1. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Οι έννοιες των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων (ιδιοσυναρτήσεων) ορίζονται για γραμμικές απεικονίσεις σε έναν γραμμικό χώρο X. Οι έννοιες αυτές είναι βασικές και έχουν πολλές εφαρμογές. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε αυτές τις έννοιες για τετραγωνικούς πίνακες, ουσιαστικά δηλαδή για γραμμικές απεικονίσεις σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Θα μας απασχολήσει επίσης το θέμα της διαγωνιοποίησης πινάκων, το οποίο, όπως θα δούμε, συνδέεται στενά με τις προαναφερθείσες έννοιες. Με αριθμητικές μεθόδους προσέγγισης ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

1.1 Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων

Σε αυτήν την ενότητα θα εισαγάγουμε τις έννοιες των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικών πινάκων. Επίσης θα ορίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, την ομοιότητα πινάκων, τη γεωμετρική και αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής ενός πίνακα, καθώς και τη φασματική ακτίνα πίνακα.

Ορισμός 1.1 (Ιδιοτιμή και ιδιοδιάνυσμα.) Έστω A ένας τετραγωνικός, $n \times n$, πίνακας με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Ένας μιγαδικός αριθμός λ λέγεται *ιδιοτιμή* (*eigenvalue*) του A, αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα x του $\mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $Ax = \lambda x$. Ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, για το οποίο ισχύει $Ax = \lambda x$, λέγεται *ιδιοδιάνυσμα* (*eigenvector*) του A ως προς την ιδιοτιμή λ.

Σημείωση. Ένας πραγματικός, $n \times n$ πίνακας A, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, μπορεί φυσικά να θεωρηθεί και ως στοιχείο του $\mathbb{C}^{n,n}$, συνεπώς είναι δυνατόν να υπάρχουν και μιγαδικές

ιδιοτιμές και μιγαδικά ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού πίνακα. Πραγματικά ιδιοδιανύσματα ενός πραγματικού πίνακα αντιστοιχούν σε πραγματικές ιδιοτιμές.

Όταν το x είναι ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, τότε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού Ax (της "δράσης" του A στο x) είναι το ίδιο με αυτό της απλούστατης διαδικασίας του πολλαπλασιασμού ενός αριθμού με το x, ενώ γενικά ο υπολογισμός του γινομένου Ax είναι μια σχετικά πολύπλοκη διαδικασία, στην περίπτωση μεγάλου n απαιτεί αρκετές πράξεις.

Αν x είναι ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα A, που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή λ, τότε, προφανώς, και κάθε μη μηδενικό πολλαπλάσιό του είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα ως προς την ίδια ιδιοτιμή. Γενικότερα, αν $x^1, \ldots, x^m$ είναι ιδιοδιανύσματα του A, που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή λ, τότε και κάθε μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός των $x^1, \ldots, x^m$ είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα ως προς την ίδια ιδιοτιμή. Αν λοιπόν εφαρμόσουμε τον A σε έναν γραμμικό συνδυασμό των $x^1, \ldots, x^m$, το αποτέλεσμα είναι πάλι γραμμικός συνδυασμός των $x^1, \ldots, x^m$. Γι' αυτό λέμε ότι ο πίνακας A (ακριβέστερα η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση), αφήνει τον χώρο $< x^1 \ldots, x^m >$ που παράγουν τα $x^1, \ldots, x^m$ (δηλαδή το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $x^1, \ldots, x^m$) αναλλοίωτο.

Στο αποτέλεσμα που ακολουθεί, θα δούμε ότι ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν σε ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Λήμμα 1.1 (Γραμμική ανεξαρτησία ιδιοδιανυσμάτων ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές.) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας (τετραγωνικός) πίνακας, και $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{C}^n$ ιδιοδιανύσματα του A ως προς ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Τότε τα $x^1, \ldots, x^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί επαγωγικά ως προς m. Για $m = 1$ ο ισχυρισμός αληθεύει, προφανώς, αφού το x^1, ως μη μηδενικό διάνυσμα, είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m - 1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για m. Έστω ότι $\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_m x^m = 0$. Τότε θα έχουμε αφ' ενός

$$0 = \lambda_m \cdot 0 = \lambda_m \alpha_1 x^1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m x^m$$

και αφ' ετέρου

$$0 = A0 = \alpha_1 A x^1 + \cdots + \alpha_m A x^m = \lambda_1 \alpha_1 x^1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m x^m.$$

Επομένως

$$0 = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)x^1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})x^{m-1}. \tag{1.1}$$

Από αυτή τη σχέση έπεται αμέσως, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x^1, \ldots,$ x^{m-1} και του γεγονότος ότι το λ_m είναι διαφορετικό των $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$, ότι $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$. Επομένως, η σχέση $\alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_m x^m = 0$ γράφεται στη μορφή $\alpha_m x^m = 0$ και μας δίνει $\alpha_m = 0$. Συνεπώς, τα $x^1, \ldots, x^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

Θα δούμε τώρα μερικές απλές ιδιότητες ιδιοδιανυσμάτων.

Λήμμα 1.2 (Ιδιότητες ιδιοχώρων.) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας (τετραγωνικός) πίνακας, και, για $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$ ο ιδιόχωρος του A ως προς λ. Τότε ισχύουν:*

i. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, ο $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{C}^n$.

ii. Ένα $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A ακριβώς τότε, αν ο $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda)$ δεν περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda) \neq \{0\}$.

iii. $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda) \setminus \{0\}$ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς λ.

iv. Ο $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda)$ είναι ο πυρήνας του πίνακα $A - \lambda I_n$, δηλαδή το σύνολο των λύσεων x του γραμμικού συστήματος $(A - \lambda I_n)x = 0$, όπου I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας.

v. Για δύο διαφορετικά λ_1, λ_2, η τομή των $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda_1)$ και $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda_2)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, $\text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda_1) \cap \text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda_2) = \{0\}$.

Απόδειξη. Τα $i.$, $ii.$, $iii.$, και $iv.$ είναι προφανή. Το $v.$ έπεται ουσιαστικά από το Λήμμα 1.1. Για να το αποδείξουμε, υποθέτουμε ότι $x \in \text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda_1) \cap \text{ΙΔΧ}\,(A, \lambda_2)$. Τότε θα έχουμε $Ax = \lambda_1 x$ και $Ax = \lambda_2 x$, συνεπώς $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, οπότε $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, και επομένως, λόγω του ότι $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $x = 0$. □

Στη συνέχεια δίνουμε ένα αλγεβρικό κριτήριο για τις ιδιοτιμές ενός πίνακα. Σύμφωνα με αυτό οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα είναι ρίζες ενός πολυωνύμου.

Πρόταση 1.1 (Χαρακτηρισμός ιδιοτιμών.) *Έστω A ένας μιγαδικός, $n \times n$ πίνακας. Ένας μιγαδικός αριθμός λ είναι ακριβώς τότε ιδιοτιμή του A, αν $\det(A - \lambda I_n) = 0$.*

Απόδειξη. Το λ είναι ιδιοτιμή του A, αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα $Ax = \lambda x$, ή ισοδύναμα το $(A - \lambda I_n)x = 0$, έχει μη μηδενική λύση. Αυτό όμως, κατά τα γνωστά, συμβαίνει ακριβώς τότε, αν ο πίνακας $A - \lambda I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή αν η ορίζουσά του μηδενίζεται, $\det(A - \lambda I_n) = 0$. □

Ορισμός 1.2 (Χαρακτηριστικό πολυώνυμο.) Έστω A ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Το πολυώνυμο $p, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, λέγεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A.

Εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς επαγωγικά, ότι ο βαθμός του πολυωνύμου $p, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, είναι n. Επομένως, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, κάθε $n \times n$ μιγαδικός πίνακας έχει, μετρώντας και την πολλαπλότητά τους, n ιδιοτιμές.

Ορισμός 1.3 (Όμοιοι πίνακες.) Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγονται *όμοιοι*, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $A = SBS^{-1}$.

Θεωρούμε μια γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{C}^n$ στον εαυτό του. Έστω A ο πίνακας που αντιστοιχεί σε αυτήν ως προς μια βάση του $\mathbb{C}^n$ και B ο αντίστοιχος πίνακας ως προς μια άλλη βάση του $\mathbb{C}^n$. Είναι γνωστό ότι οι πίνακες A και B είναι τότε όμοιοι.

