ΤΕΜ-201 Διακριτά Μαθηματικά–Πρόοδος

Μιχάλης Πλεξουσάκης

1. Έστω R μια ανακλαστική σχέση πάνω σε ένα σύνολο A. Δείξτε ότι η R είναι μια σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν για κάθε (a, b) και (a, c) που ανήκουν στην R συνεπάγεται ότι και το (b, c) ανήκει στην R.

   Λύση. Θα δείξουμε ότι η R είναι συμμετρική και μεταβατική. Έστω ότι (a, b) ανήκει στην R. Επειδή η R είναι ανακλαστική ισχύει ότι (a, a) ανήκει στην R. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι (b, a) ανήκει στην R και επομένως η R είναι συμμετρική.

   Έστω τώρα $(a, b), (b, c) \in R$. Αφού h R είναι συμμετρική έχουμε $(b, a) \in R$. Από τη σχέση αυτή, το γεγονός ότι $(b, c) \in R$ και την υπόθεσή μας ισχύει ότι $(a, c) \in R$ και επομένως η R είναι μεταβατική.

2. Δείξτε ότι οι προτάσεις $(p \wedge q) \to r$ και $p \to (q \to r)$ είναι ισοδύναμες.

   Λύση. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα από τους πίνακες αλήθειας των δύο προτάσεων:

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T

3. Έστω A, B, C τρία οποιαδήποτε σύνολα. Δείξτε ότι

$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B).$$

   Λύση. Έστω $x \in C - (A \cap B)$. Τότε $x \in C$ και $x \notin A \cap B$. Αφού $x \notin A \cap B$ είτε (α) $x \in A$ και $x \notin B$, είτε (β) $x \notin A$ και $x \in B$, είτε (γ) $x \notin A$ και $x \notin B$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $x \in C - B$, στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $x \in C - A$ και στην τρίτη περίπτωση έχουμε $x \in C - A$ και $x \in C - B$. Και στις τρείς περιπτώσεις $x \in (C - A) \cup (C - B)$, επομένως

$$C - (A \cap B) \subseteq (C - A) \cup (C - B). \tag{1}$$

   Αντίστροφα, έστω $x \in (C - A) \cup (C - B)$. Τότε, είτε $x \in C - A$ είτε $x \in C - B$, είτε και τα δύο. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $x \in C$ και $x \notin A$. Αφού $x \notin A$

έχουμε και $x \notin A \cap B$. Επομένως $x \in C - (A \cap B)$. Η δεύτερη περίπτωση είναι ανάλογη. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν

$$(C - A) \cup (C - B) \subseteq C - (A \cap B). \tag{2}$$

Το ζητούμενο συνεπάγεται αμέσως από τις σχέσεις (1) και (2).

4. Αποδείξτε ότι το $4^n + 15n - 1$ διαρείται με το 9 για κάθε $n \geq 1$.

   Λύση. Το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$ μιά και $4 + 15 - 1 = 18$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Έστω ότι η πρόταση προς απόδειξη ισχύει για τον φυσικό αριθμό n. Έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned} 4^{n+1} + 15(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 15n + 15 - 1 \\ &= 4(4^n + 15n - 1) - 4 \cdot 15n + 4 + 15n + 15 - 1 \\ &= 4(4^n + 15n - 1) - 45n + 18. \end{aligned}$$

   Οι δύο τελευταίοι όροι είναι προφανώς πολλαπλάσια του 9 ενώ για τον πρώτο ισχύει το ίδιο από την επαγωγική υπόθεση.

