1. Ποιές από τις συναρτήσεις $f(x) = |x|/2$, $g(x) = 1/(3+x)$, $h(x) = x^3 + 2x - 1$ και $j(x) = e^{-x}/18$ έχουν την ιδιότητα της συστολής στο διάστημα $[-1, 1]$;

   Απάντηση. Για $x, y \in [-1, 1]$ έχουμε $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}||x| - |y|| \le \frac{1}{2}|x - y|$, άρα η $f(x)$ έχει την ιδιότητα της συστολής στο $[-1, 1]$.
   Εύκολα βλέπουμε ότι $|g(x) - g(y)| = \frac{1}{(3+x)(3+y)}|x - y| \le \frac{1}{4}|x - y|$, άρα και η $g(x)$ έχει την ιδιότητα της συστολής στο διάστημα $[-1, 1]$.
   Έχουμε $\max_{-1 \le x \le 1} |h'(x)| = \max_{-1 \le x \le 1} |3x^2 + 2| = 5$, άρα η μικρότερη σταθερά για την οποία η $h(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz είναι η $L = 5$. Προφανώς, η $h(x)$ δεν έχει την ιδιότητα της συστολής στο $[-1, 1]$.
   Τέλος, $\max_{-1 \le x \le 1} |j'(x)| = \frac{e}{18}$, άρα η $j(x)$ έχει την ιδιότητα της συστολής στο $[-1, 1]$.

2. Ποιές από τις συναρτήσεις $f(x) = x^4 + x/2 + 1$, $g(x) = |x|/3$, $h(x) = 1/(4+x)$, και $j(x) = e^{-2x}/18$ έχουν την ιδιότητα της συστολής στο διάστημα $[-1, 1]$;

   Απάντηση. Έχουμε $\max_{-1 \le x \le 1} |f'(x)| = \max_{-1 \le x \le 1} |4x^3 + \frac{1}{2}| = \frac{9}{2}$, άρα η μικρότερη σταθερά για την οποία η $f(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz είναι η $L = \frac{9}{2}$. Προφανώς, η $f(x)$ δεν έχει την ιδιότητα της συστολής στο $[-1, 1]$.
   Για $x, y \in [-1, 1]$ έχουμε $|g(x) - g(y)| = \frac{1}{3}||x| - |y|| \le \frac{1}{3}|x - y|$, άρα η $g(x)$ έχει την ιδιότητα της συστολής στο $[-1, 1]$.
   Εύκολα βλέπουμε ότι $|h(x) - h(y)| = \frac{1}{(4+x)(4+y)}|x - y| \le \frac{1}{9}|x - y|$, άρα και η $h(x)$ έχει την ιδιότητα της συστολής στο διάστημα $[-1, 1]$.
   Τέλος, $\max_{-1 \le x \le 1} |j'(x)| = \frac{e}{9}$, άρα η $j(x)$ έχει την ιδιότητα της συστολής στο $[-1, 1]$.

3. Ποιά είναι η ανάλυση LU του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Απάντηση. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Ποιά είναι η ανάλυση LU του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Απάντηση. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ 1/8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/8 \end{pmatrix}$$

5. Η εξίσωση $f(x) = x^3 - 7x + 2 = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $[0, 1]$. Για $x_0 \in [0, 1]$ θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)$, $n \geq 0$. Αποδείξτε ότι συγκλίνει στη ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $[0, 1]$.

   Απάντηση. 'Εστω $\phi(x) = \frac{1}{7}(x^3 + 2)$, $x \in [0, 1]$. Προφανώς η $\phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση και επιπλέον, $\phi'(x) = \frac{3}{7}x^2 \geq 0$. Επομένως, $\phi([0, 1]) = [\phi(0), \phi(1)] = [\frac{2}{7}, \frac{3}{7}] \subseteq [0, 1]$ και η $\phi(x)$ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο x^* στο διάστημα $[0, 1]$. Όμως, $\max_{0 \leq x \leq 1} |\phi'(x)| = \frac{3}{7} < 1$, άρα η $\phi(x)$ είναι συστολή και επομένως υπάρχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο. Το σταθερό σημείο x^* εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

6. Βρείτε τις δύο πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος του Newton για την προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^3 - x + 1 = 0$ με αρχική εκτίμηση $x_0 = 1$.