Θα δούμε τώρα ότι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές· σύμφωνα με όσα αναφέραμε μόλις προηγουμένως, αυτό είναι αναμενόμενο, αφού πρόκειται για τις ιδιοτιμές της ίδιας απεικόνισης.

Πρόταση 1.2 (Ιδιοτιμές όμοιων πινάκων.) *Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ δύο όμοιοι πίνακες. Τότε οι A και B έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.*

Απόδειξη. Έστω $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ αντιστρέψιμος πίνακας τέτοιος ώστε $A = SBS^{-1}$. Έστω τώρα λ ιδιοτιμή του A. Τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$, έστω $x^\star$, τέτοιο ώστε $Ax^\star = \lambda x^\star$. Επομένως, θα έχουμε, $(SBS^{-1})x^\star = \lambda x^\star$, οπότε $S^{-1}(SBS^{-1})x^\star = \lambda S^{-1}x^\star$, δηλαδή $B(S^{-1}x^\star) = \lambda(S^{-1}x^\star)$. Αφού ο S^{-1} είναι αντιστρέψιμος και το $x^\star$ μη μηδενικό, και το $S^{-1}x^\star$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$. Επομένως, από την

τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του B. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύουμε ότι και κάθε ιδιοτιμή του B είναι και ιδιοτιμή του A. $\square$

Σημείωση. Εναλλακτικά, η Πρόταση 1.2 μπορεί να αποδειχθεί και ως εξής: Αν p και q είναι τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των A και B, τότε, χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες οριζουσών, έχουμε

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(SBS^{-1} - \lambda I_n) = \det\left(S(B - \lambda I_n)S^{-1}\right) \\ &= \det S \cdot \det(B - \lambda I_n) \cdot \det(S^{-1}) = \det(B - \lambda I_n) = q(\lambda). \end{aligned}$$

Επομένως οι πίνακες A και B έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, συνεπώς και τις ίδιες ιδιοτιμές.

Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A, τότε τα ιδιοδιανύσματα του A ως προς την ιδιοτιμή λ είναι οι μη τετριμμένες λύσεις του ομογενούς γραμμικού συστήματος $(A - \lambda I_n)x = 0$.

Για

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

έχουμε

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 1.1 Θα προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε, αναπτύσσοντας ως προς την τελευταία στήλη,

$$\det(A-\lambda I_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & -1-\lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - (1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix},$$

επομένως

$$\det(A-\lambda I_3) = -(1+\lambda) - (1+\lambda)(\lambda^2-1+1) = -(1+\lambda)(\lambda^2+1).$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \mathrm{i}, \lambda_3 = -\mathrm{i}$. Για να προσδιορίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, αρκεί να λύσουμε τα ομογενή γραμμικά συστήματα $(A - \lambda_j I_3)x = 0,\ j = 1, 2, 3.$ □

Σημείωση. Αν στο προηγούμενο παράδειγμα, ο πίνακας A θεωρηθεί ως απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ στον εαυτό του, τότε η μόνη ιδιοτιμή είναι το λ_1.

Ορισμός 1.4 (Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμών.) Έστω λ_k ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, και $p, p(\lambda) := \det(A - \lambda I_n)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. *Αλγεβρική πολλαπλότητα* της ιδιοτιμής λ_k λέγεται η πολλαπλότητα του λ_k ως ρίζας του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A. Δηλαδή, η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_k είναι ο φυσικός αριθμός μ_k, για τον οποίο ισχύει $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{\mu_k} q(\lambda)$, με q ένα πολυώνυμο βαθμού $n - \mu_k$ το οποίο δεν μηδενίζεται στο λ_k. Η *γεωμετρική πολλαπλότητα* $\rho_k, \rho_k := \dim \mathrm{IΔX}\,(A, \lambda_k) = \dim\{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda_k x\}$, είναι το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A ως προς λ_k.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα δεν υπερβαίνει την αλγεβρική πολλαπλότητα.

Πρόταση 1.3 (Η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι το πολύ όσο η αλγεβρική.) *Έστω λ' ιδιοτιμή ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\mu(\lambda')$ και γεωμετρική πολλαπλότητα $\rho(\lambda')$. Τότε ισχύει $1 \le \rho(\lambda') \le \mu(\lambda') \le n$.*

Απόδειξη. Η πρώτη και η τελευταία ανισότητα είναι προφανείς. Αρκεί συνεπώς να αποδείξουμε ότι $\rho(\lambda') \leq \mu(\lambda')$. Θέτουμε $\rho := \rho(\lambda')$ και $\mu := \mu(\lambda')$. Έστω $x^1, \ldots, x^\rho \in \mathbb{C}^n$ γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A ως προς λ', δηλαδή $Ax^i = \lambda' x^i,\ i = 1, \ldots, \rho$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις, $\rho = n$ και $\rho < n$. Στην πρώτη περίπτωση δεν υπάρχει άλλη ιδιοτιμή, γιατί διαφορετικά το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα θα ήταν γραμμικώς ανεξάρτητο προς όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των $x^1, \ldots, x^n$, βλ. το Λήμμα 1.1. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση, θα έχουμε επίσης $\mu = n$. Στη δεύτερη περίπτωση, $\rho < n$, κατά τα γνωστά, υπάρχουν $x^{\rho+1}, \ldots, x^n \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $\{x^1, \ldots, x^n\}$ να είναι βάση του $\mathbb{C}^n$. Έστω S ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $x^1, \ldots, x^n$, $S := (x^1, \ldots, x^n)$. Αφού τα $x^1, \ldots, x^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ο S είναι αντιστρέψιμος. Τώρα έχουμε $Se^i = x^i,\ i = 1, \ldots, \rho$, άρα και $e^i = S^{-1}x^i,\ i = 1, \ldots, \rho$, επομένως

$$S^{-1}ASe^i = S^{-1}Ax^i = S^{-1}(\lambda' x^i) = \lambda' S^{-1}x^i = \lambda' e^i.$$

Συνεπώς, ο πίνακας $S^{-1}AS$ είναι της μορφής

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda' & & 0 & \star & \star & \ldots & \star \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda' & \star & \star & \ldots & \star \\ & & & \star & \star & \ldots & \star \\ & 0 & & \star & \star & \ldots & \star \\ & & & \star & \star & \ldots & \star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' I_\rho & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Επομένως, για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ισχύει

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det S^{-1} \det(A - \lambda I_n) \det S \\ &= \det(S^{-1}AS - \lambda I_n) = (\lambda' - \lambda)^\rho \det(C - \lambda I_{n-\rho}), \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\det S^{-1} = 1/\det S$, συνεπώς $\rho \leq \mu$. □

Παράδειγμα 1.2 Η μόνη ιδιοτιμή του πίνακα A,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

είναι το 2, με αλγεβρική πολλαπλότητα τέσσερα, $\mu(2) = 4$. Το σύστημα $(A - 2I_4)x = 0$ έχει χώρο λύσεων $< (\alpha, 0, 0, 0) >$, με α πραγματικόν αριθμό. Συνεπώς η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι ένα, $\rho(2) = 1$. □

Σημείωση. Ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών ενός $n \times n$ πίνακα είναι, γενικά, ένα πολύπλοκο υπολογιστικά πρόβλημα, ιδιαίτερα για μεγάλο n. Ένας χονδρικός εντοπισμός τους, όμως, μπορεί να γίνει με την ανισότητα του Gerschgorin· βλ. Άσκηση 1.15.

Θα ορίσουμε τώρα τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα. Όπως θα δούμε αυτή ορίζεται συναρτήσει των ιδιοτιμών και οφείλει την ονομασία της στο γεγονός ότι το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα αναφέρεται συχνά και ως *φάσμα* του πίνακα. Η φασματική ακτίνα, η ακτίνα του μικρότερου κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων στο μιγαδικό επίπεδο που περιέχει όλες τις ιδιοτιμές, παίζει σημαντικό ρόλο στις εφαρμογές, ιδιαίτερα στη μελέτη σύγκλισης επαναληπτικών μεθόδων για την αριθμητική επίλυση γραμμικών συστημάτων.