5. Ανάμεσα σε 100 φοιτητές, 32 μελετούν μαθηματικά, 20 φυσική, 45 βιολογία, 15 μελετούν μαθηματικά και βιολογία, 7 μαθηματικά και φυσική, 10 φυσική και βιολογία, και 30 δεν μελετούν κανένα από τα τρία αντικείμενα. Βρείτε

   (α′) τον αριθμό των φοιτητών που μελετούν και τα τρία αντικείμενα

   (β′) τον αριθμό των φοιτητών που μελετούν ακριβώς ένα από τα τρία αντικείμενα

   Λύση. Έστω M το σύνολο των φοιτητών που μελετούν μαθηματικά, Φ το σύνολο των φοιτητών που μελετούν φυσική και B το σύνολο των φοιτητών που μελετούν βιολογία. Γνώρίζουμε ότι

$$\begin{gathered} |M| = 32, \quad |\Phi| = 20, \quad |B| = 45, \\ |M \cap B| = 15, \quad |M \cap \Phi| = 7, \quad |\Phi \cap B| = 10, \end{gathered}$$

   καθώς επίσης ότι 30 φοιτητές δεν μελετούν κανένα από τα τρία αντικείμενα. Αφού το σύνολο των φοιτητών είναι 100, προκύπτει ότι $100 - 30 = 70$ φοιτητές μελετούν **τουλάχιστον ένα αντικείμενο**, με άλλα λόγια $|M \cup \Phi \cup B| = 70$.

   (α′) Το σύνολο των φοιτητών που μελετούν και τα τρία αντικείμενα είναι προφανώς το $M \cap \Phi \cap B$. Από τη σχέση

$$|M \cup \Phi \cup B| = |M| + |\Phi| + |B| - |M \cap \Phi| - |M \cap B| - |\Phi \cap B| + |M \cap \Phi \cap B|$$

   προκύπτει αμέσως ότι $|M \cap \Phi \cap B| = 5$.

   (β′) Ο αριθμός των φοιτητών που μελετούν ακριβώς ένα αντικείμενο είναι

$$|M - (\Phi \cup B)| + |\Phi - (M \cup B)| + |B - (M \cup \Phi)|.$$

Από το γεγονός ότι γιά οποιαδήποτε σύνολα P, Q, R ισχύει

$$\begin{aligned} |P-(Q\cup R)| &= |P| - |P\cap(Q\cup R)| \\ &= |P| - |(P\cap Q)\cup(P\cap R)| \\ &= |P| - (|P\cap Q| + |P\cap R| - |P\cap Q\cap R|) \end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} |M-(\Phi\cup B)| &= 32-7-15+5=15, \\ |\Phi-(M\cup B)| &= 20-7-10+5=8, \\ |B-(M\cup\Phi)| &= 45-15-10+5=25. \end{aligned}$$

Επομένως το σύνολο των φοιτητών που μελετούν ακριβώς ένα αντικείμενο είναι $15+8+25=48$.

6. Αποδείξτε ότι γιά κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

Λύση. Το ζητούμενο ισχύει για $n=2$ αφού

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}.$$

Έστω ότι η προς απόδειξη πρόταση ισχύει γιά τον φυσικό αριθμό n. Τότε,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \\ &\quad = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &\quad = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \\ &\quad > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &\quad > \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί ο όρος $1/(2n+1)(2n+2)$ είναι θετικός, ενώ η δεύτερη λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.

7. Θεωρούμε το σύνολο $S = \{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακεραίων. Πάνω στο S θεωρούμε τη σχέση R, όπου $(a/b, c/d) \in R$ αν και μόνο αν $ad = bc$. Αποδείξτε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Λύση. Θα δείξουμε ότι η σχέση R είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Από το γεγονός ότι $ab = ba$ προκύπτει ότι $(a/b, a/b)$ ανήκει στην R και άρα η R είναι ανακλαστική. Έστω τώρα ότι $(a/b, c/d) \in R$. Τότε $ad = bc$ ή, ισοδύναμα,

$cb = da$ από την οποία προκύπτει ότι $(c/d, a/b) \in R$ και επομένως η R είναι συμμετρική. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $(a/b, c/d) \in R$ και $(c/d, e/f) \in R$. Από την πρώτη σχέση προκύπτει ότι $ad = bc$ και από την δεύτερη ότι $cf = de$. Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης $ad = bc$ επί f έχουμε $fad = fbc$. Αφού $cf = de$ έχουμε $fad = bde$. Μιά και $d \neq 0$ προκύπτει ότι $af = be$ δηλαδή $(a/b, e/f) \in R$. Άρα η σχέση R είναι μεταβατική.