1. Έστω ότι η f είναι αναλυτική στον δίσκο $|z - z_0| < R$. Δείξτε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

για οποιοδήποτε $0 < r < R$.

Απάντηση. Έστω $0 < r < R$ και γ ο κύκλος $[z - z_0| = r$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Χρησιμοποιώντας την παραμετρικοποίηση $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, έχουμε

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}}\, ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\sin \bar{z}$ δεν είναι πουθενά αναλυτική.

Απάντηση. Έχουμε $\sin \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i}$. Γράφοντας $z = x + iy$ βρίσκουμε, με στοιχειώδεις πράξεις, ότι $\sin \bar{z} = u(x, y) + iv(x, y)$ με $u(x, y) = \sin x \cosh y$ και $v(x, y) = -\cos x \sinh y$. Επομένως, η εξίσωση $u_x = v_y$ είναι ισοδύναμη με $2 \cos x \cosh y = 0$ η οποία ικανοποιείται μόνο αν $\cos x = 0$, δηλαδή $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Τώρα, η εξίσωση $u_y = -v_x$, δηλαδή η $2 \sin x \sinh y = 0$, με δεδομένες τις παραπάνω τιμές του x, ικανοποιείται μόνο αν $y = 0$. Άρα, οι εξισώσεις Cacuchy–Riemann ικανοποιούνται μόνο στα μεμονωμένα σημεία $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, επομένως η $\sin \bar{z}$ δεν είναι μπορεί να είναι πουθενά αναλυτική.

3. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\cos \bar{z}$ δεν είναι πουθενά αναλυτική.

Απάντηση. Γράφουμε $\cos \bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} + e^{-i\bar{z}}}{2}$ και επιχειρηματολογούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.

4. 'Εστω γ ο κύκλος $|z| = \frac{3}{2}$. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z - 1)}\, dz$$

Απάντηση. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-1)}$ έχει στο εσωτερικό της καμπύλης γ πόλους στα σημεία 0 και 1. Από τη θεωρία υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z - 1)}\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, 1)\right].$$

Έχουμε $\operatorname{Res}(f, 1) = \cos 1$ και $\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{-(z-1)\sin z - \cos z}{(z-1)^2} = -1$ οπότε

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z - 1)}\, dz = 2\pi i(-1 + \cos 1).$$

5. 'Εστω γ ο κύκλος $|z| = 3$. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2 + 1)}\, dz$$

Απάντηση. Η συνάρτηση $f(z) = \frac{\cos z}{z(z^2+1)}$ έχει στο εσωτερικό της καμπύλης γ πόλους στα σημεία 0 και $\pm i$. Από τη θεωρία υπολοίπων έχουμε

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2 + 1)}\, dz = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, 0) + \operatorname{Res}(f, i) + \operatorname{Res}(f, -i)\right].$$

Όμως, $\operatorname{Res}(f, 0) = 1$, $\operatorname{Res}(f, i) = \frac{\cos i}{i(i+i)} = -\frac{\cos i}{2}$ και $\operatorname{Res}(f, -i) = \frac{\cos(-i)}{(-i)(-i-i)} = -\frac{\cos(-i)}{2} = -\frac{\cos i}{2}$, άρα

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{z(z^2 + 1)}\, dz = 2\pi i(1 - \cos i).$$

6. Βρείτε τη σειρά Laurent της $f(z) = \frac{10}{(z+2)(z^2+1)}$ στον δακτύλιο $1 < |z| < 2$.

Απάντηση. Γράφουμε

$$\frac{10}{(z+2)(z^2+1)} = \frac{10}{(z+2)(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i},$$

για σταθερές A, B, C που ικανοποιούν $10 = A(z^2+1) + B(z+2)(z-i) + C(z+2)(z+i)$. Θέτοντας διαδοχικά $z = -2, i, -i$ υπολογίζουμε εύκολα $A = 2, B = -1+2i, C = -1-2i$. Τώρα,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}, \quad \text{μια και } |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+i/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{i^n}{z^n}, \quad \text{μια και } 1 = |i| < |z|,$$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-i/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^n}, \quad \text{μια και } 1 = |i| < |z|.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n + (-1+2i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{z^{n+1}} + (-1-2i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}, \quad 1 < |z| < 2.$$

7. Βρείτε τη σειρά Laurent της $f(z) = \frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)}$ στον δακτύλιο $|z| > 3$.