Ορισμός 1.5 (Φασματική ακτίνα πίνακα.) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του. Το μέγιστο των απολύτων τιμών των ιδιοτιμών $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (και όχι η μέγιστη κατ' απόλυτο τιμή ιδιοτιμή!) λέγεται *φασματική ακτίνα* του πίνακα A και συμβολίζεται συνήθως με $\rho(A)$,

$$\rho(A) := \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|.$$

1.2 Διαγωνιοποίηση πινάκων

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη διαγωνιοποίηση πινάκων, θα γνωρίσουμε διάφορες συνθήκες για να είναι ένας πίνακας διαγωνιοποιήσιμος και θα αναφερθούμε στο λεγόμενο ελάχιστο πολυώνυμο ενός τετραγωνικού πίνακα. Επίσης θα μελετήσουμε δύο συναφή με τη διαγωνιοποίηση θέματα, τις κανονικές μορφές του Schur και του Jordan ενός πίνακα, καθώς και το πηλίκο του Rayleigh για συμμετρικούς πίνακες και το ελάχιστο πολυώνυμο πινάκων.

Όπως θα δούμε σε αυτήν την ενότητα, κάθε τετραγωνικός πίνακας A είναι όμοιος (και μάλιστα ορθομοναδιαία όμοιος) με έναν άνω τριγωνικό πίνακα T, βλ. Θεώρημα 1.3. Αν έχουμε στη διάθεσή μας έναν τέτοιο μετασχηματισμό ομοιότητας, τότε

μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές του A (είναι απλούστατα τα διαγώνια στοιχεία του T) καθώς και τα ιδιοδιανύσματά του. Αν επιτρέψουμε τυχαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας, τότε ο A είναι όμοιος με έναν διδιαγώνιο άνω τριγωνικό πίνακα J, βλ. Θεώρημα 1.4. Σε ορισμένες περιπτώσεις ο πίνακας J είναι διαγώνιος, βλ. Θεώρημα 1.1· αυτό ισχύει ιδιαίτερα για συμμετρικούς πίνακες, βλ. Θεώρημα 1.2.

Ένας πίνακα $D = (d_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται *διαγώνιος*, αν ισχύει $d_{ij} = 0$ για $i \neq j$, δηλαδή αν μπορεί να έχει μη μηδενικά στοιχεία μόνο στη διαγώνιό του. Αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του D, τότε συχνά γράφουμε $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Ορισμός 1.6 (Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες.) Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται *διαγωνιοποιήσιμος*, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $S^{-1}AS$ να είναι διαγώνιος, $S^{-1}AS = D$ με D διαγώνιο πίνακα.

Στην περίπτωση διαγώνιου πίνακα D, το γινόμενο Dx είναι απλούστατα $(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)^T$. Αν λοιπόν ένας πίνακας A μιας γραμμικής απεικόνισης είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε ως προς κατάλληλη βάση η εικόνα ενός διανύσματος μέσω της απεικόνισης είναι απλούστατο να προσδιορισθεί. Επίσης, προφανώς, αν ένας πίνακας A είναι όμοιος με τον D, τότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Ένα κριτήριο, για το πότε ένας πίνακας είναι διαγωνιοποιήσιμος, δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1 (Χαρακτηρισμός διαγωνιοποιήσιμων πινάκων.) *Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ακριβώς τότε διαγωνιοποιήσιμος, αν υπάρχει ένα σύνολο ιδιοδιανυσμάτων του A, τα οποία αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$.*

Απόδειξη. Έστω κατ' αρχάς ότι ο $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος. Τότε υπάρχει πίνακας $S \in \mathbb{C}^{n,n}$, $S = (s^1, \ldots, s^n)$, τέτοιος ώστε

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Επομένως θα έχουμε $AS = S \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1 s^1, \ldots, \lambda_n s^n)$, οπότε $As^i = \lambda_i s^i$, $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή τα $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι ιδιοτιμές του A, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $s^1, \ldots, s^n$. Τώρα, αφού ο S είναι αντιστρέψιμος, τα $s^1, \ldots, s^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επομένως αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$.

Αντίστροφα τώρα, αν $x^1, \ldots, x^n$ ιδιοδιανύσματα του A, ως προς $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, που αποτελούν βάση του $\mathbb{C}^n$, τότε ο πίνακας $S := (x^1, \ldots, x^n)$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $AS = (Ax^1, \ldots, Ax^n) = (\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_n x^n) = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, άρα $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, δηλαδή ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. □

Άμεση απόρροια του Θεωρήματος 1.1 και του Λήμματος 1.1 είναι το γεγονός ότι ένας $n \times n$ πίνακας με ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Πρόταση 1.4 (Πίνακες με διαφορετικές ιδιοτιμές είναι διαγωνιοποιήσιμοι.) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας με ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $x^1, \ldots, x^n$ ιδιοδιανύσματα του A ως προς τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 τα $x^1, \ldots, x^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε το αποτέλεσμα έπεται από το Θεώρημα 1.1. □

Θα εισαγάγουμε τώρα ορισμένες κατηγορίες πινάκων που εμφανίζονται συχνά στις εφαρμογές.

Ορισμός 1.7 (Ερμητιανοί, συμμετρικοί, αντισυμμετρικοί, ορθογώνιοι και ορθομοναδιαίοι πίνακες.) Ένας πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ λέγεται

i. *Ερμητιανός* (*Hermitian*), αν $A^\star = A$, όπου $A^\star := \bar{A}^T$,

ii. *συμμετρικός* (*symmetric*), αν είναι πραγματικός και συμπίπτει με τον ανάστροφό του, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $A^T = A$,

iii. *αντισυμμετρικός* (*antisymmetric*), αν είναι πραγματικός και συμπίπτει με τον αντίθετο του αναστρόφου του, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $-A^T = A$,

iv. *ορθογώνιος* (*orthogonal*), αν είναι πραγματικός και ο ανάστροφός του είναι αντίστροφός του, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ και $A^T A = I_n$,

v. *ορθομοναδιαίος* (*unitary*), αν $A^\star A = I_n$. (Η έννοια αυτή είναι η αντίστοιχη του ορθογώνιου πραγματικού πίνακα· στην περίπτωση πραγματικών πινάκων οι δύο έννοιες ταυτίζονται.)

Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με $(\cdot,\cdot)$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$,

$$(x,y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n,$$

όπου $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ και $y = (y_1,\ldots,y_n)^T$. Επίσης, συμβολίζουμε με $\|\cdot\|$ την Ευκλείδεια νόρμα (ή στάθμη) στον $\mathbb{C}^n$, $\|x\| := (x,x)^{1/2}$.

Σημείωση. Κάθε συμμετρικός πίνακας είναι, προφανώς, και Ερμητιανός. Για έναν ορθογώνιο πίνακα $A, A = (a^1,\ldots,a^n)$ ισχύει $(a^i,a^j) = \delta_{ij}$, $i,j = 1,\ldots,n$, ιδιαίτερα οι στήλες του είναι ορθογώνιες μεταξύ των, γεγονός στο οποίο αυτοί οι πίνακες οφείλουν την ονομασία τους.

Πρόταση 1.5 (Ερμητιανοί πίνακες έχουν πραγματικές ιδιοτιμές.) *Αν $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ένας Ερμητιανός πίνακας, τότε οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.*

Απόδειξη. Έστω λ μια ιδιοτιμή του A και $x \in \mathbb{C}^n$ ένα ιδιοδιάνυσμα του A ως προς λ, δηλαδή $x \neq 0$ και $Ax = \lambda x$. Τότε θα ισχύει και $\overline{Ax} = \overline{\lambda x}$, άρα $\bar{A}\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$. Επομένως $(\bar{A}\bar{x})^T = (\bar{\lambda}\bar{x})^T$, οπότε $\bar{x}^T\bar{A}^T = \bar{\lambda}\bar{x}^T$. Συνεπώς έχουμε $\bar{x}^T\bar{A}^Tx = \bar{\lambda}\bar{x}^Tx$ ή $\bar{x}^TAx = \bar{\lambda}\bar{x}^Tx$ ή $\bar{x}^T(\lambda x) = \bar{\lambda}\bar{x}^Tx$, άρα $(\lambda - \bar{\lambda})\bar{x}^Tx = 0$. Τώρα, $\bar{x}^Tx \neq 0$, αφού $x \neq 0$, οπότε $\lambda - \bar{\lambda} = 0$, δηλαδή ο λ είναι πραγματικός αριθμός. □

Στη συνέχεια, στο Θεώρημα 1.2, θα αποδείξουμε ότι οι συμμετρικοί πίνακες είναι διαγωνιοποιήσιμοι. Μάλιστα θα δούμε ότι, αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας S, δηλαδή τέτοιος ώστε $S^T = S^{-1}$, για τον οποίο ισχύει $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Πριν μπορέσουμε να οδηγηθούμε σε αυτό το βασικό αποτέλεσμα, θα δώσουμε ορισμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα για συμμετρικούς πίνακες.

