ΤΕΜ-201 Διακριτά Μαθηματικά–2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Μιχάλης Πλεξουσάκης

2 Δεκεμβρίου 2012

1. **Άσκηση 9.9(β).** Θα προσδιορίσουμε τη συνέλιξη $c = a * b$ των αριθμητικών συναρτήσεων $a_r = 1$, για κάθε r, και
$$b_r = \begin{cases} 1 & r = 1 \\ 2 & r = 3 \\ 3 & r = 5 \\ -6 & r = 7 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$
Κατ΄ αρχήν,
$$c_r = \sum_{k=0}^{r} a_k b_{r-k} = \sum_{k=0}^{r} b_{r-k}, \qquad r \geq 0,$$
και επομένως $c_r = 1 + 2 + 3 - 6 = 0$ για $r \geq 7$. Επίσης, $c_0 = 0$, $c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = c_4 = 3$ και $c_5 = c_6 = 6$.

2. **'Ασκηση 9.27(ζ).** Θα προσδιορίσουμε την αριθμητική συνάρτηση που αντιστοιχεί στην γεννήτρια συνάρτηση
$$A(z) = \frac{1 + z^2}{4 - 4z - z^2}.$$
Έχουμε
$$A(z) = \frac{(-1)(4 - 4z - z^2) + 5 - 4z}{4 - 4z - z^2} = -1 + \frac{5 - 4z}{4 - 4z - z^2}$$
και
$$\frac{5 - 4z}{4 - 4z - z^2} = \frac{5 - 4z}{8 - (z + 2)^2} = \frac{A}{\alpha - z} + \frac{B}{\beta + z},$$
όπου $\alpha = 2\sqrt{2} - 2$, $\beta = 2\sqrt{2} + 2$ και
$$A = \frac{5 - 4\alpha}{\alpha + \beta}, \qquad B = \frac{5 + 4\beta}{\alpha + \beta}$$
Γράφουμε,
$$A(z) = -1 + \frac{A/\alpha}{1 - \alpha^{-1} z} + \frac{B/\beta}{1 + \beta^{-1} z}$$
από την οποία προκύπτει ότι η αριθμητική συνάρτηση της οποίας γεννήτρια συνάρτηση είναι η $A(z)$ είναι η
$$a_r = \begin{cases} -1 + \frac{A}{\alpha} + \frac{B}{\beta} & r = 0 \\ \frac{A}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^r + \frac{B}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}\right)^r & r \geq 1 \end{cases}$$

ή, ισοδύναμα,

$$a_r = \begin{cases} 1/4 & r = 0 \\ \frac{10-3\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^r + \frac{10+3\sqrt{2}}{16}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^r & r \geq 1 \end{cases}$$

3. **Άσκηση 10.1(α)**. Θα λύσουμε την αναδρομική σχέση $a_r - 7a_{r-1} + 10a_{r-2} = 0$ με $a_0 = 0$ και $a_1 = 3$. Πολλαπλασιάζουμε την αναδρομική σχέση με z^r και αθροίζουμε από $r = 2$ μέχρι άπειρο:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{r=2}^{\infty} a_r z^r - 7\sum_{r=2}^{\infty} a_{r-1} z^r + 10\sum_{r=2}^{\infty} a_{r-2} z^r \\ &= [A(z) - a_0 - a_1 z] - 7z\sum_{r=2}^{\infty} a_{r-1} z^{r-1} + 10z^2 \sum_{r=2}^{\infty} a_{r-2} z^{r-2} \\ &= [A(z) - a_0 - a_1 z] - 7z[A(z) - a_0] + 10z^2 A(z) \\ &= (1 - 7z + 10z^2)A(z) - (a_1 - 7a_0)z + a_0 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$A(z) = \frac{(a_1 - 7a_0)z - a_0}{1 - 7z + 10z^2} = \frac{3z}{(1-5z)(1-2z)} = \frac{1}{1-5z} - \frac{1}{1-2z}$$

οπότε η αριθμητική ακολουθία της οποίας γεννήτριας συνάρτηση είναι η $A(z)$ είναι η $a_r = 5^r - 2^r$.