p(x) = p_1(x) \dots p_k(x)$.*

Απόδειξη. Ξεκινώντας από το $p(x)$, αν δεν είναι ανάγωγο το ίδιο, τότε γράφεται σαν γινόμενο δύο άλλων $p(x) = p_1(x)p_2(x)$. Εάν ένα εξ αυτών, πες το $p_2(x)$, δεν είναι ανάγωγο, τότε και αυτό γράφεται σαν γινόμενο δύο άλλων $p_2(x) = p_3(x)p_4(x)$. Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο αναλύουμε το $p(x)$ σε γινόμενο αναγώγων πολυωνύμων $p(x) = p_1(x)p_2(x) \dots p_k(x)$.

Η διαδικασία είναι εντελώς ανάλογη με την ανάλυση ενός ακεραίου n σε πρώτους παράγοντες π.χ. $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. □

Ορισμός 7.3.5. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $p(x)$ δύο πολυωνύμων $p_1(x)$ και $p_2(x)$ είναι το πολυώνυμο του μικρότερου δυνατού βαθμού που διαιρείται ακριβώς και από τα δύο πολυώνυμα.

Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο δύο ακεραίων σχηματίζεται αναλύοντας τους ακέραιους σε πρώτους παράγοντες και σχηματίζοντας το γινόμενο των παραγόντων τους με τις μέγιστες δυνάμεις που εμφανίζονται στην ανάλυσή τους. Για παράδειγμα οι $a = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$ και $b = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 2$ έχουν ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $c = 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 2$. Ανάλογα το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $p(x)$ των πολυωνύμων $\{p_1(x), p_2(x)\}$ σχηματίζεται πολλαπλασιάζοντας όλους τους ανάγωγους παράγοντες των $\{p_1(x), p_2(x)\}$ στην υψηλότερη δύναμη που εμφανίζεται σ' αυτούς.

Γ. Μεταθέσεις

Ορισμός 7.4.1. **Μετάθεση** είναι μια αναδιάταξη σ ενός ήδη διατεταγμένου συνόλου όπως το απόκομμα των πρώτων n αριθμών: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Μια αναδιάταξη αλλάζει τη σειρά των στοιχείων σε $\{k_1, \dots, k_n\}$ και συμβολίζεται με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} \quad \text{π.χ.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7.3}$$

Μια μετάθεση μπορεί να θεωρηθεί και ως απεικόνιση $\sigma : [n] \longrightarrow [n]$, η οποία στο 1 αντιστοιχεί το $\sigma(1) = k_1$, στο 2 αντιστοιχεί το $\sigma(2) = k_2$, ... , στο n αντιστοιχεί το $\sigma(n) = k_n$. Τυπικά, λέμε ότι η μετάθεση είναι μια **αμφίρριψη** (δηλ. 1-1 και επί) του συνόλου $[n]$ στον εαυτό του.

Η πρώτη σειρά στον παραπάνω συμβολισμό μπορεί να είναι και αυτή σε αναδιάταξη της φυσικής διάταξης του $[n]$. Για παράδειγμα, τα δύο σύμβολα παριστάνουν την ίδια μετάθεση (γιατί η αντίστοιχη απεικόνιση $\sigma : [n] \to [n]$, που απεικονίζει την πρώτη γραμμή στη δεύτερη είναι η ίδια):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 6 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Μ' αυτή την έννοια η εναλλαγή των γραμμών παριστάνει την αντίστροφη μετάθεση:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 7 & 6 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Γενικότερα το σύμβολο $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ σημαίνει ότι η σ, σαν απεικόνιση του $[n]$ στον εαυτό του, αντιστοιχεί τα: $\sigma(a_1) = b_1, \dots, \sigma(a_n) = b_n$. Συχνά χρησιμοποιείται επίσης και ο συμβολισμός $\sigma = (a_1, \dots, a_n)$ που σημαίνει ότι $\sigma(1) = a_1$, $\sigma(2) = a_2, \dots, \sigma(n) = a_n$.