Ορισμός 1.8 (Ορθογώνια όμοιοι πίνακες.) Δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγονται *ορθογώνια όμοιοι*, αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ τέτοιος ώστε $B = S^TAS$. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ λέγεται *ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος*, αν είναι ορθογώνια όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Σημείωση. Αφού, για κάθε ορθογώνιο πίνακα S, ο ανάστροφός του είναι και αντίστροφός του, δύο ορθογώνια όμοιοι πίνακες, είναι όμοιοι.

Σύμφωνα με το ακόλουθο, πρώτο προκαταρκτικό αποτέλεσμα, ιδιοδιανύσματα

συμμετρικών πινάκων, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι ορθογώνια μεταξύ τους.

Λήμμα 1.3 (Ορθογωνιότητα ιδιοδιανυσμάτων συμμετρικών πινάκων ως προς διαφορετικές ιδιοτιμές.) *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, λ, μ δύο ιδιοτιμές του και x, y αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Αν $\lambda \neq \mu$, τότε τα x, y είναι ορθογώνια.*

Απόδειξη. Αφού ο A είναι συμμετρικός, έχουμε $A^T = A$. Τώρα $Ax = \lambda x$, άρα $(Ax)^T = (\lambda x)^T$, οπότε $x^T A = \lambda x^T$, επομένως $x^T Ay = (\lambda x^T)y = \lambda(x^T y) = \lambda(x, y)$. Επιπρόσθετα, $x^T Ay = x^T(\mu y) = \mu(x^T y) = \mu(x, y)$. Από τις δύο αυτές σχέσεις συμπεραίνουμε ότι $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, οπότε $(x, y) = 0$, αφού $\lambda \neq \mu$. □

Σύμφωνα με το δεύτερο προκαταρκτικό αποτέλεσμα, συμμετρικοί πίνακες με ανά δύο διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμοι.

Πρόταση 1.6 (Συμμετρικοί πίνακες με διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμοι.) *Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, με ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Τότε ο A είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $x^1, \ldots, x^n$ ιδιοδιανύσματα του A ως προς τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, αντίστοιχα. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να δεχθούμε ότι τα $x^1, \ldots, x^n$ είναι μοναδιαία, δηλαδή $\|x^i\| = 1,\ i = 1, \ldots, n$. Επιπρόσθετα, σύμφωνα με το προηγούμενο Λήμμα, τα $x^1, \ldots, x^n$ είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους, συνεπώς ισχύει $(x^i, x^j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$. Τώρα, ο πίνακας $S, S := (x^1, \ldots, x^n)$, είναι ορθογώνιος και ισχύει $S^T AS = S^T(Ax^1, \ldots, Ax^n) = S^T(\lambda_1 x^1, \ldots, \lambda_n x^n) = S^T S \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. □

Μετά τα προηγούμενα δύο προκαταρκτικά αποτελέσματα είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε και το βασικό αποτέλεσμα. Σημειώνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο αυτού του αποτελέσματος, η απόδειξη του οποίου είναι μάλιστα πολύ ευκολότερη, βλ. την Άσκηση 1.17.

Θεώρημα 1.2 (Συμμετρικοί πίνακες είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμοι.) *Κάθε $n \times n$ συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για $(n-1) \times (n-1)$ πίνακες και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n \times n$ πίνακες.

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, λ_1 μια ιδιοτιμή του και x^1 ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Τότε υπάρχουν $x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{x^1, \ldots, x^n\}$ να αποτελεί ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο πίνακας $S, S := (x^1, \ldots, x^n)$, είναι ορθογώνιος και ισχύει

$$S^T AS = S^T(\lambda_1 x^1, Ax^2, \ldots, Ax^n) = \begin{pmatrix} \lambda_1(x^1, x^1) & \star & \ldots & \star \\ \lambda_1(x^2, x^1) & & & \\ \vdots & & B & \\ \lambda_1(x^n, x^1) & & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \ldots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

όπου B ένας $(n-1) \times (n-1)$ πραγματικός πίνακας, $B \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$. Αφού ο πίνακας A είναι συμμετρικός, θα έχουμε $(S^T AS)^T = S^T A^T (S^T)^T = S^T AS$, δηλαδή ο $S^T AS$ είναι συμμετρικός, οπότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα έχει τη μορφή

$$S^T AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

και ο B είναι επίσης συμμετρικός. Τώρα, σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει ένας ορθογώνιος πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n-1,n-1}$ τέτοιος ώστε $T^T BT = \operatorname{diag}(\lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Θέτουμε τώρα

$$T_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

και έχουμε, με προφανή συμβολισμό,

$$(ST_1)^T A(ST_1) = T_1^T(S^T AS)T_1 = T_1^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} T_1$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & T^T BT \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Τώρα, ο πίνακας ST_1 είναι ορθογώνιος, ως γινόμενο ορθογώνιων πινάκων, και έτσι συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει και για $n \times n$ συμμετρικούς πίνακες. □

Παρατήρηση 1.1 (Προσδιορισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας και $S \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας ορθογώνιος πίνακας τέτοιος ώστε $S^T AS = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, βλ. το Θεώρημα 1.2 και την απόδειξή του. Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Επίσης, για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε, βλ. την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1, $AS = SD$, οπότε αν $x^1, \ldots, x^n$ είναι οι στήλες του S, $Ax^i = \lambda_i x^i$, $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή οι στήλες του S είναι ιδιοδιανύσματα του A, και μάλιστα το x^i αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. □

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, κάθε συμμετρικός πίνακας είναι ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται εύκολα στο ότι κάθε Ερμητιανός πίνακας είναι ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος. Τροποποιώντας κατάλληλα την απόδειξη, οδηγούμαστε στη λεγόμενη *κανονική μορφή του Schur*, σύμφωνα με την οποία *κάθε* τετραγωνικός πίνακας είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα.

Θεώρημα 1.3 (Κανονική μορφή του Schur.) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $Q \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $Q^\star AQ$ να είναι άνω τριγωνικός, $Q^\star AQ = T$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα δοθεί επαγωγικά ως προς n. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Στο επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός μας ισχύει για $(n-1) \times (n-1)$ πίνακες και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n \times n$ πίνακες.

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας, λ μια ιδιοτιμή του και u ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα, $\|u\| = 1$. Τότε υπάρχουν $x^2, \ldots, x^n \in \mathbb{C}^n$ τέτοια

ώστε το σύνολο $\{u, x^2, \ldots, x^n\}$ να αποτελεί ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{C}^n$. Γράφουμε τον ορθομοναδιαίο πίνακα $U, U := (u, x^2, \ldots, x^n)$, στη μορφή $U := (u \,|\, \tilde{U})$, δηλαδή θεωρούμε τον $n \times (n-1)$ πίνακα $\tilde{U}$ με στήλες τα διανύσματα $x^2, \ldots, x^n$. Τώρα έχουμε

$$U^\star AU = \begin{pmatrix} u^\star \\ \tilde{U}^\star \end{pmatrix} A(u \,|\, \tilde{U}) = \begin{pmatrix} u^\star Au & u^\star A\tilde{U} \\ \tilde{U}^\star Au & \tilde{U}^\star A\tilde{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U} \\ \lambda \tilde{U}^\star u & \tilde{U}^\star A\tilde{U} \end{pmatrix}.$$

Αλλά, αφού ο U είναι ορθομοναδιαίος, ισχύει $\tilde{U}^\star u = 0$, οπότε η προηγούμενη σχέση δίνει

$$U^\star AU = \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U} \\ 0 & \tilde{U}^\star A\tilde{U} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Συμβολίζουμε με B τον $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα $\tilde{U}^\star A\tilde{U}$, $B \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$. Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $P \in \mathbb{C}^{n-1,n-1}$ που δίνει την κανονική μορφή του Schur για τον B, $P^\star BP = S$, με S άνω τριγωνικό πίνακα. Επομένως, ο B γράφεται στη μορφή $B = PSP^\star$. Συνεπώς, έχουμε $\tilde{U}^\star A\tilde{U} = PSP^\star$, οπότε η (1.2) δίνει

$$U^\star AU = \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U} \\ 0 & PSP^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U}P \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^\star \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Τώρα, ο πίνακας $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι προφανώς ορθομοναδιαίος· επίσης και ο πίνακας Q, $Q := U \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right)$, είναι ορθομοναδιαίος ως γινόμενο ορθομοναδιαίων πινάκων, βλ. και την Άσκηση 1.27. Άρα, η (1.3) δίνει

$$\begin{aligned} Q^\star AQ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^\star \end{pmatrix} U^\star AU \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U}P \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \\ &= I_n \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U}P \\ 0 & S \end{pmatrix} I_n = \begin{pmatrix} \lambda & u^\star A\tilde{U}P \\ 0 & S \end{pmatrix} = T, \end{aligned}$$

