

TEM-101 – 1η εργαστηριακή άσκηση

1. (1 μον.) Μετατρέψτε τον αριθμό μητρώου σας στο οκταδικό και στα δεκαεξαδικό σύστημα. Δείξτε τον τρόπο με τον οποίο κάνατε την μετατροπή.

Έστω ότι ο αριθμός μητρώου είναι 9876. Έχουμε διαδοχικά, $9876 = 1234 \times 8 + 4$, $1234 = 154 \times 8 + 2$, $154 = 19 \times 8 + 2$, $19 = 2 \times 8 + 3$, $2 = 0 \times 8 + 2$, άρα $9876 = (23224)_8$. Επίσης, $9876 = 617 \times 16 + 4$, $617 = 38 \times 16 + 9$, $38 = 2 \times 16 + 6$, $2 = 0 \times 16 + 2$, άρα $9876 = (2694)_{16}$.

Μετατροπές αριθμών από το δεκαδικό στο οκταδικό ή το δεκαεξαδικό σύστημα μπορούν να γίνουν με τις συναρτήσεις `oct()` και `hex()` της Python:

```
>>> oct(9876)
'023224'
>>> hex(9876)
'0x2694'
```

Παρατηρήστε ότι και οι δύο συναρτήσεις επιστρέφουν ως αποτέλεσμα μια συμβολοσειρά, οι χαρακτήρες της οποίας είναι τα ψηφία του αριθμού στο οκταδικό ή δεκαεξαδικό σύστημα. Οι αντίστροφες μετατροπές μπορούν να γίνουν με τη συνάρτηση `int()`:

```
>>> int('0x2694', 16)
9876
>>> int('023224', 8)
9876
```

2. (1 μον.) Τι θα τυπώσει το παρακάτω πρόγραμμα; Η τιμή της μεταβλητής `am` είναι ο αριθμός μητρώου σας.

```
>>> a0 = am % 8
>>> am /= 8
>>> a1 = am % 8
>>> print a0, a1
```

Εξηγήστε τι είναι οι μεταβλητές `a0` και `a1`.

Έστω ότι ο αριθμός μητρώου είναι 9876. Η πρώτη εντολή παραπάνω, αναθέτει στην μεταβλητή `a0` το υπόλοιπο της διαίρεσης του `am`, δηλαδή του 9876, με το 8 και επομένως η τιμή της μεταβλητής `a0` είναι το λιγώτερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού 9876 στο οκταδικό σύστημα. Η δεύτερη εντολή αναθέτει στην μεταβλητή `am` το πηλίκο της διαίρεσης του 9876 με το 8 δηλαδή το 1234. Η προτελευταία εντολή υπολογίζει το υπόλοιπο της διαίρεσης του 1234 με το 8, το 2, και το αναθέτει στην μεταβλητή `a1`. Το ψηφίο αυτό είναι το δεύτερο λιγώτερο σημαντικό ψηφίο του αριθμού 9876 στο οκταδικό σύστημα. Η εντολή `print` θα τυπώσει το 4 ακολουθούμενο από το 2.

3. (2 μον.) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο διαβάζει δύο θετικούς ακεραίους $m > n$ και τυπώνει τους αριθμούς $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$. Παρατηρείτε κάτι;

```
>>> m = input('Dose m: ')
5
>>> n = input('Dose n: ')
3
>>> print m**2-n**2, 2*m*n, m**2+n**2
16 30 34
```

Η παρατήρηση που μπορεί να κάνει κάποιος είναι ότι οι τρεις αριθμοί αποτελούν μια πυθαγόρεια τριάδα για το λόγο ότι

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 = m^4 + 2m^2n^2 + n^4 = (m^2 + n^2)^2.$$

4. (2 μον.) Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο τυπώνει τις τιμές των παρακάτω εκφράσεων