Το σύνολο των μεταθέσεων του $[n]$ συμβολίζεται με S_n και λέγεται **συμμετρική ομάδα** n στοιχείων. Η λέξη *ομάδα* επισημαίνει ότι, θεωρώντας τις μεταθέσεις σαν απεικονίσεις $\sigma : [n] \to [n]$, η σύνθεση δύο μεταθέσεων $\sigma' \circ \sigma = \sigma''$ είναι πάλι μια μετάθεση και η αντίστροφη μιας μετάθεσης είναι κι αυτή μετάθεση. Η ταυτοτική μετάθεση ε του $[n]$ είναι αυτή που αφήνει μια διάταξη όπως είναι και η σύνθεσή της με μια άλλη μετάθεση σ δεν μεταβάλλει την σ: $\varepsilon \circ \sigma = \sigma \circ \varepsilon = \sigma$.

Άσκηση 7.4.1. *Δείξε ότι η ομάδα μεταθέσεων S_n έχει $|S_n| = n!$ στοιχεία.*

Μία μετάθεση $\sigma \in S_n$ αναλύεται σε απλούστερες $\sigma = \tau_k \circ \ldots \circ \tau_1$ που ονομάζονται **κύκλοι**. Αυτές είναι ειδικές μεταθέσεις που μεταβάλλουν τη διάταξη ορισμένων μόνο στοιχείων ενώ αφήνουν τα υπόλοιπα σταθερά. Ας αναλύσουμε το παράδειγμα 7.3: Αποτελείται από δύο κύκλους:

$$(1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 2 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 1) \quad \text{και} \quad (4 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 4)\ ,$$

που συμβολίζουμε με $\tau_1 = [1,3,2,5,6]$ και $\tau_2 = [4,7]$ και για τους οποίους ισχύει $\sigma = \tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$. Καθένας απ' αυτούς περιλαμβάνει ορισμένα στοιχεία του $[7]$ τα οποία ο κύκλος μεταθέτει **κυκλικά**. Π.χ. ο τ_1 : το 1 στο 3, το 3 στο 2, το 2 στο 5, το 5 στο 6 και το 6 πίσω στο 1. Τα υπόλοιπα στοιχεία του $[7]$ τα αφήνει ο τ_1 σταθερά. Το πλήθος των διαφορετικών στοιχείων του κύκλου λέγεται **μήκος** του κύκλου. Ένας κύκλος μήκους 2, όπως ο $\tau_2 = [4,7]$ λέγεται **αντιμετάθεση**. Ένα χαρακτηριστικό του κύκλου $\tau \in S_n$ μήκους r είναι (συμβολίζοντας με το ίδιο σύμβολο και το σύνολο των στοιχείων του τ) ότι ισχύει:

$$(x, \tau(x), \tau^2(x), \ldots, \tau^{r-1}(x)) = \tau \quad , \quad \tau^r(x) = x \quad \text{για κάθε} \quad x \in \tau\ . \tag{7.4}$$

Άσκηση 7.4.2. *Παίρνοντας την (7.4) ως ορισμό του κύκλου δείξε ότι για δοθείσα μετάθεση $\sigma \in S_n$ η σχέση*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{τα } x, y \text{ περιέχονται στον ίδιο κύκλο της } \sigma\ ,$$

είναι σχέση ισοδυναμίας και χωρίζει το σύνολο των στοιχείων της σ σε ξένα υποσύνολα, κάθε ένα από τα οποία ταυτίζεται με ένα κύκλο τ της σ.

Άσκηση 7.4.3. *Δώσε την απόδειξη του ότι μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ αναλύεται σε κύκλους $\sigma = \tau_k \circ \ldots \circ \tau_1$ μονοσήμαντα, εκτός ενδεχόμενης αναδιάταξης των $\{\tau_i\}$.*

Θεώρημα 7.4.1. *Ένας κύκλος $\sigma \in S_n, \sigma = (n_1, \ldots, n_k)$ με $k > 1$ είναι σύνθεση $k-1$ αντιμεταθέσεων: $\sigma = (n_1, \ldots, n_k) = [n_1, n_2] \circ [n_2, n_3] \circ \ldots \circ [n_{k-1}, n_k]$.*

Απόδειξη.

Η δράση του σ πάνω σε καποιο j διαφορετικό των $\{n_i\}$ είναι $\sigma(j) = j$. Η πρώτη αντιμετάθεση που επιδρά στο n_i (από δεξιά προς αριστερά) είναι η $[n_i, n_{i+1}]$ που το απεικονίζει στο n_{i+1}.