δηλαδή το αποτέλεσμα ισχύει και για $n \times n$ πίνακες. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη. □

Σημείωση. Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας Ερμητιανός πίνακας. Με τους συμβολισμούς στην

προηγούμενη απόδειξη, έχουμε τότε

$$u^\star A\tilde{U}P = (Au)^\star \tilde{U}P = \bar{\lambda}u^\star \tilde{U}P = 0,$$

αφού $u^\star\tilde{U} = 0$, λόγω του ότι ο U είναι ορθομοναδιαίος. Η προηγούμενη απόδειξη οδηγεί επομένως στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας T είναι στην εν λόγω περίπτωση διαγώνιος, δηλαδή ότι κάθε Ερμητιανός πίνακας είναι ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος. Στην περίπτωση συμμετρικού πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, βλέπουμε εύκολα ότι ο Q είναι και συμμετρικος, οπότε είναι ορθογώνιος· το Θεώρημα 1.2 είναι επομένως ένα πόρισμα του Θεωρήματος 1.3. Δώσαμε ξεχωριστά την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2 για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη στην κατανόηση του θέματος.

Παρατήρηση 1.2 (Κανονικοί πίνακες.) Στην πραγματική περίπτωση, όπως είδαμε, ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ακριβώς τότε ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος, αν είναι συμμετρικός. Στη μιγαδική περίπτωση, όπως αναφέραμε στην προηγούμενη Σημείωση, ένας Ερμητιανός πίνακας είναι ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμος. Στην προκειμένη περίπτωση δεν ισχύει το αντίστροφο.

Για να χαρακτηρίσουμε τους ορθομοναδιαία διαγωνιοποιήσιμους πίνακες, εισάγουμε πρώτα την έννοια του κανονικού πίνακα. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ καλείται *κανονικός* (*normal*), αν αντιμετατίθεται με τον $A^\star$, $A^\star A = AA^\star$. Οι Ερμητιανοί και οι ορθομοναδιαίοι αποτελούν ειδικές περιπτώσεις κανονικών πινάκων. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι ο άνω τριγωνικός πίνακας T στην κανονική μορφή του Schur, βλ. Θεώρημα 1.3, είναι διαγώνιος, αν και μόνο αν ο A είναι κανονικός. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη του ισχυρισμού, σημειώνουμε ότι ένας άνω τριγωνικός πίνακας είναι κανονικός, αν και μόνο αν είναι διαγώνιος, βλ. Άσκηση 1.28.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ο πίνακας T είναι διαγώνιος και θα αποδείξουμε ότι ο A είναι κανονικός πίνακας. Από τη σχέση $Q^\star AQ = T$ λαμβάνουμε $A = QTQ^\star$, οπότε έχουμε αφ' ενός

$$AA^\star = QTQ^\star QT^\star Q^\star = QTT^\star Q^\star$$

και αφ' ετέρου

$$A^\star A = QT^\star Q^\star QTQ^\star = QT^\star TQ^\star,$$

οπότε $AA^\star = AA^\star$, αφού ο T είναι κανονικός, δηλαδή ο A είναι όντως κανονικός πίνακας.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι ο A είναι κανονικός πίνακας και θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας T είναι διαγώνιος. Σύμφωνα με τα προαναφερθέντα, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο T είναι κανονικός. Όμως, έχουμε

$$TT^\star = Q^\star AQQ^\star A^\star Q = Q^\star AA^\star Q$$

και

$$T^\star T = Q^\star A^\star QQ^\star AQ = Q^\star A^\star AQ,$$

συνεπώς $TT^\star = T^\star T$, δηλαδή ο T είναι κανονικός, οπότε και διαγώνιος, και η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 1.3 (Προσδιορισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας και $Q^\star AQ = T$ η κανονική μορφή του Schur για τον A. Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι οι ιδιοτιμές του άνω τριγωνικού πίνακα T, δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του T. Στόχος μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του A. Αν x είναι ιδιοδιάνυσμα του T ως προς την ιδιοτιμή λ_i, τότε η σχέση $Q^\star AQ = T$ δίνει $Q^\star AQx = \lambda_i x$, δηλαδή $AQx = \lambda_i Qx$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το Qx είναι ιδιοδιάνυσμα του A ως προς την ιδιοτιμή λ_i. Τώρα, αν τα ιδιοδιανύσματα $x^1, \ldots, x^m$ του T είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα ιδιοδιανύσματα $Qx^1, \ldots, Qx^m$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επίσης, προφανώς οι T και A έχουν το ίδιο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων.

Απομένει, επομένως, να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του T. Ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση που η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής λ_i είναι ένα (οπότε, προφανώς, και η γεωμετρική πολλαπλότητά της θα είναι ένα). Γράφουμε τότε το σύστημα $Tx = \lambda_i x$ στη μορφή

$$\begin{pmatrix} T_{11} - \lambda_i I_{i-1} & t_2 & T_{13} \\ 0 & 0 & t_3^T \\ 0 & 0 & T_{33} - \lambda_i I_{n-i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

με $x_1 \in \mathbb{C}^{i-1}, x_2 \in \mathbb{C}, x_3 \in \mathbb{C}^{n-i}$ και προφανή συμβολισμό. Τώρα, από τη σχέση $(T_{33} - \lambda_i I_{n-i})x_3 = 0$ λαμβάνουμε $x_3 = 0$, αφού ο πίνακας $T_{33} - \lambda_i I_{n-i}$ είναι αντιστρέψιμος ως άνω τριγωνικός με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία, επιλέγουμε εν συνεχεία το

x_2 αυθαίρετα, φερ' ειπείν $x_2 = 1$, και κατόπιν υπολογίζουμε το x_1 από τη σχέση $(T_{11} - \lambda_i I_{i-1})x_1 = -x_2 t_2$.

Στη γενική περίπτωση, με κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών, γράφουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα $(T - \lambda_i I_n)x = 0$ στη μορφή $Bx = 0$, με B έναν κλιμακωτό πίνακα. (Θυμίζουμε ότι ένας πίνακας λέγεται κλιμακωτός, αν οι μη μηδενικές γραμμές του εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές και το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής εμφανίζεται δεξιότερα του πρώτου μη μηδενικού της προηγούμενης γραμμής.) Το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του B μας δίνει τον βαθμό του B, συνεπώς η διάσταση του πυρήνα του B είναι το πλήθος των μηδενικών γραμμών του. Εύκολα μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε αντίστοιχο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων, δηλαδή ιδιοδιανυσμάτων του T ως προς την ιδιοτιμή λ_i. □

1.2.1 Η κανονική μορφή του Jordan

Όπως είδαμε προηγουμένως, ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ είναι ακριβώς τότε διαγωνιοποιήσιμος, δηλαδή όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα D, αν έχει n γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Το θέμα που θα μας απασχολήσει εδώ είναι κατά πόσον με κάποιες παραχωρήσεις, μειώνοντας τις απαιτήσεις στον πίνακα D, μπορούμε να οδηγηθούμε σε κάποιο χρήσιμο αποτέλεσμα που να ισχύει για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες. Πράγματι, όπως θα δούμε, σύμφωνα με ένα ιδιαίτερα χρήσιμο αποτέλεσμα, την *κανονική μορφή του Jordan*, κάθε τετραγωνικός πίνακας είναι όμοιος με έναν πίνακα J που επιτρέπεται να έχει μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιό του και στην υπερδιαγώνιό του, δηλαδή στις θέσεις (i, i) και $(i, i+1)$, για τα i που αυτό έχει νόημα. Μάλιστα, αυτός ο διδιαγώνιος πίνακας έχει στις θέσεις της διαγωνίου τις ιδιοτιμές του αρχικού πίνακα και στις θέσεις της υπερδιαγωνίου είτε μονάδες είτε μηδενικά. Δίνουμε το ακριβές αποτέλεσμα, χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 1.4 (Κανονική μορφή του Jordan.) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in \mathbb{C}^{n,n}$ τέτοιος ώστε ο $S^{-1}AS$ να είναι*

διαγώνιος κατά μπλοκ, $S^{-1}AS = J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p)$, *με μπλοκ της μορφής*

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ 0 & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n_i,n_i}, \quad i = 1, \ldots, p,$$

και $n_1 + \cdots + n_p = n$. □

Σημείωση. Είναι γνωστό, ότι τα μπλοκ J_i είναι μονοσήμαντα ορισμένα και η μόνη αλλαγή που μπορεί να γίνει στην κανονική μορφή Jordan J ενός πίνακα A είναι να μεταθέσουμε τα μπλοκ J_i. Στη διαγώνιο κάθε μπλοκ εμφανίζεται μια ιδιοτιμή του πίνακα A. Η ίδια ιδιοτιμή μπορεί να εμφανίζεται σε περισσότερα μπλοκ, μάλιστα εμφανίζεται σε τόσα μπλοκ όση είναι η γεωμετρική πολλαπλότητά της. Το πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του A είναι p, όσο και το πλήθος των αντίστοιχων μπλοκ στην κανονική μορφή του Jordan J.