(α') $e^{i\pi} + 1$

(β') $\text{Re}(i^3 + i^2 + 1)$

(γ') $|2 - 3i|^4$

(δ') $(1 + \frac{1}{15})^{101}$

(ε') $\cos(3\theta) - 4\cos^2\theta + 3\cos\theta$, για $\theta = \pi/6, \pi/4$.

```
>>> import cmath
>>> print cmath.exp( cmath.pi * 1j ) + 1
1.22464679915e-16j
>>> (1j**3 + 1j**2 + 1).real
0.0
>>> abs(2-3j)**4
168.99999999999997
>>> (1 + 1/15.0)**101
677.4871832716459
>>> import math
>>> theta = math.pi/6
>>> math.cos(3*theta) - 4*math.cos(theta)**2 + 3*math.cos(theta)
-0.40192378864668443
>>> theta = math.pi/4
>>> math.cos(3*theta) - 4*math.cos(theta)**2 + 3*math.cos(theta)
-0.5857864376269051
```

5. (4 μον.) Το σπίτι της Ιουλιέτας περιβάλλεται από ένα φράχτη ύψους q . Ο φράχτης βρίσκεται σε απόσταση p από το σπίτι της. Ποιό είναι το ελάχιστο μήκος της σκάλας που πρέπει να χρησιμοποιήσει ο Ρωμαίος έτσι ώστε το ένα της άκρο να είναι στο έδαφος και το άλλο στον τοίχο του σπιτιού της Ιουλιέτας; Υπολογίστε αναλυτικά ένα τύπο για το ελάχιστο μήκος της σκάλας και στη συνέχεια γράψτε ένα πρόγραμμα στην Python το οποίο ζητάει τα p και q και εκτυπώνει το ελάχιστο μήκος της σκάλας που θα χρειαστεί ο Ρωμαίος.

Για τη λύση του προβλήματος αναφερόμαστε στο σχήμα της επόμενης σελίδας. Από το ορθογώνιο τρίγωνο OAB έχουμε ότι το τετράγωνο του μήκους της σκάλας είναι $(p+x)^2 + (q+a)^2$. Απο την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων DAE και CEB έχουμε επιπλέον ότι $a/q = p/x$ ή ισοδύναμα, $a = pq/x$. Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(x) = (p+x)^2 + (q + \frac{pq}{x})^2, \quad x > 0.$$

Η συνάρτηση αυτή δίνει το τετράγωνο του μήκους της σκάλας που θα χρειαστεί ο Ρωμαίος σε συνάρτηση με την απόσταση της βάσης της σκάλας από το φράχτη. Αρκεί λοιπόν να βρούμε το ελάχιστο αυτής της συνάρτησης για $x > 0$. Είναι κατ' αρχήν φανερό ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι εκείνα για τα οποία $f'(x) = 0$, ισοδύναμα,

$$2(p+x) + 2\left(q + \frac{pq}{x}\right)\left(-\frac{pq}{x^2}\right) = 0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει τη μοναδική λύση $x = p^{1/3}q^{2/3}$. Τώρα, $f''(x) = 2 + \frac{4pq^2}{x^3} + \frac{6p^2q^2}{x^4}$ οπότε $f''(p^{1/3}q^{2/3}) = 6 + 6p^{2/3}q^{-2/3} > 0$, άρα η f έχει (ολικό) ελάχιστο στη σημείο $x = p^{1/3}q^{2/3}$. Έχουμε $f(p^{1/3}q^{2/3}) = (p + p^{1/3}q^{2/3})^2 + (q + p^{2/3}q^{1/3})^2$, επομένως το ελάχιστο μήκος της σκάλας που πρέπει να χρησιμοποιήσει ο Ρωμαίος είναι

$$l = \sqrt{(p + p^{1/3}q^{2/3})^2 + (q + p^{2/3}q^{1/3})^2}$$

Οι ακόλουθες εντολές τη Python υπολογίζουν το ελάχιστο μήκος της σκάλας δεδομένων των p και q σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο:

```
>>> p = input('Dose thn apostash tou fraxti apo to spiti: ')
3
>>> q = input('Dose to ypsos tou fraxti: ')
2
>>> import math
>>> l = math.sqrt( (p + p**(1/3.0)*q**(2/3.0))**2 + (q + p**(2/3.0)*q**(1/3.0))**2 )
>>> print 'To elaxisto mhkos the skalas einai', l, 'metra'
To elaxisto mhkos ths skalas einai 7.02348237922 metra
```

