Κεφάλαιο 1

Βέλτιστες προσεγγίσεις σε χώρους με νόρμα.

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε κυρίως τις σημειώσεις παραδόσεων του Γ. Δ. Ακρίβη, βλ. [1] στη βιβλιογραφία.

1.1 Βέλτιστες προσεγγίσεις - Ύπαρξη.

Ορισμος 1.1.1 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $Y \subset X$, $x \in X$. Ένα στοιχείο $y^* \in Y$ (αν υπάρχει) τέτοιο ώστε*

$$\|x - y^*\| \leqq \|x - y\| \quad \forall y \in Y,$$

λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του x από το Y.

Ορισμος 1.1.2 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $Y \subset X$, $x \in X$. Ορίζουμε ως απόσταση του x από το Y την ποσότητα*

$$d(x, Y) := \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Επομένως ένα στοιχείο $y^* \in Y$ λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του x από το Y εάν

$$\|x - y^*\| = d(x, Y).$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ύπαρξη βέλτιστων προσεγγίσεων όταν το σύνολο από το οποίο προσεγγίζουμε είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης.

Θεωρημα 1.1.1 (Θεμελιωδες θεωρημα θεωριας προσεγγισεων.) *Έστω Y υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ και $x \in X$. Τότε υπάρχει $y^* \in Y$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - y^*\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Δηλ. υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από στοιχεία του Y.

Απόδειξη. Επειδή το Y είναι υπόχωρος του X έπεται ότι το $0 \in Y$. Άρα αν y^* είναι βέλτιστη προσέγγιση, τότε $\|x - y^*\| \leqq \|x - 0\| = \|x\|$. Επομένως αρκεί να αναζητήσουμε το y^* ανάμεσα σε στοιχεία y του Y για τα οποία $\|x - y\| \leqq \|x\|$. Είναι όμως βολικό να μεγαλώσουμε λίγο το σύνολο αυτό. Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν $y \in Y$ με $\|x - y\| \leqq \|x\|$, τότε θα έχουμε:

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leqq \|x - y\| + \|x\| \leqq \|x\| + \|x\| = 2\|x\|.$$

Θεωρούμε επομένως το σύνολο $S := \{y \in Y : \ \|y\| \leqq 2\|x\|\}$. Το S είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου πεπερασμένης διάστασης, και άρα είναι συμπαγές.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : S \to \mathbb{R}$ με $f(y) := \|x - y\|$. Η f είναι συνεχής, αφού

$$|f(y) - f(x)| \leqq \Big| \|x - y\| - \|x - z\| \Big| \leqq \|x - y + z - x\| = \|y - z\|.$$

Επομένως η f λαμβάνει στο S ελάχιστο, δηλ. υπάρχει $y^* \in S$, τέτοιο ώστε

$$\|x - y^*\| = \inf_{y \in S} \|x - y\|.$$

Επιπλέον, αν $y \in Y \setminus S$, τότε $\|y\| > 2\|x\|$, οπότε

$$\|y - x\| \geqq \|y\| - \|x\| > 2\|x\| - \|x\| = \|x\| = \|x - 0\| \geqq \|x - y^*\|,$$

αφού $0 \in S$. □

Παρατήρηση. Η υπόθεση ότι ο Y είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης είναι βασική. Θεωρήστε, για παράδειγμα, το χώρο $\left(C\left[0, \frac{1}{2}\right], \|\cdot\|_\infty\right)$, και έστω $\mathbb{P}$ ο υπόχωρος όλων των πολυωνύμων. Έστω ακόμη $f(x) := \frac{1}{1-x}$. Προφανώς $f \in C\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Θεωρήστε τώρα την ακολουθία $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$. Τότε $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, δηλ. $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα. Δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \left|f(x) - (1 + x + \cdots + x^N)\right| < \varepsilon, \ 0 \leqq x \leqq 1/2$. Επομένως αν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}$, έστω p^*, θα πρέπει να ικανοποιεί $\|f - p^*\| = 0 \Rightarrow f = p^*$ $\Rightarrow p^*(x) = \frac{1}{1-x} \notin \mathbb{P}$, άτοπο.

1.2 Μοναδικότητα βέλτιστων προσεγγίσεων

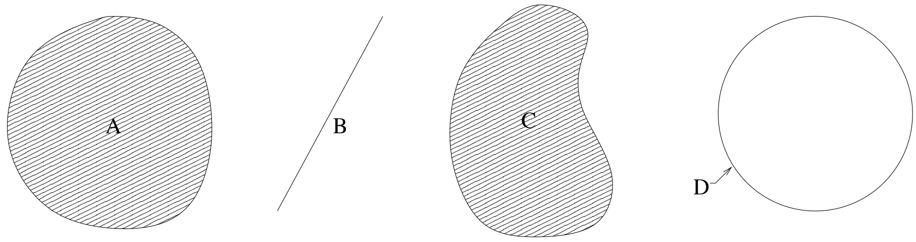
Εδώ θα αχοληθούμε με την περίπτωση προσέγγισης από υπόχωρους και θα δώσουμε συνθήκες υπό τις οποίες η βέλτιστη προσέγγιση είναι μοναδική.

Θα ξεκινήσουμε με δύο ορισμούς.

Ορισμος 1.2.1 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Ονομάζουμε το σύνολο $S := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ μοναδιαία σφαίρα του X (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$).*

Ορισμος 1.2.2 *Ένα υποσύνολο K ενός γραμμικού χώρου X λέγεται κυρτό αν για κάθε $x, y \in K$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$: $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.*

Παράδειγμα. Στο Σχήμα 1.1 τα A, B είναι κυρτά, ενώ τα C, D είναι μη κυρτά.



Σχήμα 1.1: Παραδείγματα κυρτών και μη κυρτών συνόλων

Προταση 1.2.1 *Έστω Y ένας υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ και $x \in X$. Έστω $\mathcal{B}$ το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων του x από τον Y. Τότε το $\mathcal{B}$ είναι κυρτό.*

Απόδειξη. Αν το $\mathcal{B} = \emptyset$, τότε ο ισχυρισμός είναι προφανώς αληθής. Έστω τώρα $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$. Δηλ. θα ισχύει $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, Y)$. Έστω $\lambda \in (0,1)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \mathcal{B}$.

$$\begin{aligned}
\|x - (\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2)\| &= \|\lambda(x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2)\| \\
&\leqq \lambda\|x - y_1\| + (1-\lambda)\|x - y_2\| \\
&= \lambda\, d(x, Y) + (1-\lambda)\, d(x, Y) = d(x, Y).
\end{aligned}$$

Συνεπώς το $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in \mathcal{B}$, και άρα το $\mathcal{B}$ είναι κυρτό. □

Παρατήρηση. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.1, παρατηρούμε ότι όταν προσεγγίζουμε από υπόχωρο, τότε ή δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση, ή υπάρχει ακριβώς μία, ή υπάρχουν άπειρες.

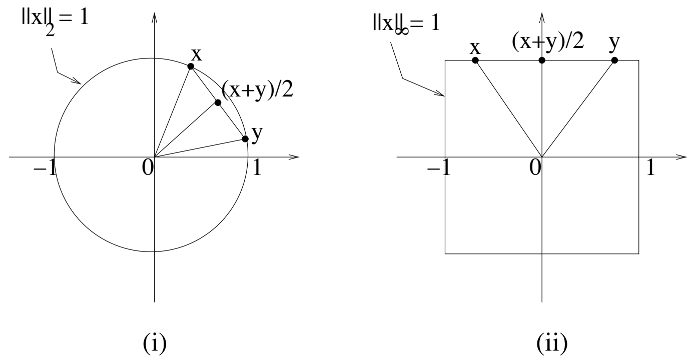
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε χώρους στους οποίους η βέλτιστη προσέγγιση για κάθε στοιχείο του χώρου και από κάθε υπόχωρό του πεπερασμένης διάστασης ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο. Τέτοιοι είναι οι αυστηρά κυρτοί χώροι.

Ορισμος 1.2.3 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Λέμε ότι η μοναδιαία σφαίρα του X είναι αυστηρά κυρτή αν ισχύει*

$$x, y \in X, \;\; x \neq y, \;\; \|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Τότε λέμε επίσης ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή, ή ακόμη ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα.