Παρατήρηση 1.4 (Προσδιορισμός ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας και $S^{-1}AS = J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p)$ η κανονική μορφή του Jordan για τον A. Τότε οι ιδιοτιμές του A είναι οι ιδιοτιμές του J, δηλαδή τα διαγώνια στοιχεία $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ του J. Στόχος μας τώρα είναι να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του A. Αυτό θα γίνει σε δύο στάδια. Στο πρώτο στάδιο θα προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του J. Με τους συμβολισμούς του Θεωρήματος 1.4, μπορούμε να προσδιορίσουμε ένα ιδιοδιάνυσμα x του J που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i ως εξής: Η σχέση $Jx = \lambda_i x$ δίνει

$$J_i \begin{pmatrix} x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} \\ \vdots \\ x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i} \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} \\ \vdots \\ x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i} \end{pmatrix},$$

δηλαδή

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} \\ x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2} \\ \vdots \\ x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i-1} \\ x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i} \end{pmatrix} = 0.$$

Από εδώ συμπεραίνουμε αμέσως ότι $x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+2} = \cdots = x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+n_i} = 0$ και ότι το $x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1}$ μπορεί να επιλεγεί τυχαία. Επομένως, ένα ιδιοδιάνυσμα x που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i είναι αυτό με συνιστώσα $x_{n_1+\cdots+n_{i-1}+1} = 1$ και όλες τις άλλες συνιστώσες μηδέν. Κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε εύκολα σε p γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $x^1, \ldots, x^p$ του J, και αυτό είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων.

Στο δεύτερο στάδιο θα προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα του A. Αν x είναι ιδιοδιάνυσμα του J ως προς την ιδιοτιμή λ_i, τότε η σχέση $S^{-1}AS = J$ δίνει $S^{-1}ASx = \lambda_i x$, δηλαδή $ASx = \lambda_i Sx$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι το Sx είναι ιδιοδιάνυσμα του A ως προς την ιδιοτιμή λ_i. Τώρα, κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγούμαστε σε p γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A, αφού, λόγω του ότι ο S είναι αντιστρέψιμος, αν τα ιδιοδιανύσματα $x^1, \ldots, x^p$ του J είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε και τα ιδιοδιανύσματα $Sx^1, \ldots, Sx^p$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. □

1.2.2 Το πηλίκο του Rayleigh

Σε αυτήν την ενότητα υποθέτουμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός· σημειώνουμε πάντως ότι τα σχετικά αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα και για Ερμητιανούς πίνακες. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Το πηλίκο

$$\frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

καλείται *πηλίκο του Rayleigh*. Έστω $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Όπως θα δούμε, η ελάχιστη ιδιοτιμή, λ_1, είναι το ελάχιστο του πηλίκου του Rayleigh, ενώ η μέγιστη, λ_n, το μέγιστο του πηλίκου του Rayleigh, δηλαδή

$$\lambda_1 = \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \quad \text{και} \quad \lambda_n = \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}. \tag{1.4}$$

Σημειώνουμε κατ' αρχάς ότι, αν x^1 και x^n είναι ιδιοδιανύσματα του A ως προς τις ιδιοτιμές λ_1 και λ_n, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{(Ax^1, x^1)}{(x^1, x^1)} = \frac{(\lambda_1 x^1, x^1)}{(x^1, x^1)} = \lambda_1 \quad \text{και} \quad \frac{(Ax^n, x^n)}{(x^n, x^n)} = \frac{(\lambda_n x^n, x^n)}{(x^n, x^n)} = \lambda_n.$$

Συνεπώς, για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \lambda_1 \leq \frac{(Ax, x)}{(x, x)} \leq \lambda_n. \tag{1.5}$$

Για να αποδείξουμε την (1.5), θεωρούμε μια ορθομοναδιαία βάση $\{x^1, \ldots, x^n\}$ του $\mathbb{R}^n$ αποτελούμενη από ιδιοδιανύσματα του A, $Ax^i = \lambda_i x^i$, $i = 1, \ldots, n$. Κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ γράφεται λοιπόν ως γραμμικός συνδυασμός των $x^1, \ldots, x^n$, $x = \alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_n x^n$. Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}(Ax, x) &= (\alpha_1 Ax^1 + \cdots + \alpha_n Ax^n, \alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_n x^n) \\ &= (\alpha_1 \lambda_1 x^1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x^n, \alpha_1 x^1 + \cdots + \alpha_n x^n) \\ &= \lambda_1 (\alpha_1)^2 + \cdots + \lambda_n (\alpha_n)^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με την

$$(x, x) = (\alpha_1)^2 + \cdots + (\alpha_n)^2,$$

που αποδεικνύεται πολύ εύκολα, οδηγούμεθα στην επιθυμητή εκτίμηση (1.5).

1.2.3 Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα

Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας. Επειδή η διάσταση του γραμμικού χώρου $\mathbb{C}^{n,n}$ είναι n^2 και οι δυνάμεις $A^i, i = 0, \ldots, n^2$, είναι στοιχεία του $\mathbb{C}^{n,n}$, οι πίνακες $I_n, A, \ldots, A^{n^2}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένοι. Επομένως υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = 0$, $0 \in \mathbb{C}^{n,n}$, δηλαδή υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ n^2, του οποίου ο πίνακας A είναι "ρίζα". Το θέμα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια είναι κατά πόσον υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο P, βαθμού μικρότερου του n^2, τέτοιο ώστε ο A να είναι "ρίζα" του, $P(A) = 0$. Το βασικό αποτέλεσμα εδώ είναι το Θεώρημα των Cayley–Hamilton, σύμφωνα με το οποίο το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, βαθμού n, έχει αυτήν την ιδιότητα.

Ορισμός 1.9 (Ελάχιστο πολυώνυμο πίνακα.) Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Το πολυώνυμο p του ελάχιστου δυνατού βαθμού με μεγιστοβάθμιο συντελεστή, δηλαδή συντελεστή της μεγαλύτερης δύναμής του, τη μονάδα, για το οποίο ισχύει $p(A) = 0$, λέγεται *ελάχιστο πολυώνυμο* του A.

Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα είναι προφανώς μονοσήμαντα ορισμένο. Πράγματι, αν υπήρχαν δύο διαφορετικά ελάχιστα πολυώνυμα p και q ενός πίνακα A, τότε η διαφορά τους θα ήταν μη μηδενικό πολυώνυμο μικρότερου βαθμού και θα ικανοποιούσε τη σχέση $(p-q)(A) = 0$, δηλαδή τα p και q δεν θα ήταν ελάχιστα πολυώνυμα, άτοπο.

