ΤΕΜ-202 Σχεδίαση και Ανάλυση Αλγορίθμων
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Ημερομηνία Παράδοσης **10 Ιουνίου 2013, 23:59**

1. Ἐστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυντό, εμβαρές γράφημα με σύνολο κόμβων $V = \{a, b, c, d, e\}$, σύνολο ακμών $E = \{(a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (d, e), (e, c)\}$ και αντίστοιχα βάρη 1, 2, 2, -1, -1, 3. Εφαρμόστε τον αλγόριθμο του Dijkstra στο συγκεκριμένο γράφημα και δείξτε ακριβώς σε ποιό σημείο αποτυγχάνει. Χρησιμοποιήστε μετά τον αλγόριθμο Bellman–Ford για να υπολογίσετε τα βάρη των ελαφρύτατων διαδρομών από τον κόμβο a.

2. Έστω $Ax \leq b$ ένα σύστημα m περιορισμών διαφοράς για n αγνώστους. Δείξτε ότι ο αλγόριθμος των Bellman–Ford, όταν εκτελείται στο αντίστοιχο γράφημα περιορισμών, παράγει μια λύση για την οποία $\max\{x_i\} = 0$.

3. Προτείνετε και γράψτε μια απλή αλλαγή του αλγορίθμου του Dijkstra η οποία υπολογίζει τα βάρη των *βαρύτατων* διαδρομών από ένα αφετηριακό κόμβο.

4. Έστω $G = (V, E)$ ένα κατευθυντό γράφημα με συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$, και έστω $n = |V|$. Ορίζουμε το μέσο βάρος ενός κύκλου $c = \langle e_1, e_2, \ldots, e_k \rangle$, όπου $e_i \in E$, ως

$$\mu(c) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} w(e_i)$$

   Υποθέτουμε ότι κάθε κόμβος του γραφήματος είναι προσβάσιμος από τον αφετηριακό κόμβο s και ορίζουμε, κατά τα γνωστά, $\delta(s, v)$ το βάρος της ελαφρύτατης διαδρομής από τον s στον v. Ορίζουμε επίσης, $\delta_k(s, v)$ το βάρος της ελαφρύτατης διαδρομής από τον s στον v η οποία αποτελείται από ακριβώς k ακμές. Αν δεν υπάρχει διαδρομή από τον s στον v με k ακμές θέτουμε $\delta_k(s, v) = \infty$. Ορίζουμε επίσης μ^* ως το ελάχιστο από τα μέσα βάρη κύκλων στο G. Δείξτε ότι αν $\mu^* = 0$ τότε το G δεν περιέχει κύκλους αρνητικού βάρους και ότι $\delta(s, v) = \min_{0 \leq k \leq n-1} \delta_k(s, v)$ για κάθε $v \in V$.