Παράδειγμα. Αν θεωρήσουμε τη μοναδιαία σφαίρα στο χώρο $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\right)$ (βλ. (i) στο Σχήμα 1.2) είναι προφανές ότι αν $x \neq y$, $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1 \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2 < 1$. Αν όμως θεωρήσουμε τη μοναδιαία σφαίρα στο χώρο $\left(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty\right)$ (βλ. (ii) στο Σχήμα 1.2), τότε $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, αλλά και $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\infty = 1$.



Σχήμα 1.2:

Παρατήρηση. Γεωμετρικά, η μοναδιαία σφαίρα θα είναι αυστηρά κυρτή αν δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα.

Λημμα 1.2.1 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυστηρά κυρτός χώρος.

(ii) Αν $x, y \in X$ με $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, τότε τα x, y είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη.
(ii)$\Rightarrow$(i) Έστω ότι ισχύει η (ii). Τότε έπεται άμεσα ότι αν τα x, y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Έστω $x, y \in X$, $x \neq y$ με $\|x\| = \|y\| = 1$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha x + \beta y = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 = \|\alpha x + \beta y\| &\geqq \Big| \|\alpha x\| - \|\beta y\| \Big| = \Big| |\alpha|\, \|x\| - |\beta|\, \|y\| \Big| = \Big| |\alpha| - |\beta| \Big| \\ \Rightarrow \quad |\alpha| = |\beta| &\Rightarrow \alpha = \pm\beta. \end{aligned}$$

Άρα $\alpha(x \pm y) = 0$, και συνεπώς είτε $\alpha = \beta = 0$, οπότε τα x, y είναι γραμμ. ανεξάρτητα, ή $x = -y$.

Αν τα x, y είναι γραμμ. ανεξάρτητα, τότε $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|x+y\| < \frac{1}{2}\left(\|x\| + \|y\|\right) = 1$.

Αν $x = -y$, τότε προφανώς $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 0 < 1$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Αρκεί να δείξουμε ότι αν δεν ισχύει η (ii), τότε δεν ισχύει η (i). Αν δεν ισχύει η (ii), τότε θα υπάρχουν x, y γραμμικώς ανεξάρτητα τέτοια ώστε $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\|x\| \leqq \|y\|$. Ορίζουμε

$$x^* = \frac{x}{\|x\|} \quad \text{και} \quad y^* = \frac{y}{\|y\|}.$$

Τότε προφανώς $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ και (επειδή τα τα x, y είναι γραμμ. ανεξάρτητα) $x^* \neq y^*$.

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\left\|\frac{x^*+y^*}{2}\right\| \geqq 1$, ή ισοδύναμα, ότι $\|x^* + y^*\| \geqq 2$.

$$\begin{aligned}
\|x^* + y^*\| &= \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|} - \left(\frac{y}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \\
&\geqq \frac{1}{\|x\|}\|x+y\| - \left|\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right| \|y\| \\
&= \frac{1}{\|x\|}(\|x\| + \|y\|) - \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|y\|}\right)\|y\| = 2.
\end{aligned}$$

□

Άρα σύμφωνα με το Λήμμα 1.2.1 μπορούμε εναλλακτικά να δώσουμε και τον ακόλουθο ορισμό της αυστηρής κυρτότητας.

Ορισμος 1.2.4 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Λέμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή (η μοναδιαία σφαίρα του $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυστηρά κυρτή, ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι αυστηρά κυρτός) αν ισχύει*

$$x, y \in X : \ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x, y \text{ γραμμικά εξαρτημένα.}$$

Θα αποδείξουμε τώρα τη μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης σε αυστηρά κυρτούς χώρους.

Θεωρημα 1.2.1 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα. Αν ο Y είναι ένας υπόχωρος του X, τότε $\forall x \in X$ υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y.*

Απόδειξη. Αν $x \in Y$, τότε η μοναδική βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y είναι προφανώς το ίδιο το x.

Έστω λοιπόν $x \notin Y$ και y_1, y_2 βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον Y. Δηλαδή $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, Y)$. Τότε

$$\begin{aligned}
& \left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\| = \left\|\frac{x - y_1}{2} + \frac{x - y_2}{2}\right\| \leqq \frac{1}{2}\big(\|x - y_1\| + \|x - y_2\|\big) = d(x, Y) \\
\Rightarrow \quad & \|(x - y_1) + (x - y_2)\| = 2\, d(x, Y) = \|x - y_1\| + \|x - y_2\|.
\end{aligned}$$

Επειδή ο X είναι αυστηρά κυρτός, έπεται ότι $x - y_1$ και $x - y_2$ είναι γραμμ. εξαρτημένα, άρα υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R} : x - y_1 = \lambda(x - y_2) \Rightarrow (1-\lambda)\, x = y_1 - \lambda\, y_2$. Επειδή $y_1 - \lambda\, y_2 \in Y$ και $x \notin Y$, θα πρέπει αναγκαστικά $\lambda = 1 \Rightarrow y_1 = y_2$. □

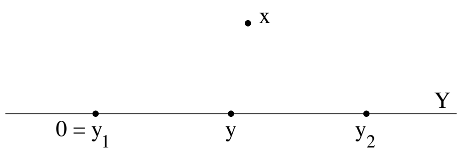
Δείχνουμε τώρα και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2.2 *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας μη αυστηρά κυρτός χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει ένας υπόχωρος Y του X και ένα $x \in X$, τέτοια ώστε να υπάρχουν δύο (και συνεπώς άπειρες) βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον Y.*

Απόδειξη. Αφού ο $(X, \|\cdot\|)$ δεν είναι αυστηρά κυρτός θα υπάρχουν $u, v \in X$, $u \neq v$, και $\|u\| = \|v\| = \left\|\frac{u+v}{2}\right\| = 1$ (βλ. Ορισμό 1.2.3).

Θέτουμε $Y := \operatorname{span}(u-v) = \{\lambda(u-v),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ και $x := -v$. Θα δείξουμε ότι το $y_1 := 0$ και το $y_2 := u - v$ είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον Y. Θέτουμε ακόμη $y := \frac{u-v}{2}$, (βλ. Σχήμα 1.3), και θα δείξουμε ότι

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \|x - y\|.$$



Σχήμα 1.3:

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&\|x - y_1\| = \|x\| = \|-v\| = \|v\| = 1,\\
&\|x - y_2\| = \|-v-(u-v)\| = \|-u\| = \|u\| = 1,\\
&\|x - y\| = \left\|-v - \frac{u-v}{2}\right\| = \left\|-\frac{u+v}{2}\right\| = \left\|\frac{u+v}{2}\right\| = 1.
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει $y^* \in Y$ τέτοιο ώστε $\|x - y^*\| < \|x - y\|$. Επειδή $y^* \in Y \setminus \{y_1, y_2, y\}$ θα έχουμε ότι υπάρχει δείκτης $k \in \{1, 2\}$ και $\lambda \in (0,1)$: $y = \lambda y_k + (1-\lambda)y^*$. (Πράγματι, $y^* \in Y \Rightarrow y^* = \mu y_2$. Επομένως, αν $\mu > 1/2$, τότε το y γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των y_1 και y^*, ενώ αν $\mu < 1/2$, τότε το y γράφεται ως κυρτός συνδυασμός των y_2 και y^*.) Οπότε

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|x - (\lambda y_k + (1-\lambda)y^*)\| = \|\lambda(x - y_k) + (1-\lambda)(x - y^*)\|\\
&\leqq \lambda\|x - y_k\| + (1-\lambda)\|x - y^*\|\\
&< \lambda\|x - y\| + (1-\lambda)\|x - y\| = \|x - y\|,
\end{aligned}$$

άτοπο. Συνεπώς το y_1 και το y_2 είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον Y. □

Παρατήρηση. Είδαμε ότι το πρόβλημα της προσέγγισης από έναν υπόχωρο λύνεται μονοσήμαντα όταν βρισκόμαστε σ' έναν αυστηρά κυρτό χώρο με νόρμα (υπάρχει δηλαδή για κάθε x το *πολύ μία* βέλτιστη προσέγγιση από έναν υπόχωρο). Όμως υπάρχουν υπόχωροι και σε μη αυστηρά κυρτούς χώρους για τους οποίους το πρόβλημα λύνεται μονοσήμαντα. (Ότι αυτό δεν συμβαίνει *για κάθε* υπόχωρο και *για κάθε* x το αποδείξαμε στο Θεώρημα 1.2.2.)