τ	3	2	5	6	1
[6, 1]	3	2	5	1	6
[5, 6]	3	2	6	1	5
[2, 5]	3	5	6	1	2
[3, 2]	2	5	6	1	3

Οι επόμενες αντιμεταθέσεις $[n_1, n_2] \circ \ldots \circ [n_{i-1}, n_i]$ αφήνουν το n_{i+1} σταθερό. Άρα συνολικά η σύνθεση αυτή των αντιμεταθέσεων απεικονίζει το n_i στο n_{i+1}, όπως ακριβώς και η σ . Ο προηγούμενος πίνακας δείχνει την ανάλυση του κύκλου της πρώτης γραμμής σε αντιμεταθέσεις. Η τελευταία γραμμή δείχνει το αποτέλεσμα της σύνθεσης των τεσσάρων αντιμεταθέσεων $[3,2] \circ [2,5] \circ [5,6] \circ [6,1]$. Συνολικά η μετάθεση (κύκλος) είναι αυτή που προκύπτει από την πρώτη και την τελευταία γραμμή:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Άσκηση 7.4.4. *Δείξε ότι ο κύκλος* $\sigma \in S_n, \sigma = [n_1, \dots, n_k]$ *με* $k > 1$ *είναι και σύνθεση των αντιμεταθέσεων:* $\sigma = [n_1, \dots, n_k] = [n_k, n_1] \circ \dots \circ [n_3, n_1] \circ [n_2, n_1]$.

Αφού κάθε μετάθεση είναι σύνθεση κύκλων και κάθε κύκλος είναι σύνθεση αντιμεταθέσεων έχουμε το συμπέρασμα:

Πόρισμα 7.4.1. *Κάθε μετάθεση αναλύεται σε σύνθεση αντιμεταθέσεων.*

Ορισμός 7.4.2. **Υπογραφή** μιας μετάθεσης $\sigma \in S_n$ ονομάζεται ο αριθμός

$$s(\sigma) = \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \pm 1 . \tag{7.5}$$

Το ± 1 προκύπτει διότι στο γινόμενο, επειδή η σ είναι αμφίρριψη, όποια διαφορά εμφανίζεται σε παρανομαστή εμφανίζεται και σε κάποιον αριθμητή. Το πρόσημο ωστόσο του κλάσματος μπορεί να είναι και -1 αν συμβεί $i < j$ αλλά ισχύει $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Ειδικά, για κάθε αντιμετάθεση $[i,j]$ έχουμε $s([i,j]) = -1$.

Θεώρημα 7.4.2. *Για δύο μεταθέσεις* $\{\sigma, \tau \in S_n\}$ *και την σύνθεσή τους ισχύει*

$$s(\tau \circ \sigma) = s(\tau)s(\sigma) . \tag{7.6}$$

Απόδειξη.

$$s(\tau \circ \sigma) = \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\tau \circ \sigma(i) - \tau \circ \sigma(j)}{i - j} = \prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\tau \circ \sigma(i) - \tau \circ \sigma(j)}{\sigma(i) - \sigma(j)} \cdot \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} =$$

$$\left(\prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\tau \circ \sigma(i) - \tau \circ \sigma(j)}{\sigma(i) - \sigma(j)} \right) \left(\prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right) =$$

$$\left(\prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\tau(i) - \tau(j)}{i - j} \right) \left(\prod_{\substack{i<j \\ i,j=1..n}} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \right) = s(\tau)s(\sigma) . \qquad \square$$

Άσκηση 7.4.5. *Πως δικαιολογείται η προτελευταία ισότητα;*

Πόρισμα 7.4.2. *Η υπογραφή μιας μετάθεσης* $\sigma \in S_n$ *που αναλύεται σε σύνθεση* $\sigma = \tau_k \circ \dots \circ \tau_1$ *αντιμεταθέσεων είναι* $s(\sigma) = (-1)^k$.

Βιβλιογραφία

[1] Apostol, T., *Mathematical Analysis, 2nd edition*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973.

[2] Arvanitoyeorgos, A., *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, AMS, Providence, Rhode Island 2003.

[3] Behnke, H., and al, *Foundations of Mathematics vols I,II,III*, MIT Press, Cambridge, 1983.

[4] Birkhoff, G., and Mac Lane, S., *A survey of modern Algebra, 4th edition*, Macmillan, New York, 1977.