   Απάντηση. Η μέθοδος του Newton είναι $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$, με x_0 δεδομένο. Στην περίπτωσή μας έχουμε $f(x) = x^3 - x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 1$ και $x_0 = 1$, οπότε $x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5/8}{-1/4} = 3$.

7. Βρείτε τις δύο πρώτες προσεγγίσεις που παράγει η μέθοδος του Newton για την προσέγγιση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x = 6$ με αρχική εκτίμηση $x_0 = 2$.

   Απάντηση. Η μέθοδος του Newton είναι $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \geq 0$, με x_0 δεδομένο. Στην περίπτωσή μας έχουμε $f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 6$, $f'(x) = 3x^2 + 4x + 10$ και $x_0 = 2$, οπότε $x_1 = 2 - \frac{30}{30} = 1$ και $x_2 = 1 - \frac{7}{17} = \frac{10}{17}$.

8. Έστω A ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας. Είναι η απεικόνιση $\| \cdot \|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\|x\|_A = \|Ax\|_2$ νόρμα;

   Απάντηση. Κατ' αρχήν $\|x\|_A = 0$ αν και μόνο αν $\|Ax\|_2 = 0$. Αλλά $\| \cdot \|_2$ είναι νόρμα οπότε πρέπει $Ax = 0$. Επειδή A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, έχουμε $x = 0$. Ακόμα, αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε $\|\lambda x\|_A = \|\lambda Ax\|_2 = |\lambda| \|Ax\|_2 = |\lambda| \|x\|_A$. Τέλος, $\|x + y\|_A = \|A(x + y)\|_2 = \|Ax + Ay\|_2 \leq \|Ax\|_2 + \|Ay\|_2 = \|x\|_A + \|y\|_A$.

9. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει την ανάλυση LU ενός $n \times n$ πίνακα A και ότι ο πίνακας B είναι κάτω τριγωνικός με θετικά διαγώνια στοιχεία. Ποιός είναι ο πιο οικονομικός τρόπος για να υπολογίσουμε το διάνυσμα $A^{-2}Bb$, όπου b είναι ένα διάνυσμα μήκους n;

   Απάντηση. Ο πιο οικονομικός τρόπος για τον υπολογισμό του διανύσματος $A^{-2}Bb$ είναι ο εξής: λύνουμε το σύστημα $Ay = Bb$ και στη συνέχεια το $Ax = y$. Παρατηρήστε ότι $x = A^{-1}y = A^{-1}A^{-1}Bb = A^{-2}Bb$. Το συνολικό κόστος είναι, η ανάλυση LU (μία φορά!), ο υπολογισμός του διανύσματος Bb και η οπισθοδρόμηση (δύο φορές) για τον υπολογισμό των x και y.

10. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε υπολογίσει την ανάλυση LU ενός $n \times n$ πίνακα A και ότι ο πίνακας B είναι άνω τριγωνικός με θετικά διαγώνια στοιχεία. Ποιός είναι ο πιο οικονομικός τρόπος για να υπολογίσουμε το διάνυσμα $BA^{-2}b$, όπου b είναι ένα διάνυσμα μήκους n;

    Απάντηση. Ο πιο οικονομικός τρόπος για τον υπολογισμό του διανύσματος $BA^{-2}b$ είναι ο εξής: λύνουμε το σύστημα $Ay = b$ και στη συνέχεια το $Ax = y$. Τότε $Bx = BA^{-1}y = BA^{-1}A^{-1}b = BA^{-2}b$. Το συνολικό κόστος είναι, η ανάλυση LU (μία φορά!), η οπισθοδρόμηση (δύο φορές) για τον υπολογισμό των x και y και ο υπολογισμός του διανύσματος Bx.