Λήμμα 1.4 (Κάθε πολυώνυμο με ρίζα έναν πίνακα διαιρείται με το ελάχιστο πολυώνυμό του.) *Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, p το ελάχιστο πολυώνυμό του, και P ένα πολυώνυμο για το οποίο ισχύει $P(A) = 0$. Τότε το p διαιρεί το P.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό του p έπεται ότι ο βαθμός του είναι το πολύ όσος και ο βαθμός του P. Επομένως ισχύει $P = pq + r$, με πολυώνυμα q και r τέτοια ώστε ο βαθμός του r να είναι μικρότερος του βαθμού του p. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το r είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Αν υποθέσουμε, προς στιγμήν, ότι αυτό δεν είναι αληθές, θα είχαμε αφ' ενός $r(A) = P(A) - p(A)q(A) = 0$ και αφ' ετέρου ο βαθμός του r θα ήταν μικρότερος του βαθμού του p, άτοπο. □

Στη συνέχεια θα δούμε ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

Λήμμα 1.5 (Ταύτιση ελαχίστων πολυωνύμων όμοιων πινάκων.) *Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ όμοιοι πίνακες, δηλαδή $B = S^{-1}AS$ με $S \in \mathbb{C}^{n,n}$. Αν i είναι ένας φυσικός αριθμός ή το μηδέν, τότε $B^i = (S^{-1}AS)^i = S^{-1}AS \cdots S^{-1}AS = S^{-1}A^iS$, και, ακριβώς αντίστοιχα, $A^i = SB^iS^{-1}$. Επομένως, αν για κάποιο πολυώνυμο p ισχύει $p(A) = 0$, θα έχουμε επίσης $p(B) = S^{-1}p(A)S = S^{-1}0S = 0$. Αντίστροφα, αν για κάποιο πολυώνυμο q ισχύει $q(B) = 0$, θα έχουμε επίσης $q(A) = Sq(B)S^{-1} = S0S^{-1} = 0$. Από τα ανωτέρω έπεται εύκολα, αν λάβουμε υπ' όψιν μας και το γεγονός ότι το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα ορίζεται μονοσήμαντα, ότι οι πίνακες A και B έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. □

Σύμφωνα με το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα, των Cayley–Hamilton, ένας πίνακας είναι "ρίζα", με έννοια που γίνεται σαφής στο Θεώρημα, του χαρακτηριστικού της πολυωνύμου. Ενώ λοιπόν μέχρι τώρα ξέραμε ότι ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου ενός $n \times n$ πίνακα είναι το πολύ n^2, τώρα θα δούμε ότι αυτός ο βαθμός είναι το

πολύ n. Πριν δώσουμε το θεώρημα, μια υπενθύμιση σχετικά με τον προσαρτημένο ενός πίνακα.

Υπενθύμιση. (Ο προσαρτημένος ενός πίνακα.) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας, $A = (a_{ij})$. Συμβολίζουμε με c_{ij} το *αλγεβρικό συμπλήρωμα* (ή τον *συμπαράγοντα*) του στοιχείου a_{ij}, $c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, όπου A_{ij} ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν διαγράψουμε τη γραμμή i και τη στήλη j. Ο ανάστροφος C του πίνακα με στοιχεία c_{ij} (δηλαδή ο C έχει το στοιχείο c_{ji} στη θέση (i, j)) λέγεται *προσαρτημένος* του A, συμβολίζεται συνήθως με $\operatorname{adj} A$, και μια βασική του ιδιότητα είναι ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n. \tag{1.6}$$

Θεώρημα 1.5 (Των Cayley–Hamilton.) *Αν p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, τότε ισχύει $p(A) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $p(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdots + \alpha_0)$, με $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, \ldots, n-1$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A. Επειδή, σύμφωνα με την (1.6), ισχύει $(A - \lambda I_n) \operatorname{adj}(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) I_n$, έχουμε, λαμβάνοντας υπ' όψιν και τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

$$(A - \lambda I_n) \operatorname{adj}(A - \lambda I_n) = p(\lambda) I_n. \tag{1.7}$$

Τώρα ο $\operatorname{adj}(A - \lambda I_n)$ έχει στοιχεία πολυώνυμα ως προς λ βαθμού το πολύ $n - 1$, μπορεί συνεπώς να γραφεί στη μορφή

$$\operatorname{adj}(A - \lambda I_n) = B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}. \tag{1.8}$$

Από τις (1.7) και (1.8) λαμβάνουμε

$$(A - \lambda I_n)(B_0 + B_1\lambda + \cdots + B_{n-1}\lambda^{n-1}) = (-1)^n(\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_0) I_n. \tag{1.9}$$

Σύγκριση συντελεστών στα δύο μέλη της (1.9), δηλαδή σύγκριση των συντελεστών ίδιων δυνάμεων του λ, μας δίνει

$$\begin{aligned} AB_0 &= (-1)^n \alpha_0 I_n \\ -B_0 + AB_1 &= (-1)^n \alpha_1 I_n \\ &\vdots \\ -B_{n-2} + AB_{n-1} &= (-1)^n \alpha_{n-1} I_n \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις σχέσεις με $I_n, A, \ldots, A^n$, αντίστοιχα, και προσθέτοντας κατά μέλη λαμβάνουμε

$$0 = (-1)^n(\alpha_0 I_n + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n),$$

δηλαδή $p(A) = 0$. □

Συνδυάζοντας το Λήμμα 1.4 με το Θεώρημα 1.5 οδηγούμαστε αμέσως στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.1 (Το ελάχιστο διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.) *Το ελάχιστο πολυώνυμο ενός πίνακα διαιρεί το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.* □

Παράδειγμα 1.3 Τονίζουμε ότι ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου ενός πίνακα μπορεί να είναι πολύ μικρότερος από τον βαθμό του χαρακτηριστικού του πολυώνυμο. Φερ' ειπείν, αμέσως πείθεται κανείς ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μοναδιαίου $n \times n$ πίνακα I_n είναι $p, p(\lambda) = (1-\lambda)^n$, ενώ το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι $q, q(\lambda) = \lambda - 1$.

Ασκήσεις

1.1 Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Αποδείξτε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι ακριβώς τότε αντιστρέψιμος, αν το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή του.

1.3 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας, λ μια ιδιοτιμή του A, και x ένα ιδιοδιάνυσμα του A ως προς την ιδιοτιμή λ. Προσδιορίστε μια ιδιοτιμή του A^{-1} και ένα ιδιοδιάνυσμά του ως προς αυτήν την ιδιοτιμή.

1.4 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας, λ μια ιδιοτιμή του A, και x ένα ιδιοδιάνυσμα του A ως προς την ιδιοτιμή λ. Προσδιορίστε μια ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A^2.

1.5 Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ δύο πίνακες. Αν ο B είναι αντιστρέψιμος, και x ένα ιδιοδιάνυσμα του AB ως προς την ιδιοτιμή λ, προσδιορίστε μια ιδιοτιμή και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα BA.

1.6 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές του.

1.7 Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.8 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του. Αποδείξτε ότι το γινόμενο $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ των ιδιοτιμών ισούται με την ορίζουσα του A, $\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A$.

1.9 (Το ίχνος ενός πίνακα.) Έστω $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας. Το άθροισμα $a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ των διαγώνιων στοιχείων καλείται *ίχνος* του A. Αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A, αποδείξτε ότι το άθροισμά τους $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ ισούται με το ίχνος του A.
[*Υπόδειξη*: Θεωρήστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p του A. Βεβαιωθείτε ότι

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + \tilde{p}(\lambda)$$

με $\tilde{p}$ ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $n - 2$.]

1.10 Προσδιορίστε την αλγεβρική και τη γεωμετρική πολλαπλότητα των πραγματικών ιδιοτιμών του πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

1.11 Έστω

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & -2 \\ -2 & -5 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε, αν υπάρχει, έναν διαγώνιο πίνακα όμοιο του A.

1.12 Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathbb{R}^{2n+1,2n+1}$. Αποδείξτε ότι ο πίνακας A έχει τουλάχιστον μία πραγματική ιδιοτιμή.

1.13 Έστω

$$A := \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 5 & -14 & 2 \\ 10 & 2 & -11 \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίστε έναν διαγώνιο πίνακα όμοιο του A.

1.14 Εξετάστε κατά πόσον οι πίνακες

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ και } C := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμοι.

1.15 (Ανισότητα του Gerschgorin.) Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας και λ μια ιδιοτιμή του. Αποδείξτε ότι, για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$, ισχύει

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,$$

δηλαδή κάθε ιδιοτιμή λ βρίσκεται σε κάποιον κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο, με κέντρο a_{ii} και ακτίνα $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$. Οι κύκλοι αυτοί λέγονται *κύκλοι του Gerschgorin.* Με αυτόν τον τρόπο δεν προσδιορίζουμε φυσικά τις ιδιοτιμές ενός πίνακα, αλλά έχουμε στη διάθεσή μας μια μέθοδο χονδρικού εντοπισμού των.