[5] Courant, R., *What is Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[6] Courant, R., *Differential and Integral Calculus, vol. I, II*, ISHI press, New York, 2011.

[7] Gilbert, W., and Nicholson, W., *Modern algebra with applications*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2004.

[8] Grcar, J., *Mathematicians of Gaussian Elimination*, Notices of the AMS, **58(2011)** 782-792.

[9] Hirsch, M., and al, *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, Elsevier, New York, 2013.

[10] Margenau, H., and Murphy, G., *The Mathematics of Physics and Chemistry*, Van Nostrand, New York, 1963.

[11] Τσολομύτης, Α., *Σύνολα και Αριθμοί, Μια εισαγωγή στα Μαθηματικά*, Leader Books, Αθήνα, 2004.

Ευρετήριο

Α
Αδύναμος μετασχηματισμός, 56
Αδύναμος πίνακας, 129
Αδύνατο σύστημα, 6
Άθροισμα διανυσματικών χώρων, 66
Άλγεβρα πολυωνύμων, 108
Αλγεβρικά κλειστό σώμα, 147
Αλγεβρική δομή, 99
Αλγεβρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής , 86
Αμφίρριψη, 150
Αναγωγή σε κλιμακωτή μορφή, 7, 9
Αναγωγή σε κλιμακωτό πίνακα, 7
Ανάγωγο πολυώνυμο, 111, 124, 147
Ανάπτυγμα ορίζουσας, 82
Ανάστροφος πίνακα, 79
Ανάστροφος πίνακας, 37, 65, 115
Ανεξάρτητα διανύσματα, 37
Ανεξάρτητα διανύσματα, 18f
Ανεξάρτητες γραμμές, 12
Ανηγμένος κλιμακωτός, 13, 50
Ανισότητα του Schwarz, 54
Αντι-Ερμιτιανός πίνακας, 74
Αντίθετο ή αρνητικό διάνυσμα, 15
Αντιμετάθεση, 151
Αντίστοιχο ομογενές σύστημα, 7
Αντιστρέψιμος πίνακας, 36, 46, 74
Αντίστροφη αντικατάσταση, 9
Αντίστροφη εικόνα υποχώρου, 32
Αντισυμμετρική διγραμμική μορφή, 91
Αντισυμμετρικός πίνακας, 73, 130
Άνω αριστερά μπλοκ, 48, 92
Άνω τριγωνικός πίνακας, 48, 58, 63, 74, 81
Αξίωμα πληρότητας, 60
Αξιώματα διανυσματικού χώρου, 14
Απαλοιφή, 9
Απόλυτη σύγκλιση, 133
Απόσταση, 61
Αρχικές συνθήκες, 138, 140
Αυτόνομο σύστημα, 138

Β
Βαθμός πολυωνύμου, 147
Βάση, 18, 24

Γ
Γενική λύση συστήματος, 12
Γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής, 86
Γραμμική άλγεβρα, 3
Γραμμική μορφή, 32
Γραμμικό σύστημα, 3
Γραμμικός μετασχηματισμός, 31
Γραμμικός συνδυασμός, 18
Γωνία δύο διανυσμάτων, 62

Δ
Δείκτης μηδενικότητας, 116
Δέλτα σύμβολα, 83
Δευτερεύουσα στήλη, 12
Δευτερεύουσες στήλες, 5
Δευτερεύουσες στήλες, 8
Διαγωνιοποιήσιμος ενδομορφισμός, 102, 111
Διαγωνιοποιήσιμος πίνακας, 102
Διαγώνιος πίνακας, 17, 47, 81, 84, 87, 89f, 92, 94, 100, 135
Διανυσματικός υπόχωρος, 15
Διανυσματικός χώρος υπεράνω του F, 16
Διανυσματικός χώρος, 15
Διάσπαση LDU, 50
Διάσταση, 24f

Διγραμμική μορφή, 90
Διωνυμικός τύπος, 103
Δυϊκή βάση, 93
Δυϊκός διανυσματικός χώρος, 32, 93
Δυϊκός διανυσματικού χώρου, 35
Δυναμοσειρές, 133
Δυωνυμικός τύπος, 120