11. Αποδείξτε ότι η $f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6 = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα. Βρείτε ένα διάστημα μήκους ένα το οποίο περιέχει τη ρίζα. Πόσες επαναλήψεις θα χρειαζόταν η μέθοδος της διχοτόμησης για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 10^{-6};

    Απάντηση. Έχουμε $f(0) = -6 < 0$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Επιπλέον, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 13 = 3(x - 2)^2 + 1 \geq 1$, άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα. Ακόμα, $f(1) = 2 > 0$, άρα η μοναδική θετική ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$. Η μέθοδος της διχοτόμησης θα χρειαστεί n επαναλήψεις, όπου$\frac{1}{2^n} < 10^{-6}$, ή, ισοδύναμα, $2^n > 10^6$, δηλαδή $n > 6/\log_{10} 2$ για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 10^{-6}.

12. Αποδείξτε ότι η $f(x) = x - e^{-x} = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα. Βρείτε ένα διάστημα μήκους ένα το οποίο περιέχει τη ρίζα. Πόσες επαναλήψεις θα χρειαζόταν η μέθοδος της διχοτόμησης για την

προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 10^{-6};

Απάντηση. Έχουμε $f(0) = -1 < 0$ και $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Επιπλέον, $f'(x) = 1 + e^{-x} \geq 1$, άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική θετική ρίζα. Ακόμα, $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$, άρα η μοναδική θετική ρίζα βρίσκεται στο διάστημα $[0, 1]$. Η μέθοδος της διχοτόμησης θα χρειαστεί n επαναλήψεις, όπου $\frac{1}{2^n} < 10^{-6}$, ή, ισοδύναμα, $2^n > 10^6$, δηλαδή $n > 6/\log_{10} 2$ για την προσέγγιση της ρίζας με ακρίβεια 10^{-6}.

13. Η εξίσωση $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$. Για $x_0 = 1.5$ θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_{n+1} = g_i(x_n)$, $n \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, όπου $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$, $g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$ και $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4+x}}$. Ποιά από τις g_i θα χρησιμοποιούσατε για να υπολογίσετε τη ρίζα της $f(x) = 0$;

    Απάντηση. Η $g_1(x)$ δεν απεικονίζει το διάστημα $[1, 2]$ στον ευατό του αλλά ούτε είναι συστολή στο συγκεκριμένο διάστημα αφού $\max_{1\leq x\leq 2} |g_1'(x)| = \max_{1\leq x\leq 2} |1 - 8x - 3x^2| = 27 > 1$. Η συνάρτηση $g_2(x)$ δεν ορίζεται στο διάστημα $(\sqrt{5/2}, 2]$ επομένως δεν μπορεί να επιλεχθεί ως συνάρτηση επανάληψης. Για την $g_3(x)$ έχουμε $g_3'(x) = -\frac{3}{4}\frac{x^2}{\sqrt{10-x^3}} < 0$ για $x \in [1, 2]$, οπότε $g_3([1, 2]) = [g_3(2), g_3(1)] = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}] \subseteq [1, 2]$. Όμως, $\max_{1\leq x\leq 2} |g_3'(x)| \geq |g_3'(2)| = \frac{3}{\sqrt{2}} > 1$ άρα η $g_3(x)$ δεν είναι συστολή στο $[1, 2]$. Τέλος, για τη συνάρτηση $g_4(x)$ έχουμε $g_4'(x) = -\frac{\sqrt{10}}{2}(4 + x)^{-3/2} < 0$, επομένως $g_4([1, 2]) = [g_4(2), g_4(1)] = [\sqrt{5/3}, \sqrt{2}] \subseteq [1, 2]$. Επιπλέον, $\max_{1\leq x\leq 2} |g_4'(x)| = \frac{1}{\sqrt{50}} < 1$, άρα η $g_4(x)$ είναι συστολή. Η μόνη επιλογή, λοιπόν, είναι η $g_4(x)$.