1. (1 μον.) Έστω $f(x) = x + \ln x - 2$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα ρ. Υπολογίστε τις δύο πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος της διχοτόμησης με αρχικό διάστημα $[1, 3]$. Πόσα βήματα της μεθόδου απαιτούνται για να προσεγγίσουμε τη ρίζα με σφάλμα το πολύ 10^{-5}; Δίνεται $\ln 2 \approx 0.69$ και $\ln 10 \approx 2.3$.

   Απάντηση: Η $f(x) = x + \ln x - 2$ είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και ικανοποιεί $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, \infty)$. Όμως, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ για $x > 0$, άρα η ρίζα είναι μοναδική. Έχουμε $f(1) = -1 < 0$ και $f(3) = 1 + \ln 3 > 0$ άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ περιέχεται στο διάστημα $[1, 3]$.

   Η μέθοδος της διχοτόμησης δίνει ως πρώτη προσέγγιση της ρίζας την $\frac{1+3}{2} = 2$. Επειδή $f(2) = \ln 2 > 0$ η δεύτερη εκτίμηση της ρίζας είναι η $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$.

   Ο αριθμός, n, των βημάτων της μεθόδου της διχοτόμησης που απαιτούνται για την προσέγγιση της ρίζας με σφάλμα το πολύ 10^{-5} υπολογίζεται από τη σχέση

   $$\frac{3-1}{2^n} \le 10^{-5},$$

   ισοδύναμα, $n \ge 1 + \frac{5\ln 10}{\ln 2}$, ή $n \ge 18$.

2. (1 μον.) Θεωρούμε το σύνολο αριθμών μηχανής M με $\beta = 2$, $t = 3$, $L = -1$ και $U = 2$. Βρείτε το ελάχιστο θετικό στοιχείο του M και το μέγιστο στοιχείο του. Πόσα στοιχεία του M περιέχονται στο διάστημα $[1, 2]$;

   Απάντηση: Το ελάχιστο θετικό στοιχείο του M είναι το 0.100×2^{-1} δηλαδή ο αριθμός $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Το μέγιστο στοιχείο του M είναι το 0.111×2^2 δηλαδή ο αριθμός $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) \times 4 = \frac{7}{2}$. Τα στοιχεία του M στο διάστημα $[1, 2]$ είναι τα

   $$0.100 \times 2^1, \quad 0.101 \times 2^1, \quad 0.110 \times 2^1, \quad 0.111 \times 2^1, \quad 0.100 \times 2^2,$$

   τα οποία είναι πέντε στο πλήθος.

3. (1 μον.) Βρείτε το πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού που παρεμβάλλεται στην $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ στα σημεία $x = -1, 0, 1$.

   Απάντηση: Γράφουμε το πολυώνυμο παρεμβολής στη μορφή $p(x) = a_0 + a_1(x + 1) + a_2(x + 1)x$. Από τις σχέσεις $p(1) = f(-1)$, $p(0) = f(0)$ και $p(1) = f(1)$ παίρνουμε $a_0 = 1$, $a_0 + a_1 = 1$ και $a_0 + 2a_1 + 2a_2 = 5$, οπότε το πολυώνυμο παρεμβολής είναι το $p(x) = 1 + 0 \cdot (x + 1) + 2(x + 1)x$ ή $p(x) = 1 + 2x + 2x^2$.

4. (1 μον.) Γνωρίζοντας ότι το κόστος του υπολογισμού της ανάλυσης LU ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι $\frac{n^3}{3} + n^2$, πως θα υπολογίζατε με τον οικονομικώτερο τρόπο την ποσότητα $\lambda = (A^{-1}b)^T c$, όπου $b, c \in \mathbb{R}^n$;

   Απάντηση: Αν θέσουμε $x = A^{-1}b$ έχουμε, ισοδύναμα $\lambda = x^T c$ το οποίο είναι απλά ένα εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Ο υπολογισμός του x είναι ισοδύναμος με την λύση του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ το οποίο απαιτεί, κατά προσέγγιση, $\frac{n^3}{3} + n^2$ για τον υπολογισμό της ανάλυσης LU και $2n^2$ πράξεις για τον υπολογισμό της λύσης (με οπισθοδρόμηση). Ο υπολογισμός του εσωτερικού γινομένου απαιτεί $2n$ επιπλέον πράξεις (πολλαπλασιασμούς/προσθέσεις).

5. (1.5 μον.) Βρείτε την ανάλυση LU του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

   Απάντηση: Με $L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχουμε $L_1 A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -3/2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (παρατηρήστε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το πρώτο βήμα της απαλοιφής Gauss). Θέτουμε τώρα $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ οπότε έχουμε

$L_2L_1A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (αυτό είναι ισοδύναμο με το δεύτερο βήμα της απαλοιφής Gauss). Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι $A = LU$ όπου

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = (L_2L_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (1.5 μον.) Τα πολυώνυμα $p(x) = 5x^3 - 27x^2 + 45x - 21$ και $q(x) = 3x^2 - 10x + 9$ παρεμβάλλονται στις τιμές

x	1	2	3
y	2	1	6

Γιατί αυτό το γεγονός δεν αντιβαίνει στην μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής;

Απάντηση: Αφού $p(x)$ και $q(x)$ συμφωνούν στα $x = 1, 2, 3$ και $\deg q(x) < \deg p(x)$ το $q(x)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής του $p(x)$ από τον χώρο των πολυωνύμων βαθμού το πολύ δύο. Δεν υπάρχει λοιπόν καμιά αντίφαση με την μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής.