Θα δώσουμε τώρα μερικά παραδείγματα αυστηρά κυρτών και μη αυστηρά κυρτών χώρων.

Παραδείγματα.

1. Έστω $1 < p < \infty$. Τότε οι χώροι με νόρμα $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$, $(C[a,b], \|\cdot\|_{w,p})$ και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ είναι αυστηρά κυρτοί.

2. Οι χώροι $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ και $(C[a,b], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι αυστηρά κυρτοί.

   Πάρτε π.χ. τις συναρτήσεις $f(x) = x$ και $g(x) = x^2$ στο [0,1]. Οι f και g είναι γραμμικά ανεξάρτητες (**γιατί;**), όμως $\|f+g\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |x + x^2| = 2$, $\|f\|_\infty = 1$ και $\|g\|_\infty = 1$. Άρα $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

   Ομοίως και για τον $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$.

Κεφάλαιο 2

Ομοιόμορφες προσεγγίσεις συναρτήσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε, κυρίως, τις σημειώσεις παραδόσεων των Σ. Νοτάρη, [7], και N. L. Carothers, [3].

2.1 Ομοιόμορφες προσεγγίσεις συναρτήσεων.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε την ομοιόμορφη προσέγγιση συναρτήσεων, που ορίζονται σ' ένα διάστημα $[a, b]$, από στοιχεία του $\mathbb{P}_n$ (του χώρου των πολυωνύμων βαθμού $\leqq n$). Θα εργαστούμε δηλαδή στο χώρο $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, και δοθείσης μιας συνάρτησης $f \in C[a, b]$, θα αναζητήσουμε ένα πολυώνυμο $p_n^* \in \mathbb{P}_n$, που να προσεγγίζει την f ομοιόμορφα κατά βέλτιστο τρόπο, δηλαδή

$$\|f - p_n^*\|_\infty \leqq \|f - p\|_\infty \quad \forall p \in \mathbb{P}_n.$$

Στην περίπτωση αυτή η *ύπαρξη* βέλτιστων προσεγγίσεων εξασφαλίζεται από το θεμελιώδες θεώρημα της θεωρίας προσεγγίσεων (βλ. Θεώρημα 1.1.1). Δυστυχώς όμως η *μοναδικότητα* δεν εξασφαλίζεται από αυτά που έχουμε πει μέχρι τώρα μιας και η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ *δεν* είναι αυστηρά κυρτή. Παρόλα αυτά και εδώ έχουμε μοναδικότητα, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Για να υπογραμμίσουμε τη σημασία της ομοιόμορφης προσέγγισης παρατηρούμε ότι όταν π.χ. $\|f - \phi\|_\infty < \varepsilon$, τότε προφανώς $\forall x \in [a, b]$: $|f(x) - \phi(x)| < \varepsilon$, και επιπλέον για κάθε νόρμα $\|\cdot\|_p$, με $p \geqq 1$ θα έχουμε $\|f - \phi\|_p < \sqrt[p]{b-a}\,\varepsilon$ (αφού $\forall g \in C[a, b]$, $\|g\|_p = \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{1/p} \leqq (b-a)^{1/p}\|g\|_\infty$). Άρα «καλές» *ομοιόμορφες* προσεγγίσεις είναι «καλές» σε οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|_p$, $p \geqq 1$.

Συμβολισμός. Αν $f \in C[a, b]$ και p_n^* είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$, θα συμβολίζουμε το μέγεθος $\|f - p_n^*\|_\infty$ με $E_n(f;[a,b])$. Δηλαδή

$$\forall f \in C[a,b] \quad E_n(f;[a,b]) := \min_{p \in \mathbb{P}_n} \|f - p\|_\infty. \tag{2.1}$$

Επιπλέον, θα γράφουμε $E_n(f)$ αντί για $E_n(f;[a,b])$, όταν είναι προφανές ότι αναφερόμαστε στο διάστημα $[a,b]$.

Άρα το $E_n(f)$ είναι ουσιαστικά το σφάλμα της βέλτιστης προσέγγισης στην $\|\cdot\|_\infty$. Ένα σημαντικό ερώτημα που προκύπτει είναι: Πώς συμπεριφέρεται το $E_n(f;[a,b])$ καθώς $n \to \infty$; Επειδή $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$, $\forall n$, είναι προφανές ότι $E_n(f) \geqq E_{n+1}(f)$, $\forall n$. Θα αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[a,b]$ ισχύει $E_n(f;[a,b]) \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα πεπερασμένο διάστημα μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα με πολυώνυμα με δεδομένη ακρίβεια. Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται στο γνωστό θεώρημα του Weierstrass.

Θεωρημα 2.1.1 (Weierstrass) *Έστω $g \in C[a,b]$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε*

$$\|g - p\|_\infty < \varepsilon.$$

Απόδειξη του Bernstein.

Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Bernstein που κατασκευάζει το ζητούμενο πολυώνυμο.

Καταρχήν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να περιοριστούμε στον $C[0,1]$. (Πράγματι, αν το $t = (b-a)x + a$, και το t κινείται μεταξύ των a και b, τότε το x κινείται μεταξύ του 0 και του 1. Έτσι $g(t) = g((b-a)x + a) =: f(x)$ και εφόσον η g είναι συνεχής στο $[a,b]$ η f είναι συνεχής στο [0,1]. Άρα αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για συναρτήσεις $f \in C[0,1]$.

Αν f είναι μια φραγμένη συνάρτηση στο [0,1], ορίζουμε την ακολουθία των πολυωνύμων του Bernstein για την f ως εξής:

$$\left(B_n(f)\right)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 0 \leqq x \leqq 1. \tag{2.2}$$

Παρατηρούμε ότι $B_n(f) \in \mathbb{P}_n$ και άμεσα διαπιστώνει κανείς ότι $\left(B_n(f)\right)(0) = f(0)$ και $\left(B_n(f)\right)(1) = f(1)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για $\varepsilon > 0$ και $f \in C[0,1]$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|f - B_{n_0}(f)\|_\infty < \varepsilon$. Για την απόδειξη απαιτείται να μελετήσουμε κυρίως τις εξής τρεις εύκολες περιπτώσεις: $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = x^2$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του ακόλουθου λήμματος.

Λημμα 2.1.1 *(i)* $B_n(f_0) = f_0,\ \ B_n(f_1) = f_1$.

(ii) $B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1$, *και άρα* $\|B_n(f_2) - f_2\|_\infty \to 0$.

(iii) $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\leqq\frac{1}{4n}$, *αν* $x\in[0,1]$.

(iv) *Δοθέντος* $\delta>0$ *και* $0\leqq x\leqq 1$, *έστω* F *το σύνολο των* $k\in\{0,1,\dots,n\}$ *για τα οποία* $\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqq\delta$. *Τότε* $\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqq\frac{1}{4n\delta^2}$.