Ε
Εικόνα διανυσματικού χώρου, 32
Εικόνα υποχώρου, 32
Εικονόχωρος = χώρος εικόνων, 27
Εκθετική δυναμοσειρά, 134
Ελάσσονες πίνακες, 83
Ελάσσων πίνακας, 109
Ελάχιστο άνω φράγμα, 60
Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο , 114
Ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, 115, 149
Ελάχιστο πολυώνυμο, 108
Ελεύθερες μεταβλητές, 6, 8, 12
Ενδομορφισμός, 97
Ενέλιξη, 129
Ενρριπτικός μετασχηματισμός, 51
Ένρριψη = μετασχηματισμός 1-1, 32
Εξαρτημένα διανύσματα, 37
Εξαρτημένα διανύσματα, 18
Εξωτερικό γινόμενο, 70
Επαυξημένος πίνακας, 3
Επέκταση σώματος, 146
Επιλύσιμο σύστημα, 6
Επιμεριστικός κανόνας, 145
Επιμορφισμός, 97
Επίρρηψη (μετασχηματισμός), 34
Επιρριπτικός ενδομορφισμός, 97
Επιρριπτικός μετασχηματισμός, 33, 36
Επίρριψη, 33, 51
Επισύνολα διανυσματικού υποχώρου, 72
Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο, 55, 59
Ερμιτιανός διανυσματικός χώρος, 54
Ερμιτιανός πίνακας, 74, 88f
Εσωτερικό γινόμενο, 64
Ευθεία, 69
Ευθύ άθροισμα, 67
Ευκλείδεια διαίρεση, 148
Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος, 62

Η
Ηγετική μονάδα, 13
Ημιαπλός ενδομορφισμός, 104
Ημιαπλός πίνακας, 104, 130

Θ
Θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, 87
Θετικά ορισμένος πίνακας, 91
Θεώρημα παράστασης Jordan, 124
Θεώρημα του Shur, 115
Θεώρημα των Cayley και Hamilton, 109

Ι
Ιδεώδες πολυωνύμων, 108
Ιδιοδιάνυσμα, 86
Ιδιοδιανύσματα, 90
Ιδιοτιμή, 86
Ιδιοχώρος ενδομορφισμού, 102
Ισοδύναμα συστήματα, 7
Ισοδυναμία πινάκων, 45
Ισοδύναμο σε κλιμακωτή μορφή, 7
Ισοδύναμοι πίνακες, 45
Ισοδύναμος κλιμακωτός πίνακας, 7
Ισομορφισμός, 36, 97
Ίχνος πίνακα, 73, 94

Κ
Κάθετο διάνυσμα, 69
Κανόνας παραλληλογράμμου, 72
Κανόνας του Cramer, 84
Κανονικές ή συνήθεις συντεταγμένες, 14
Κανονική βάση, 56
Κανονική ή συνήθης βάση, 18, 24
Κανονικό Ερμιτιανό γινόμενο, 53
Κανονικό ή σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, 61
Κανονικός Ερμιτιανός, 54
Κανονικός ή συνήθης Ευκλείδειος χώρος, 61
Κανονικός μοναδιαίος, 54
Κανονικότητα ορίζουσας, 78
Κατεύθυνση ευθείας, 69
Κάτω τριγωνικός πίνακας, 48, 81, 116
Κλιμακωτός πίνακας, 4, 9f
Κυκλικός υπόχωρος, 116
Κύκλος, 151
Κύρια στήλη, 12
Κύριες ή βασικές μεταβλητές, 12
Κύριες στήλες, 5

Λ
λ-ιδιοχώρος, 86
Λήμμα του Zorn, 25

Μ
Μέγιστος κοινός διαιρέτης, 148
Μετάθεση, 150
Μεταθετικότητα, 145
Μετασχηματισμός ένα προς ένα, 32, 34, 36
Μέτρο ή απόλυτη τιμή, 53
Μη επιλύσιμο σύστημα, 6
Μη-αυτόνομο σύστημα, 139
Μη-ομογενές σύστημα, 7
Μηδενικό διάνυσμα, 15
Μηδενικός ενδομορφισμός, 131
Μηδενικός μετασχηματισμός, 67
Μηδενικός πίνακας, 26, 47, 73, 99
Μηδενιστής διανυσματικού υποχώρου, 94
Μηδενιστής υποχώρου, 104
Μηδενοδύναμοι ενδομορφισμοί, 116
Μηδενόχωρος πίνακα, 33
Μηδενόχωρος, 27
Μήκος ή νόρμα ή μέτρο, 61
Μήκος κύκλου, 151
Μλοκ του Jordan, 124
Μοναδιαίο διάνυσμα, 54, 61
Μοναδιαίος διανυσματικός χώρος, 54
Μοναδιαίος ή Ερμιτιανός διανυσματικός χώρος, 55
Μοναδιαίος πίνακας, 74, 85, 88f, 136
Μονικό πολυώνυμο, 108, 147
Μονομορφισμός, 32, 97
Μορφή Jordan, 117
Μπλοκ του Jordan, 117
Μπλοκ, 47, 81, 117