[*Υπόδειξη*: Έστω x ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Αν x_i είναι μια κατ' απόλυτο τιμή μέγιστη συνιστώσα του x, τότε θα έχουμε

$$(a_{ii} - \lambda)x_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j.]$$

Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι οι πίνακες A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, για να αποδείξετε ότι, για κάποιο $j \in \{1, \ldots, n\}$, ισχύει επίσης

$$|a_{jj} - \lambda| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|.$$

1.16 Συνδυάστε τις Ασκήσεις 1.2 και 1.15, για να αποδείξετε ότι ένας $n \times n$ πίνακας $A = (a_{ij})$ με αυστηρά κυριαρχική διαγώνιο, δηλαδή τέτοιος ώστε

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n,$$

είναι αντιστρέψιμος. (Τέτοιοι πίνακες αναφέρονται και ως *διαγώνια υπέρτεροι*.)

1.17 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας ορθογώνια διαγωνιοποιήσιμος πίνακας. Αποδείξτε ότι ο A είναι συμμετρικός.

1.18 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας, δηλαδή τέτοιος ώστε $a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, \ldots, n$. Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι φανταστικοί αριθμοί.

1.19 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας αντισυμμετρικός πίνακας και $x \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι $x^T Ax = 0$.

1.20 Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ δύο συμμετρικοί πίνακες. Αποδείξτε ότι ο πίνακας AB είναι συμμετρικός, αν και μόνο αν οι πίνακες A και B αντιμετατίθενται, δηλαδή αν $AB = BA$.

1.21 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας πίνακας και A^T ο ανάστροφός του. Αποδείξτε ότι οι πίνακες A και A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμα, ιδιαίτερα λοιπόν τις ίδιες ιδιοτιμές.

1.22 Θεωρούμε τον πίνακα $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ καθώς και τον ανάστροφό του $A^T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Βεβαιωθείτε ότι οι ιδιοτιμές τους είναι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 2$. Βεβαιωθείτε επίσης ότι τα αντίστοιχα (μη μηδενικά) ιδιοδιανύσματα είναι $(x_1, -x_1)^T$ για τον A και $(x_1, 0)^T$ για τον A^T, ως προς την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, και $(0, x_2)^T$ για τον A και $(x_1, x_1)^T$ για τον A^T, ως προς την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 2$. Σε αντιδιαστολή με τις ιδιοτιμές, βλ. Άσκηση 1.21, ο ανάστροφος A^T ενός πίνακα A δεν έχει δηλαδή τα ίδια ιδιοδιανύσματα με τον A.

1.23 Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ δύο πίνακες και έστω ότι κάποιος από τους δύο είναι αντιστρέψιμος. Αποδείξτε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
[*Υπόδειξη*: Αν, φερ' ειπείν, ο A είναι αντιστρέψιμος, τι σχέση έχουν οι πίνακες BA και $A(BA)A^{-1}$;]
(Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, και όταν οι A, B είναι μη αντιστρέψιμοι.)

1.24 Έστω $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ένας συμμετρικός πίνακας, $x \in \mathbb{R}^n$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα, και λ ένας πραγματικός αριθμός. Αν $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A, αποδείξτε ότι

$$\min_{1 \le i \le n} |\lambda - \lambda_i| \le \frac{\|Ax - \lambda x\|}{\|x\|},$$

όπου $\| \cdot \|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.
[*Υπόδειξη*: Με τους συμβολισμούς του εδαφίου 1.2.1, αποδείξτε ότι

$$\|Ax - \lambda x\|^2 = (Ax - \lambda x, Ax - \lambda x) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)^2 (\alpha_i)^2 \ge \min_{1 \le i \le n} |\lambda - \lambda_i|^2 \, (x, x).]$$

1.25 Λέμε ότι ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι *θετικά ορισμένος*, αν το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο (Ax, x) είναι θετικό, για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα x του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι

ένας *συμμετρικός* πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι θετικά ορισμένος, αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι θετικές.

1.26 Αποδείξτε ότι ο πίνακας $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ δεν είναι θετικά ορισμένος.
[*Υπόδειξη*: Για $x = (1,1)^T$ έχουμε $(Ax, x) = -2$.]

Ποιο συμπέρασμα συνάγετε συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με την προηγούμενη Άσκηση;

1.27 Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ ορθομοναδιαίοι πίνακες. Αποδείξτε ότι και το γινόμενό τους AB είναι επίσης ορθομοναδιαίος πίνακας.

1.28 Έστω $T \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας άνω τριγωνικός πίνακας. Αποδείξτε ότι ο T είναι κανονικός, αν και μόνο αν είναι διαγώνιος.
[*Υπόδειξη*: Συμβολίζουμε με $t_{ij}, 1 \le i \le j \le n$, τα στοιχεία του T που βρίσκονται στο άνω τρίγωνο του T (όλα τα άλλα είναι μηδέν). Βεβαιωθείτε ότι

$$(TT^\star)_{ii} = \sum_{k=i}^{n} |t_{ik}|^2 \quad \text{και} \quad (T^\star T)_{ii} = \sum_{k=1}^{i} |t_{ki}|^2$$

και αποδείξτε, επαγωγικά ως προς i, για $i = 1, \ldots, n-1$, ότι $t_{i,i+1} = \cdots = t_{i,n} = 0$.]

1.29 Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας της μορφής $A = \left(\begin{smallmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{smallmatrix}\right)$ με $A_{11} \in \mathbb{C}^{k,k}$, $A_{12} \in \mathbb{C}^{k,n}$ και $A_{22} \in \mathbb{C}^{n-k,n-k}$. Αποδείξτε ότι η ένωση των ιδιοτιμών των A_{11} και A_{22} δίνει το σύνολο των ιδιοτιμών του A.
[*Υπόδειξη*: Αποδείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του A είναι και ιδιοτιμή ενός εκ των A_{11} και A_{22}. Συγκεκριμένα, αν λ ιδιοτιμή του A και x αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, με $x = (x_1, x_2)^T$, $x_1 \in \mathbb{C}^k$, $x_2 \in \mathbb{C}^{n-k}$, αποδείξτε ότι αν $x_2 \neq 0$, τότε το λ είναι ιδιοτιμή του A_{22} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x_2, ενώ αν $x_2 = 0$, τότε το λ είναι ιδιοτιμή του A_{11} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το x_1.]

1.30 Έστω ρ, $\rho(z) := \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + z^n$, ένα πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα. Θεωρήστε τον $n \times n$ πίνακα

$$A := \begin{pmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \ldots & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αποδείξτε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A συμπίπτουν με τις ρίζες του ρ.

[*Υπόδειξη*: Αναπτύσσοντας π.χ. την ορίζουσα ως προς την τελευταία της στήλη, βεβαιωθείτε ότι $\det(A - \lambda I) = (-1)^n \rho(\lambda)$. Εναλλακτικά, αποδείξτε ότι οποιαδήποτε ρίζα λ του ρ είναι ιδιοτιμή του A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $(\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, 1)^T$.]

1.31 (Λεπτομερέστερη εκδοχή της ανισότητας του Gerschgorin.) Έστω $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ένας πίνακας με στοιχεία a_{ij}, και $K_1, \ldots, K_n$ οι κύκλοι του Gerschgorin του A με κέντρα $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο κύκλος K_i έχει κενή τομή με την ένωση όλων των άλλων κύκλων K_j, $j = 1, \ldots, n$, $j \neq i$. Αποδείξτε ότι στον K_i περιέχεται ακριβώς μία ιδιοτιμή του A.

[*Υπόδειξη*: Γράφουμε τον A στη μορφή $A = D + R$ με $D := \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ και $R := A - D$. Ορίζουμε τους πίνακες $A_t := D + tR$, $t \in [0, 1]$. Βεβαιωθείτε ότι οι ιδιοτιμές των A_t περιέχονται στους κύκλους του Gerschgorin του πίνακα A. Στον K_i περιέχεται ακριβώς μία ιδιοτιμή του $D = A_0$, το κέντρο a_{ii} του K_i. Οι ιδιοτιμές των A_t εξαρτώνται συνεχώς από την παράμετρο t (αν αριθμηθούν κατάλληλα), αφού οι ρίζες πολυωνύμων εξαρτώνται συνεχώς από τους συντελεστές. Επομένως καμμία ιδιοτιμή δεν μπορεί να μεταπηδήσει από τον K_i στην ένωση των υπολοίπων κύκλων, ούτε και αντίστροφα. Συνεπώς στον K_i περιέχεται ακριβώς μία ιδιοτιμή και του $A_1 = A$.]