Απόδειξη. (i) Για το $B_n(f_0)$ έχουμε (από τον τύπο του διωνύμου):

$$\big(B_n(f_0)\big)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\big[x+(1-x)\big]^n=1=f_0(x).$$

Για το $B_n(f_1)$ αρχικά παρατηρούμε ότι για $k\geqq 1$:

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\,\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\binom{n-1}{k-1}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\big(B_n(f_1)\big)(x) &:= \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\ &\overset{j=k-1}{=} x\sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{(n-1)-j}=x\big[x+(1-x)\big]^{n-1}=x\\ &= f_1(x).\end{aligned}$$

(ii) Για τον υπολογισμό του $B_n(f_2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} &= \frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{k-1+1}{n}\binom{n-1}{k-1}\\ &= \frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}\\ &= \frac{n-1}{n}\,\frac{k-1}{n-1}\binom{n-1}{k-1}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1},\ \text{για } k\geqq 1\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1},\ \text{για } k\geqq 2.\end{aligned}$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\big(B_n(f_2)\big)(x) &:= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2}(1-x)^{n-k} \\
&\quad + \frac{1}{n}\, x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^{j}(1-x)^{(n-2)-j} \\
&\quad + \frac{1}{n}\, x \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} x^{m}(1-x)^{(n-1)-m} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2 \big[x+(1-x)\big]^{n-2} + \frac{1}{n}\, x\, [x+(1-x)]^{n-1} \\
&= \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n}\, x = \left(1-\frac{1}{n}\right) f_2(x) + \frac{1}{n}\, f_1(x).
\end{aligned}
$$

(iii) Παρατηρούμε ότι $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\frac{k}{n} + x^2$. Άρα

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\overset{(i),(ii)}{=} \left(1-\frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n}\, x - 2x^2 + x^2 = \frac{1}{n}\, x(1-x) \leqq \frac{1}{4n}.
\end{aligned}
$$

(iv) Αν $k \in F$, τότε $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \geqq \delta^2$ και άρα $1 \leqq \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2$. Επομένως

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k\in F} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq \\
&\leqq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \overset{(iv)}{\leqq} \frac{1}{4n\delta^2}.
\end{aligned}
$$

□

Τώρα είμαστε σε θέση να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. Έστω $f \in C[0,1]$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο (συμπαγές) διάστημα [0,1], είναι ομοιόμορφα συνεχής. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{όταν } |x-y| < \delta.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το προηγούμενο λήμμα για να εκτιμήσουμε την $\|f - B_n(f)\|_\infty$. Παρατηρήστε ότι αν $x \in [0,1]$, τότε οι όροι $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \geqq 0$, για $k = 0, 1, \ldots, n$, και έχουν άθροισμα

1, οπότε:

$$
\begin{aligned}
|f(x) - (B_n(f))(x)| &= \Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big| \\
&= \Big| \sum_{k=0}^{n} f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \Big| \\
&\leqq \sum_{k=0}^{n} \Big| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \Big| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

Σταθεροποιούμε προς στιγμήν το n, και έστω F το σύνολο των k που ανήκουν στο $\{0, 1, \ldots, n\}$, για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqq \delta$.

Τότε αν

$$
k \notin F \Rightarrow \Big|\frac{k}{n} - x\Big| < \delta \Rightarrow \Big| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \Big| < \frac{\varepsilon}{2},
$$

ενώ, αν

$$
k \in F \Rightarrow \Big| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \Big| \leqq 2\|f\|_\infty \quad \text{(από τριγων. ανισότ.)}.
$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
|f(x) - (B_n(f))(x)| &\leqq \sum_{k=0}^{n} \Big| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \Big| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \\
&= \sum_{k \in F} \Big| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \Big| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \notin F} \Big| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \Big| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqq \\
&\leqq 2\|f\|_\infty \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&< 2\,\|f\|_\infty \,\frac{1}{4n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

αν επιλέξουμε $n > \|f\|_\infty / (\varepsilon\delta^2)$. $\square$

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε μερικές παρατηρήσεις. Τα πολυώνυμα Bernstein προσφέρουν ένα σαφή και βολικό τρόπο υπολογισμού πολυωνυμικής προσέγγισης στην f, αλλά σίγουρα δεν αποτελούν βέλτιστη προσέγγιση. Για παράδειγμα, θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_1(x) = x$ και $f_2(x) = x^2$. Τότε $B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1 \neq f_2$. Προφανώς, η βέλτιστη προσέγγιση της f_2 από τον $\mathbb{P}_2$, για $n \geqq 2$, θα έπρεπε να είναι η ίδια η f_2. Βεβαίως η ακολουθία $\{B_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [0,1], και επιπλέον ισχύει ότι $E_n(f) \leqq \|f - B_n(f)\|_\infty$ (**γιατί;**). Άρα, το επόμενο φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει είναι: Πόσο καλή είναι η προσέγγιση αυτή; Ή, αλλιώς, είναι δυνατόν να βρούμε κάποιο φράγμα για το σφάλμα $\|f - B_n(f)\|_\infty$;

Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις συνεχείς συναρτήσεις. Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας κάποιο ακόμα συμβολισμό.

Ορισμος 2.1.1 *Έστω f φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$. Για κάθε $\delta > 0$ ορίζουμε ως μέτρο μεγέθους της συνέχειας της f στο $[a,b]$, την ποσότητα*

$$\omega_f(\delta) = \omega_f\Big([a,b];\delta\Big) := \sup\Big\{|f(x)-f(y)|:\ \ x,y\in[a,b],\ \ |x-y|<\delta\Big\}. \tag{2.3}$$

Π.χ., αν το γράφημα της f παρουσιάζει ένα άλμα ασυνέχειας ίσο με 1, τότε $\omega_f(\delta) \geqq 1$. Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες εύκολες ιδιότητες για το μέτρο μεγέθους της συνέχειας.

Λημμα 2.1.2 *(i) Αν $0 < \delta_1 \leqq \delta_2$, τότε $\omega_f(\delta_1) \leqq \omega_f(\delta_2)$.*

(ii) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνον αν $\omega_f(\delta) \to 0$, καθώς $\delta \to 0^+$.

Η απόδειξη αφήνεται ως **άσκηση**.

Λημμα 2.1.3 *Έστω f μια φραγμένη συνάρτηση στο $[a,b]$ και $\delta > 0$. Τότε $\omega_f(n\delta) \leqq n\omega_f(\delta)$ για $n = 1,2,\dots$. Συνεπώς, $\omega_f(\lambda\delta) \leqq (1+\lambda)\omega_f(\delta)$, για κάθε $\lambda > 0$.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$ με $|x-y| < n\delta$. Χωρίζουμε τότε το διάστημα $[x,y]$ σε n υποδιαστήματα, το καθένα μήκους $\leqq \delta$. Ειδικότερα, θέτουμε $z_k = x + k(y-x)/n$, $k = 0,1,\dots,n$, οπότε $|z_k - z_{k-1}| \leqq \delta$ για κάθε $k \geqq 1$, και άρα

$$|f(x)-f(y)| = \Big|\sum_{k=1}^{n}\left(f(z_k)-f(z_{k-1})\right)\Big| \leqq \sum_{k=1}^{n}\Big|f(z_k)-f(z_{k-1})\Big| \leqq n\omega_f(\delta).$$

Επομένως $\omega_f(n\delta) \leqq n\omega_f(\delta)$.

Τώρα, δεδομένου ενός $\lambda > 0$ υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $n-1 < \lambda \leqq n$, οπότε

$$\omega_f(\lambda\delta) \leqq \omega_f(n\delta) \leqq n\,\omega_f(\delta) \leqq (1+\lambda)\,\omega_f(\delta).$$

□

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το βασικό μας αποτέλεσμα.

Θεωρημα 2.1.2 *Αν f είναι μια φραγμένη συνάρτηση στο $[0,1]$, τότε*

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leqq \frac{3}{2}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε και στην απόδειξη του θεωρήματος του Weierstrass

$$\begin{aligned}
|f(x)-(B_n(f))(x)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big| \\
&\leqq \sum_{k=0}^{n}\Big|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\Big|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leqq \sum_{k=0}^{n}\omega_f\left(\Big|x-\frac{k}{n}\Big|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τώρα το προηγούμενο λήμμα, οπότε έχουμε

$$\omega_f\left(\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)=\omega_f\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqq\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Άρα

$$\begin{aligned}
|f(x)-(B_n(f))(x)| &\leqq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1+\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right].
\end{aligned}$$

Απομένει να εκτιμήσουμε το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz (αφού κάθε όρος $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geqq 0$) και έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqq\\
&\leqq\left(\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right)^{1/2}\leqq\\
&\leqq\left(\frac{1}{4n}\right)^{1/2}=\frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Έτσι, τελικά, θα έχουμε

$$\left|f(x)-(B_n(f))(x)\right|\leqq\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\sqrt{n}\,\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)=\frac{3}{2}\,\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

□

Παρατηρήσεις:

1. Αν η f είναι εκτός από φραγμένη και συνεχής στο [0,1], (επειδή το [0,1] είναι συμπαγές) είναι και ομοιόμορφα συνεχής επομένως, λόγω του Λήμματος 2.1.2, $\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\to 0$, καθώς $n\to\infty$. Τότε το Θεώρημα 2.1.2 παρέχει μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος του Weierstrass.

2. Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί $|f(x)-f(y)|\leqq K\,|x-y|^\alpha$ για κάθε $x,y\in[a,b]$, $K\geqq 0$ και $\alpha>0$, λέμε ότι η f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz (ή Hölder όπως λέγεται αλλιώς) τάξεως α με σταθερά K στο $[a,b]$. Θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Lip}_K^\alpha[a,b]$ το σύνολο των συναρτήσεων που ικανοποιούν μια τέτοια συνθήκη. Παρατηρήστε ότι αν $f\in\mathrm{Lip}_K^\alpha[a,b]$ με $\alpha>1$, τότε η f' υπάρχει στο $[a,b]$ και είναι ταυτοτικά μηδέν. Έτσι, όταν $\alpha>1$, η κλάση $\mathrm{Lip}_K^\alpha[a,b]$ αποτελείται μόνο από σταθερές, επομένως η συνθήκη Lipschitz παρουσιάζει ενδιαφέρον όταν $0<\alpha\leqq 1$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι $f\in\mathrm{Lip}_K^\alpha[a,b]\Leftrightarrow\omega_f(\delta)\leqq K\delta^\alpha$. Συνεπώς, αν η συνάρτηση f του Θεωρήματος 2.1.2 ανήκει στον $\mathrm{Lip}_K^\alpha[a,b]$, τότε η σχέση (2.4) παίρνει τη μορφή

$$\|f-B_n(f)\|_\infty\leqq\frac{3}{2}\,K\,n^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.5}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $f \in \mathrm{Lip}_1^1[0,1]$, οπότε θα έχουμε, λόγω της (2.5), ότι $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqq \frac{3}{2}\, n^{-\frac{1}{2}}$. Ας δούμε όμως τι γίνεται για $x = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \big(B_n(f)\big)(1/2) - f(1/2) &= \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Αν το n είναι άρτιο, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα αυτό αναλυτικά

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k}{n} - \frac{1}{2}\right| \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \binom{n}{n/2},$$

οπότε

$$\left|\big(B_n(f)\big)(1/2) - f(1/2)\right| = \frac{\binom{n}{n/2}}{2^{n+1}}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling: $\sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n\, \mathrm{e}^{-n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right)$ παίρνουμε ότι $\binom{n}{n/2} > \frac{1}{4}\, n^{-\frac{1}{2}}$, και άρα

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \geqq \left|\big(B_n(f)\big)(1/2) - f(1/2)\right| > \frac{1}{4}\, n^{-\frac{1}{2}}.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Bernstein δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι θα βελτιώσουμε το φράγμα (2.5), τουλάχιστον όσον αφορά τον εκθέτη του n

Παρόλα αυτά ο D. Jackson κατάφερε να βελτιώσει το φράγμα για το σφάλμα $E_n(f;[a,b])$ και κυρίως να δώσει τη σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς το $n \to \infty$.

Θεωρημα 2.1.3 (Jackson) *Αν $f \in C[-1,1]$, τότε $E_n(f;[-1,1]) \leqq 6\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)$.*

Πορισμα 2.1.1 *Αν $f \in C[a,b]$, τότε $E_n(f;[a,b]) \leqq 6\,\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right)$.*

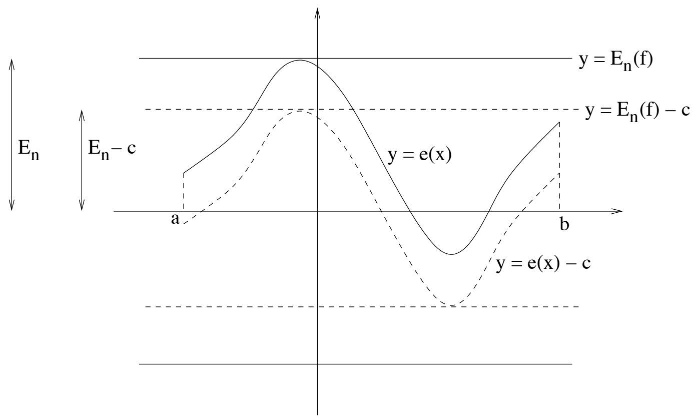
Πορισμα 2.1.2 *Αν $f \in \mathrm{Lip}_K^\alpha[-1,1]$, τότε $E_n(f;[-1,1]) \leqq 6\,K\,n^{-\alpha}$.*

2.2 Χαρακτηρισμός βέλτιστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων.

Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας τον ακόλουθο συμβολισμό: Αν $f \in C[a,b]$ και p_n^* είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$ στο διάστημα $[a,b]$, θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση σφάλματος με $e(x) := f(x) - p_n^*(x)$. Άρα $\|e\|_\infty = E_n(f;[a,b])$.

Λημμα 2.2.1 *Έστω $f \in C[a,b]$ και p_n^* μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$ στο διάστημα $[a,b]$. Τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $x_1, x_2 \in [a,b]$ με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $|e(x_1)| = |e(x_2)| = E_n(f;[a,b])$ και $e(x_1) = -e(x_2)$.*

Απόδειξη. Η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης e θα είναι μια καμπύλη $y = e(x)$, που θα βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $y = \pm\|e\|_\infty = \pm E_n(f)$. Η $y = e(x)$ θα πρέπει να εφάπτεται τουλάχιστον σε μία από τις δύο αυτές ευθείες (**γιατί;**). Θα αποδείξουμε ότι θα πρέπει να εφάπτεται και στις δύο, γιατί σε αντίθετη περίπτωση, όπως θα δείξουμε, θα υπάρχει καλύτερη προσέγγιση της f από την p_n^*. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $e(x_1) = E_n(f)$, για κάποιο $x_1 \in [a, b]$, αλλά $e(x) > -E_n(f)$ $\forall x \in [a, b]$, (βλ. Σχήμα 2.1). Τότε $m := \min_{x\in[a,b]} e(x) > -E_n(f)$.



Σχήμα 2.1:

Θέτουμε

$$c := \frac{E_n(f) + m}{2} > 0 \text{ και } q_n := p_n^* + c.$$

Τότε προφανώς $q_n \in \mathbb{P}_n$ και $f(x) - q_n(x) = e(x) - c$. Επίσης

$$\begin{aligned} & -(E_n(f) - c) = -\left(E_n(f) - \frac{E_n(f)}{2} - \frac{m}{2}\right) = m - \frac{E_n(f) + m}{2} = m - c \leqq \\ & \leqq e(x) - c \leqq E_n(f) - c \\ \Rightarrow \quad & -(E_n(f) - c) \leqq f(x) - q_n(x) \leqq E_n(f) - c \Rightarrow \|f - q_n\|_\infty \leqq E_n(f) - c < E_n(f), \end{aligned}$$

άτοπο, λόγω του ορισμού του $E_n(f)$. □

Ορισμος 2.2.1 *Αν $g \in C[a, b]$, θα λέμε ότι το σημείο $x \in [a, b]$ είναι ένα σημείο $(+)$ για τη g (αντιστ. ένα σημείο $(-)$ για τη g) αν $g(x) = \|g\|_\infty$ (αντιστ. αν $g(x) = -\|g\|_\infty$).*

Ένα σύνολο διαφορετικών ανά δύο σημείων $a \leqq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leqq b$ θα λέγεται σύνολο σημείων εναλλαγής προσήμου για τη g αν τα x_i είναι σημεία $(+)$ και σημεία $(-)$ εναλλάξ. Δηλαδή, αν

$$|g(x_i)| = \|g\|_\infty, \; i = 0, 1, \ldots, n, \quad \text{και } g(x_i) = -g(x_{i+1}), \; i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό αυτό θα είμαστε σε θέση στο επόμενο θεώρημα να χαρακτηρίσουμε το πολυώνυμο που αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση.