Ν
Νόρμα πίνακα, 60
Νόρμα, 54
Νόρμαλ ενδομορφισμός, 107
Νόρμαλ πίνακας, 107

Ο
Οδηγός, 5f, 9–13
Ολοκλήρωμα, 93
Όμοιοι πίνακες, 80, 98
Ορθογώνια διανύσματα, 54, 61
Ορθογώνια προβολή, 56
Ορθογώνιο συμπλήρωμα, 54, 56, 67f
Ορθογώνιος πίνακας, 74, 85, 88f, 136
Ορθοκανονική βάση, 55, 58
Ορθοκανονικό σύνολο, 55
Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt, 58f, 62f, 74
Ορίζουσα, 77f

Π
Παραγόμενος χώρος, 18, 20
Παράγωγος, 93
Παραμετροποίηση ευθείας, 69
Πεπερασμένες ακολουθίες, 26
Πηλίκον δύο πολυωνύμων, 147
Πηλίκον πολυωνύμων, 109
Πίνακας Vandermonde, 94, 104
Πίνακας διγραμμικής μορφής, 91
Πίνακας με μπλοκ, 85, 87
Πίνακας παράστασης, 41
Πίνακας σε κλιμακωτή μορφή, 4
Πίνακας του συστήματος, 4
Πίνακας, 4
Πολυώνυμα, 25
Πραγματικό μέρος, 53
Προβολή σε υπόχωρο, 67, 129
Προβολή στο χώρο πηλίκον, 51
Προσεταιριστική ιδιότητα γινομένου, 36
Προσεταιριστικότητα, 145
Πρόσημο μετάθεσης, 78
Πυθαγόρειο θεώρημα, 55, 61
Πυρήνας γραμμικού μετασχηματισμού, 32

Σ
Στηλοδιάνυσμα, 21
Στηλοδιανύσματα, 36
Στοιχειώδεις πίνακες, 45
Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών, 9, 45
Στοιχειώδεις πράξεις στηλών, 13
Συγκλίνουσα σειρά, 134
Συζυγής μετασχηματισμός, 59, 65
Συζυγής μιγαδικός αριθμός, 53
Συζυγής πίνακας, 60, 74
Συμμετρική διγραμμική μορφή, 91
Συμμετρική ομάδα, 150
Συμμετρικός πίνακας, 73, 88f
Συμπαράγοντες, 83
Συνοδός πίνακας, 88

Συντεταγμένες ως προς βάση, 24
Σύστημα σε κλιμακωτή μορφή, 5
Σχετικά πρώτα πολυώνυμα, 110, 149
Σώμα, 16, 145

Τ
Τάξη γραμμικού μετασχηματισμού, 33
Τάξη πίνακα, 5, 7f, 12, 22, 28, 37, 40, 47, 94
Τάξη του πίνακα, 71
Ταυτοτικός μετασχηματισμός, 67
Ταυτοτικός πίνακας, 17, 26, 45f, 73
Τελεστής, 97
Τετραγωνική ρίζα πίνακα, 92
Τετραγωνικός πίνακας, 36
Τετριμμένη λύση ομογενούς, 7
Τριγωνική ανισότητα, 54

Υ
Υπερεπίπεδο, 71
Υπογραφή, 152
Υπόλοιπο διαίρεσης πολυωνύμων, 109
Υπόλοιπο δύο πολυωνύμων, 147
Υποπίνακας, 85
Υπόσωμα, 17
Υπόχωρος παραγόμενος, 18
Υπόχωρος, 15

Φ
Φανταστικό μέρος, 53

Χ
Χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενδομορφισμού, 101
Χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 86, 94
Χώρος εικόνων, 27
Χώρος πηλίκον, 50, 112