Απάντηση. Γράφουμε

$$\frac{z^2-1}{(z+2)(z+3)} = 1 - \frac{5z+7}{(z+2)(z+3)} = 1 + \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+3},$$

για σταθερές A, B που ικανοποιούν $-5z-7 = A(z+3) + B(z+2)$. Θέτοντας διαδοχικά $z = -2, -3$, βρίσκουμε ότι $A = 3$ και $B = -8$. Μια και $|z| > 3 > 2$ έχουμε,

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^n},$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+3/z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{z^n},$$

άρα

$$f(z) = 1 + 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{z^{n+1}} - 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 3.$$

8. Βρείτε τη σειρά Laurent της $f(z) = \frac{24}{z^2(z-1)(z+2)}$ στον δακτύλιο $0 < |z| < 1$.

Απάντηση. Γράφουμε

$$\frac{24}{z^2(z-1)(z+2)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+2},$$

για σταθερές A, B, C, D που ικανοποιούν $24 = Az(z-1)(z+2) + B(z-1)(z+2) + Cz^2(z+2) + Dz^2(z-1)$. Θέτοντας διαδοχικά $z = 0, 1, -2$, βρίσκουμε $B = -12, C = 8, D = -2$. Η τιμή $A = -6$ προκύπτει εύκολα αν θέσουμε, π.χ. $z = -1$. Τώρα,

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \quad \text{μια και } |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+z/2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^n}, \quad \text{μια και } |z| < 2.$$

Έχουμε λοιπόν,

$$f(z) = -\frac{6}{z} - \frac{12}{z^2} - 8\sum_{n=0}^{\infty}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n, \quad 0 < |z| < 1.$$

9. Δείξτε ότι το τρίγωνο με κορυφές $0, z$ και w είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν $|z|^2 = |w|^2 = 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

Απάντηση. Το τρίγωνο με κορυφές $0, z$ και w είναι ισόπλευρο αν και μόνο αν τα μήκη των πλευρών του είναι ίσα, δηλαδή, $|z| = |w| = |z-w|$. Παρατηρούμε ότι $|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = |z|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w + |w|^2 = |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$. Η σχέση $|w|^2 = |z-w|^2$ δίνει αμέσως $|z|^2 = 2\mathrm{Re}(z\bar{w})$.

10. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$$

Απάντηση. Έστω $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+4)}$. Για $R > 2$ θεωρούμε την καμπύλη που αποτελείται από το ημικύκλιο $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ και το ευθύγραμμο τμήμα από το $-R$ στο R. Μια και η f έχει πόλους στα σημεία i και $2i$ έχουμε από τη θεωρία υπολοίπων ότι

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,2i)\right].$$

Έχουμε,

$$\mathrm{Res}(f,2i) = \frac{1}{((2i)^2+1)^2(2i+2i)} = \frac{1}{36i},$$

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2 f(z) = -\lim_{z\to i}\frac{2(z^2+4)+2z(z+i)}{(z+i)^3(z^2+4)^2} = \frac{1}{36i},$$

επομένως,

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi}{9}.$$

Ακόμα,

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi R}{(R^2-1)^2(R^2-4)} \to 0 \quad \text{όταν } R\to\infty,$$

επομένως

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{9}.$$

11. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

Απάντηση. Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}.$$

12. Βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2}$$

Απάντηση. Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία όπως και στην προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{16}.$$

13. Βρείτε τις τέταρτες ρίζες του αριθμού $-2 + i2\sqrt{3}$. Απλοποιήστε όσο το δυνατόν. Υπενθύμιση: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Απάντηση. Γράφουμε $-2+i2\sqrt{3} = 4(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου $\cos\theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ και $\sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα,

$$\begin{aligned}(-2+i2\sqrt{3})^{1/4} &= \sqrt[4]{4}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3.\end{aligned}$$

Η θ είναι γωνία στο δεύτερο τεταρτημόριο και μάλιστα $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Έτσι,

$$(-2+i2\sqrt{3})^{1/4} = \sqrt{2}\left\{\exp(i\frac{\pi}{6}),\ \exp(i\frac{2\pi}{3}),\ \exp(i\frac{7\pi}{6}),\ \exp(i\frac{5\pi}{3})\right\}.$$

14. Βρείτε τις τέταρτες ρίζες του αριθμού $-8-i8\sqrt{3}$. Απλοποιήστε όσο το δυνατόν. Υπενθύμιση: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Απάντηση. Γράφουμε $-8-i8\sqrt{3} = 16(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ και $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα,

$$(-8-i8\sqrt{3})^{1/4} = 2\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3.$$

Η θ είναι γωνία στο τρίτο τεταρτημόριο και μάλιστα $\theta = \frac{4\pi}{3}$. Έτσι,

$$(-8-i8\sqrt{3})^{1/4} = 2\left\{\exp(i\frac{\pi}{3}),\ \exp(i\frac{5\pi}{6}),\ \exp(i\frac{4\pi}{3}),\ \exp(i\frac{11\pi}{6})\right\}.$$