Θεωρημα 2.2.1 *Αν $f \in C[a,b]$ και p_n^* είναι μια βέλτιστη προσέγγιση της f στο $[a,b]$ από τον $\mathbb{P}_n$, τότε υπάρχει ένα σύνολο σημείων εναλλαγής προσήμου για την $e := f - p_n^*$ που αποτελείται από $n+2$ σημεία.*

Απόδειξη. Αν το $f \in \mathbb{P}_n$, τότε το όλο θέμα είναι τετριμμένο. Έστω λοιπόν ότι $f \notin \mathbb{P}_n$, και επομένως $E_n(f) = \|f - p_n^*\| > 0$. Θεωρούμε λοιπόν την (ομοιόμορφα) συνεχή συνάρτηση $e = f - p_n^*$. Τότε μπορούμε να βρούμε ένα διαμερισμό του διαστήματος $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{k-1} < t_k = b$, σε k υποδιαστήματα αρκούντως μικρά, έτσι ώστε

$$|e(x) - e(y)| < \frac{E_n(f)}{2}, \quad \text{όταν } x, y \in [t_i, t_{i+1}],\ \ i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Ο λόγος που θέλουμε να το κάνουμε αυτό είναι ο εξής: Αν το $[t_i, t_{i+1}]$ περιέχει ένα σημείο $(+)$ για την e, τότε η e είναι θετική σ' ολόκληρο το $[t_i, t_{i+1}]$, αφού αν $x, y \in [t_i, t_{i+1}]$ και $e(x) = E_n(f)$, τότε $e(y) > \frac{E_n(f)}{2} > 0$ (αφού $-\frac{E_n(f)}{2} < e(y) - e(x) < \frac{E_n(f)}{2}$).

Ομοίως, αν το $[t_i, t_{i+1}]$ περιέχει ένα σημείο $(-)$ για την e, τότε η e είναι αρνητική σ' ολόκληρο το $[t_i, t_{i+1}]$. *Επομένως, κανένα διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$ δεν μπορεί να περιέχει ταυτόχρονα σημεία $(+)$ και σημεία $(-)$.*

Θα λέμε ότι το $[t_i, t_{i+1}]$ είναι ένα διάστημα $(+)$ (αντιστ., διάστημα $(-)$) αν περιέχει ένα σημείο $(+)$ (αντιστ., σημείο $(-)$) για την e. Παρατηρήστε ότι κάθε διάστημα $(+)$ δεν μπορεί ούτε καν να εφάπτεται με ένα διάστημα $(-)$. Μ' άλλα λόγια ένα διάστημα $(+)$ και ένα διάστημα $(-)$ πρέπει να είναι αυστηρά διαχωρισμένα από κάποιο διάστημα που περιέχει μια ρίζα της e.

Τώρα θα αρθμήσουμε ξανά τα διαστήματα $(+)$ και $(-)$, από αριστερά προς τα δεξιά, αγνοώντας τα διαστήματα που δεν είναι ούτε $(+)$ ούτε $(-)$. Ας υποθέσουμε λοιπόν, χωρις βλάβη της γενικότητας, ότι το πρώτο διάστημα (που έχει πρόσημο) είναι διάστημα $(+)$ και ότι τα διαστήματα αυτά ταξινομούνται ως εξής:

$$\begin{aligned}
&I_1, I_2, \ldots, I_{k_1} :\ \text{διαστήματα } (+),\\
&I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2} :\ \text{διαστήματα } (-),\\
&\quad\vdots\\
&I_{k_{m-1}+1}, I_{k_{m-1}+2}, \ldots, I_{k_m} :\ \text{διαστήματα } (-1)^{m-1},
\end{aligned}$$

όπου I_{k_1} είναι το τελευταίο $(+)$ διάστημα πριν φτάσουμε το πρώτο $(-)$ διάστημα που είναι το I_{k_1+1}, κ.ο.κ.

Ας θεωρήσουμε τώρα την ένωση όλων των διαστημάτων που έχουν πρόσημο και ας τη συμβολίσουμε με $\mathcal{S}$, δηλ. $\mathcal{S} = \bigcup_{j=1}^{m} I_{k_j}$. Επίσης, έστω $\mathcal{N}$ η ένωση όλων των διαστημάτων που δεν είναι ούτε

$(+)$ ούτε $(-)$.

Τότε τα $\mathcal{S}$ και $\mathcal{N}$ είναι συμπαγή σύνολα με $\mathcal{S} \cup \mathcal{N} = [a, b]$. (Παρατηρήστε ότι τα εσωτερικά των $\mathcal{S}$ και $\mathcal{N}$ είναι ξένα μεταξύ τους.)

Θέλουμε να δείξουμε ότι $m \geqq n+2$. (Μέχρι στιγμής γνωρίζουμε, λόγω του Λήμματος 2.2.1, ότι $m \geqq 2$.) Θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο, οπότε υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{m}<\boldsymbol{n}+\mathbf{2}$.

Επειδή κάθε διάστημα $(+)$ διαχωρίζεται αυστηρά από ένα διάστημα $(-)$, μπορούμε να βρούμε σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1} \in \mathcal{N}$, τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \max I_{k_1} \quad &< \; z_1 \; < \quad \min I_{k_1+1} \\ \max I_{k_2} \quad &< \; z_2 \; < \quad \min I_{k_2+1} \\ &\;\;\vdots \\ \max I_{k_{m-1}} \quad &< \; z_{m-1} \; < \quad \min I_{k_{m-1}+1}. \end{aligned}$$

Κατασκευάζουμε λοιπόν το πολυώνυμο

$$q(x) := (z_1 - x)(z_2 - x) \cdots (z_{m-1} - x).$$

Προφανώς $q \in \mathbb{P}_n$, αφού $m-1 \leqq n$. (Εδώ είναι το μόνο σημείο που γίνεται χρήση της υπόθεσης $m < n+2$.)

Θα αποδείξουμε ότι το $p_n^* + \lambda\, q \in \mathbb{P}_n$ είναι καλύτερη προσέγγιση της f από το p_n^*, για κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Καταρχήν, υποστηρίζουμε ότι τα q και e έχουν το ίδιο πρόσημο στο $\mathcal{S}$. Πράγματι· το q δεν έχει ρίζες σε κανένα από τα διαστήματα $(\pm)$ και άρα έχει σταθερό πρόσημο σε κάθε τέτοιο διάστημα. Άρα $q > 0$ στα $I_1, I_2, \ldots, I_{k_1}$ επειδή κάθε $(z_j - x) > 0$ στα διαστήματα αυτά, το $q < 0$ στα $I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2}$ επειδή εδώ $z_1 - x < 0$, ενώ $(z_j - x) > 0$ για $j > 1$, κ.ο.κ.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το λ. Έστω $C := \max\limits_{x \in \mathcal{N}} |e(x)|$, όπου υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{N}$ είναι η ένωση όλων των υποδιαστημάτων $[t_i, t_{i+1}]$ που δεν είναι ούτε $(+)$ ούτε $(-)$. Τότε $C < E_n(f)$ (**γιατί;**). Επιλέγουμε $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda \|q\|_\infty < \min\Big\{E_n(f) - C, \frac{E_n(f)}{2}\Big\}$. Ισχυριζόμαστε ότι το $p_n^* + \lambda q$ είναι καλύτερη προσέγγιση της f από την p_n^*.

Έστω $x \in \mathcal{N}$. Τότε

$$|f(x) - (p_n^*(x) + \lambda q(x)| \leqq |f(x) - p_n^*(x)| + \lambda |q(x)| \leqq C + \lambda \|q\|_\infty < E_n(f).$$

Έστω τώρα ότι $x \notin \mathcal{N}$. Τότε το x ή θα ανήκει σ' ένα διάστημα $(+)$ ή σε ένα διάστημα $(-)$. Ειδικότερα, ξέρουμε ότι

$$|f(x) - p_n^*(x)| > \frac{E_n(f)}{2} > \lambda \|q\|_\infty,$$

και ότι οι e και λq έχουν το ίδιο πρόσημο. Άρα

$$|f(x) - (p_n^*(x) + \lambda q(x))| = |f(x) - p_n^*(x)| - \lambda |q(x)| \leqq E_n(f) - \lambda \min_{x \in \mathcal{S}} |q(x)| < E_n(f).$$

(Στην πρώτη ισότητα, στην παραπάνω σχέση, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός, ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ ομόσημοι, τότε $|a - b| = |a| - |b|$, ενώ η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το q δεν μηδενίζεται στο $\mathcal{S}$.)

Επομένως καταλήξαμε ότι $\forall x \in [a, b]$, $\|f - (p_n^* + \lambda q)\|_\infty < E_n(f)$, άτοπο. □

Παρατηρήσεις.