7. (1 μον.) Υπολογίστε το μέγιστο απόλυτο σφάλμα κατά την παρεμβολή στα σημεία $x = 0$ και $x = \pi/2$ της συνάρτησης $f(x) = \sin x$ από ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ ένα.

Απάντηση: Έστω p πολυώνυμο παρεμβολής. Από το θεώρημα της παρεμβολής έχουμε αμέσως ότι

$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad \exists \xi \in (0, \pi/2) \qquad f(x) - p(x) = x(x - \frac{\pi}{2})\frac{f''(\xi)}{2}$$

Επιπλέον, $|f''(\xi)| = |-\sin \xi| \leq 1$ και στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ η συνάρτηση $|x(x-\frac{\pi}{2})| = x(\frac{\pi}{2} - x)$ λαμβάνει μέγιστο στο $x = \frac{\pi}{4}$ ίσο με $\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{16}$, άρα

$$\max_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - p(x)| \leq \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{32}.$$

8. (1 μον.) Βρείτε τα βάρη w_1, w_2, w_3 του κανόνα ολοκλήρωσης

$$\int_{-2}^{2} f(x)\, dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(0) + w_3 f(1)$$

έτσι ώστε να ολοκληρώνει ακριβώς πολυώνυμα όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού.

Απάντηση: Υπολογίζουμε το δεξί και το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης για $f(x) = 1, x, x^2$:

$$4 = \int_{-2}^{2} 1\, dx \approx w_1 + w_2 + w_3$$
$$0 = \int_{-2}^{2} x\, dx \approx -w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3$$
$$\frac{16}{3} = \int_{-2}^{2} x^2\, dx \approx w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3$$

Για να ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις ως ισότητες θα πρέπει $w_1 = w_3 = \frac{8}{3}$ και $w_2 = -\frac{4}{3}$. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$0 = \int_{-2}^{2} x^3\, dx = -w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3 = 0,$$

ενώ

$$\frac{64}{5} = \int_{-2}^{2} x^4\, dx \neq w_1 + 0 \cdot w_2 + w_3 = \frac{16}{3},$$

άρα ο δοσμένος κανόνας ολοκλήρωσης είναι ακριβής για πολυώνυμα βαθμού το πολύ τρία.

9. (2 μον.) Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = \ln x - x + 2 = 0$. Δείξτε ότι έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \in (0,1)$ και $\rho_2 \in (1,4)$. Αν (x_n) είναι η ακολουθία με $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$, όπου $\phi(x) = \frac{1}{2}(\ln x + x + 2)$, δείξτε χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συστολής ότι $x_n \to \rho_2$ για οποιαδήποτε αρχική τιμή $x_0 \in [2,4]$. Δίνεται $\ln 2 \approx 0.69$.

   Απάντηση: Μια και $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ βλέπουμε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,1)$ και γνήσια φθίνουσα στο $(1,\infty)$. Επιλέον έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} = -\infty$, $f(1) = 1 > 0$ και $\lim_{x\to\infty} = -\infty$. Από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής έχουμε αμέσως ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες $\rho_1 \in (0,1)$ και $\rho_2 \in (1,\infty)$. Μια και $f(4) = \ln 4 - 2 < 0$, έχουμε στην πραγματικότητα $\rho_2 \in (1,4)$.

   Για την $\phi(x) = \frac{1}{2}(\ln x + x + 2)$ έχουμε κατ' αρχήν $\phi(2) = \frac{\ln 2 + 4}{2} \approx 2.345 > 2$ και $\phi(4) = \frac{\ln 4 + 6}{2} \approx 3.69 < 4$. Επιπλέον, $\phi'(x) = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{x})$ άρα $\frac{5}{8} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}) \le \phi'(x) \le \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$, δηλαδή $\max_{x\in[2,4]} |\phi'(x)| < 1$. Αυτές οι σχέσεις δείχνουν ότι η $\phi(x)$ είναι συστολή στο $[2,4]$.

   Από το θεώρημα της συστολής έχουμε ότι η ακολουθία $x_{n+1} = \phi(x_n)$, $n = 0,1,2,\ldots$ συγκλίνει στο μοναδικό σταθερό σημείο x^* της $\phi(x)$ στο διάστημα $[2,4]$, για οποιαδήποτε $x_0 \in [2,4]$. Ας βρούμε λοιπόν ποιό είναι αυτό το σταθερό σημείο:

   $$\phi(x^*) = x^* \iff \frac{1}{2}(\ln x^* + x^* + 2) = x^* \iff \ln x^* - x^* + 2 = 0,$$

   δηλαδή το σταθερό σημείο της $\phi(x)$ στο $[2,4]$ είναι η ρίζα της $f(x) = 0$ στο $[2,4]$, δηλαδή η ρ_2.

10. (1 μον.) Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 1 & \epsilon \end{pmatrix}$ όπου ϵ μικρή θετική σταθερά. Υπολογίστε τον δείκτη κατάστασης του πίνακα A, δηλαδή την ποσότητα $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Τι γίνεται όταν $\epsilon \to 0$; Υπενθυμίζουμε ότι $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

    Απάντηση: Έχουμε αμέσως $\|A\|_\infty = 1 + \epsilon$ και $A^{-1} = \frac{1}{\epsilon^2}\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}$ οπότε $\|A^{-1}\|_\infty = \frac{1+\epsilon}{\epsilon^2}$. Αυτό μας δίνει $\kappa_\infty(A) = \frac{(1+\epsilon)^2}{\epsilon^2} = (1 + \frac{1}{\epsilon})^2$ η οποία ποσότητα πηγαίνει στο $+\infty$ όταν $\epsilon \to 0$.