1. Εδώ ο αριθμός $n + 2$ πρακτικά σημαίνει $1 + \dim \mathbb{P}_n$.
2. Αν η συνάρτηση $e := f - p_n^*$ αλλάζει πρόσημο $n + 2$ φορές έπεται ότι η e έχει τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες. Άρα η p_n^* παρεμβάλλεται στις τιμές της f σε $n + 1$ σημεία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.2 *Έστω $f \in C[a, b]$. Τότε η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$ είναι μοναδική.*

Απόδειξη. Έστω $p, q \in \mathbb{P}_n$ δύο βέλτιστες προσεγγίσεις. Δηλαδή $\|f - p\|_\infty = \|f - q\|_\infty = E_n(f)$. Τότε και το $r = \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}_n$, και είναι επίσης βέλτιστη προσέγγιση, αφού

$$\|f - r\|_\infty = \left\| f - \frac{p + q}{2} \right\|_\infty = \left\| \frac{f - p}{2} + \frac{f - q}{2} \right\|_\infty \leqq \frac{\|f - p\|_\infty}{2} + \frac{\|f - q\|_\infty}{2} = E_n(f).$$

Από το Θεώρημα 2.2.1 η $f - r$ θα έχει ένα σύνολο $n + 2$ σημείων εναλλαγής προσήμου, έστω $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$. Άρα για κάθε i,

$$(f - p)(x_i) + (f - q)(x_i) = \pm 2E_n(f), \qquad \text{(εναλλάξ)}$$

ενώ,

$$-E_n(f) \leqq (f - p)(x_i), (f - q)(x_i) \leqq E_n(f),$$

Άρα για κάθε i,

$$(f - p)(x_i) = (f - q)(x_i) = \pm E_n(f). \qquad \text{(εναλλάξ)}$$

Συνεπώς το $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ είναι ένα σύνολο σημείων εναλλαγής προσήμου τόσο για την $f - p$ όσο και για την $f - q$, οπότε το πολυώνυμο $q - p = (f - p) - (f - q)$ έχει $n + 2$ ρίζες, αλλά $q - p \in \mathbb{P}_n$. Επομένως, αναγκαστικά, $q - p \equiv 0 \Rightarrow q \equiv p$. □

Τέλος, θα αποδείξουμε και το αντίστροφο του Θεωρήματος 2.2.1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2.3 *Έστω $f \in C[a, b]$ και $p \in \mathbb{P}_n$. Αν η $f - p$ έχει ένα σύνολο σημείων εναλλαγής προσήμου που αποτελείται από (τουλάχιστον) $n + 2$ σημεία, τότε το p είναι βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ ένα σύνολο σημείων εναλλαγής προσήμου για την $f - p$ και έστω ότι η q είναι μια καλύτερη προσέγγιση της f από ότι η p. Δηλαδή θα ισχύει $\|f - q\|_\infty < \|f - p\|_\infty$. Τότε

$$|f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\|_\infty > \|f - q\|_\infty \geqq |f(x_i) - q(x_i)|, \quad \forall i = 0, 1, \ldots, n+1.$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $|a| > |b|$, τότε οι a και $a - b$ είναι ομόσημοι (**γιατί;**). Άρα το $q - p = (f - p) - (f - q)$ έχει το ίδιο πρόσημο με την $f - p$, και επομένως αλλάζει πρόσημο $n + 2$ φορές. Έτσι το $q - p$ έχει τουλάχιστον $n + 1$ ρίζες, και επειδή το $q - p \in \mathbb{P}_n$ θα πρέπει $q - p \equiv 0$, άτοπο. Συνεπώς το p είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$. □

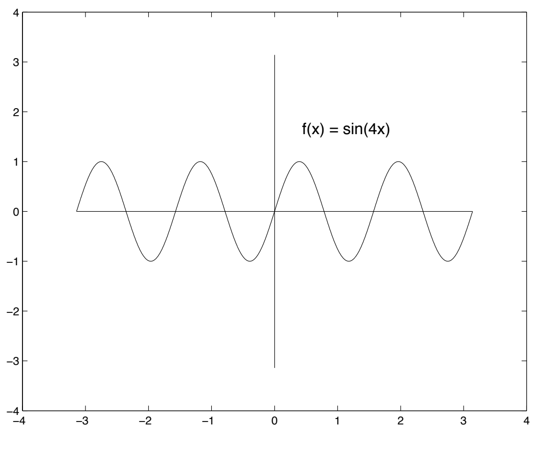
Παραδείγματα.

1. Έστω $f \in C[a, b]$. Ψάχνω τη βέλτιστη προσέγγιση p_0^* της f από τον $\mathbb{P}_0$. Αν $f \in \mathbb{P}_0 \Rightarrow p_0^* = f$. Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Επειδή η $f \in C[a, b]$, τότε λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, b] :\ x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = \max f(x)$ και $f(x_2) = \min f(x)$. Έστω $p_0^* := \frac{1}{2}[\max f(x) + \min f(x)] = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$. Τότε $f(x_1) - p_0^* = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{2}$ και $f(x_2) - p_0^* = -\frac{f(x_1) - f(x_2)}{2}$, οπότε $f(x_1) - p_0^* = -(f(x_2) - p_0^*)$ και

$$|f(x_1) - p_0^*| = |f(x_2) - p_0^*| = \frac{1}{2}(f(x_1) - f(x_2)) = \frac{1}{2}(\max f(x) - \min f(x)).$$

   Άρα τα x_1 και x_2 είναι *δύο* σημεία εναλλαγής προσήμου για την $e := f - p_0^*$, οπότε το p_0^* είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο $[a, b]$ από τον $\mathbb{P}_0$, και $E_0(f; [a, b]) = \frac{1}{2}(\max f(x) - \min f(x))$.

2. Θεωρούμε την $f(x) := \sin 4x$ στο $[-\pi, \pi]$ (βλ. Σχήμα 2.2).



Σχήμα 2.2:

Αφού υπάρχουν 8 σημεία που η f παίρνει τις τιμές ± 1, έπεται ότι υπάρχουν 16 διαφορετικά σύνολα σημείων εναλλαγής προσήμου που αποτελούνται από 2 σημεία, και άρα $p_0^* = 0$. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι $p_1^* = p_2^* = \cdots = p_6^* = 0$, αλλά $p_7^* \neq 0$ **(γιατί;)**.

Το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης ομοιόμορφης προσέγγισης μιας συνάρτησης $f \in C[a, b]$ είναι εν γένει πολύ δύσκολο. Στη συνέχεια θα δούμε μια σημαντική περίπτωση όπου κατι τέτοιο είναι δυνατόν με τη βοήθεια των πολυωνύμων Chebyshev.

2.3 Πολυώνυμα Chebyshev.

Προτού διατυπώσουμε το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει, θα υπενθυμίσουμε τον ορισμό του *πολυωνύμου Chebyshev πρώτου είδους*, που δίνεται από τη σχέση

$$T_n(x) := \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]. \tag{2.6}$$

Μάλιστα ισχύει το ακόλουθο λήμμα. (Για την απόδειξή του βλέπε το Λήμμα 4.1 στο βιβλίο των Ακρίβη και Δουγαλή, [2, σελ. 152-153].

ΛΗΜΜΑ 2.3.1 *Για τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους ισχύει ο αναδρομικός τύπος*

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_n(x) = 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geqq 2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Για $n \geqq 1$ το T_n είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ακριβώς n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 2^{n-1}.

Επανερχόμαστε τώρα στο ζήτημα της εύρεσης της βέλτιστης ομοιόμορφης προσέγγισης μιας συνάρτησης $f \in C[a, b]$. Ειδικότερα, θα ασχοληθούμε με το ακόλουθο

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) := x^n$ από τον υπόχωρο $\mathbb{P}_{n-1}$ στο διάστημα $[-1, 1]$. (Η επιλογή του συγκεκριμένου διαστήματος διευκολύνει λίγο τα πράγματα.) Αναζητούμε, δηλαδή, $p_{n-1}^* \in \mathbb{P}_{n-1}$, τέτοιο ώστε $\|x^n - p_{n-1}^*\|_\infty = E_{n-1}(f; [-1, 1])$.

Συμβολισμός. Θέτουμε $p(x) := x^n - p_{n-1}^*(x)$ και $M = \|p\|_\infty = E_{n-1}(f; [-1, 1])$.

Με τη βοήθεια του συμβολισμού αυτού το Πρόβλημα 1 διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

Πρόβλημα 2. Βρείτε το πολυώνυμο $p \in \widehat{\mathbb{P}}_n$ (:πολυώνυμα βαθμού n με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα) που προσεγγίζει καλύτερα τη μηδενική συνάρτηση ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Δηλαδή το $p \in \widehat{\mathbb{P}}_n$ που έχει την ελάχιστη δυνατή νόρμα στον $(C[-1, 1], \|\cdot\|_\infty)$.

Τώρα, αν p_{n-1}^* είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_{n-1}$, τότε το $p := f - p_{n-1}^*$ έχει ένα σύνολο σημείων εναλλαγής προσήμου $-1 \leqq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leqq 1$ από $(n-1)+2 = n+1$ σημεία. Δηλαδή $|p(x_i)| = M$, $i = 0,1,\ldots,n$ και $p(x_{i+1}) = -p(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n-1$. (Με την πληροφορία αυτή και μόνο θα ακολουθήσουμε τη διαδικασία του Chebyshev για να λύσουμε το πρόβλημα.) Θα περιγράψουμε την επίλυση σε βήματα:

1ο βήμα. $\forall x_i \in (-1,1) \Rightarrow p'(x_i) = 0$, αφού τα x_i είναι σημεία τοπικών ακροτάτων για την p. Όμως το p' είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$, οπότε έχει το πολύ $n-1$ ρίζες. Άρα θα πρέπει

$$x_i \in (-1,1) \quad \text{και} \quad p'(x_i) = 0 \;\; \text{για } i = 1,\ldots,n-1,$$

και

$$x_0 = -1,\;\; p'(x_0) \neq 0, \quad x_n = 1,\;\; p'(x_n) \neq 0.$$

2ο βήμα. Θεωρούμε το πολυώνυμο $M^2 - p^2 \in \mathbb{P}_{2n}$. Γνωρίζουμε ότι $M^2 - (p(x_i))^2 = 0$, για $i = 0,1,\ldots,n$, και $M^2 - p^2 \geqq 0$ στο $[-1,1]$. Άρα τα $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ πρέπει να είναι (τουλάχιστον) διπλές ρίζες του $M^2 - p^2$, και οι x_0, x_n απλές. Αυτό όμως μας δίνει συνολικά $2(n-1)+2 = 2n$ ρίζες, οπότε αυτές είναι όλες οι ρίζες του $M^2 - p^2$.

3ο βήμα. Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο $(p')^2 \in \mathbb{P}_{2(n-1)}$. Το $(p')^2$ έχει διπλές ρίζες τις $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (και καμμία άλλη), επομένως το $(1-x^2)(p'(x))^2$ έχει διπλές ρίζες τις $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ και απλές τις x_0, x_n. Επειδή ο βαθμός του $(1-x^2)(p'(x))^2$ είναι $2n$ έχουμε βρει όλες τις ρίζες του. (Τώρα έρχεται η αιτία όλης αυτής της συζήτησης περί ριζών.)

4ο βήμα. Τα $M^2 - (p(x))^2$ και $(1-x^2)(p'(x))^2$ είναι και τα δύο πολυώνυμα βαθμού $2n$ και έχουν τις ίδιες ακριβώς ρίζες. Άρα το ένα θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Το ενδιαφέρον είναι ότι μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τη σταθερά αυτή. Ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του p είναι 1, ενώ του p' είναι n, συνεπώς θα πρέπει

$$M^2 - (p(x))^2 = \frac{(1-x^2)(p'(x))^2}{n^2}. \qquad (\textbf{γιατί;})$$

Άρα

$$\frac{p'(x)}{\sqrt{M^2 - (p(x))^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.8}$$

(Κανονικά, εδώ θα ήθελε $\pm$. Όμως γνωρίζουμε ότι η p' είναι θετική σε κάποιο διάστημα, και υποθέτουμε ότι είναι θετική στο $[-1, x_1)$.)

Ολοκληρώνοντας την (2.8) έχουμε

$$\begin{aligned} & \arccos\left(\frac{p(x)}{M}\right) = n \arccos x + C \\ \Rightarrow \qquad & p(x) = M\, \cos(n \arccos x + C). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Όμως $p(-1) = -M$, (αφού θεωρήσαμε ότι $p'(-1) \geqq 0$), οπότε παίρνοντας $x = -1$ στην (2.9) έχουμε ότι $-1 = \cos(n\pi + C) \Rightarrow C = m\pi$, όπου το m είναι τέτοιο ώστε $n + m$ να είναι περιττός. Συνεπώς

$$\begin{aligned} & p(x) = M\ \cos(n \arccos x + m\pi) \\ \Rightarrow \quad & p(x) = \pm M\ \cos(n \arccos x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Αν η σχέση (2.10) σας θυμίζει κάτι, ανατρέξτε στον ορισμό του πολυωνύμου Chebyshev T_n βαθμού n, βλ. (2.6). Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του p είναι 1, ενώ ο ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του T_n είναι 2^{n-1}, η λύση στο πρόβλημά μας θα πρέπει να είναι

$$p(x) = 2^{-n+1} T_n(x).$$

Επειδή μάλιστα $|T_n(x)| \leqq 1$, για $|x| \leqq 1$ (**γιατί;**) η ελάχιστη νόρμα θα πρέπει να είναι $M = 2^{-n+1}$. □

Στη συνέχεια θα δώσουμε μια (πιο κομψή) απόδειξη του προβλήματος αυτού (έχοντας πλέον γνώση των πολυωνύμων του Chebyshev).

Θεωρημα 2.3.1 *Για κάθε $n \geqq 1$, το $p^*_{n-1}(x) := x^n - 2^{-n+1} T_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο του $\mathbb{P}_{n-1}$ για το οποίο*

$$2^{-n+1} = \|x^n - p^*_{n-1}\|_\infty < \|x^n - q\|_\infty, \quad \forall q \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Δηλαδή το p^*_{n-1} είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης $f(x) := x^n$ από τον υπόχωρο $\mathbb{P}_{n-1}$ στο διάστημα $[-1, 1]$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι το $2^{-n+1} T_n(x)$ έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του 1, οπότε το $p^*_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$. Επίσης, αν $x_i = \cos \frac{(n-i)\pi}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, τότε $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$, και

$$T_n(x_i) = \cos(n \arccos x_i) = \cos((n-i)\pi) = (-1)^{n-i}.$$

Επειδή $|T_n(x)| \leqq 1$, για $|x| \leqq 1$, βρήκαμε ένα σύνολο $n + 1$ σημείων εναλλαγής προσήμου. Άρα το $x^n - p^*_{n-1}(x) = 2^{-n+1} T_n(x)$ ικανοποιεί $|x^n - p^*_{n-1}(x)| \leqq 2^{-n+1}$ και $\forall i = 0, 1, \ldots, n$ ισχύει $x_i^n - p^*_{n-1}(x_i) = 2^{-n+1} T_n(x_i) = (-1)^{n-i}\, 2^{-n+1}$. Άρα το p^*_{n-1} πρέπει να είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της x^n από τον $\mathbb{P}_{n-1}$ στο διάστημα $[-1, 1]$. □

Πορισμα 2.3.1 *Το $p \in \widehat{\mathbb{P}}_n$ με την ελάχιστη $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα στον $C[a, b]$ είναι το*

$$p(x) = \frac{(b-a)^n}{2^n\, 2^{n-1}}\, T_n\left(\frac{2x - b - a}{b - a}\right).$$

2.3.1 Ιδιότητες των πολυωνύμων Chebyshev.

Τα πολυώνυμα Chebyshev, όπως είδαμε, είναι τα (μοναδικά, πραγματικά) πολυώνυμα βαθμού n (με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 1 αν $n = 0$, και 2^{n-1} αν $n \geqq 1$), που ικανοποιούν τη σχέση

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta, \quad \text{για κάθε } \theta.$$

Έχουν πάρα πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες και στη συνέχεια θα αναφέρουμε μερικές.

1. $T_n(x) = 2\,x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ για $n \geqq 2$.

   Απόδειξη. Προκύπτει από την τριγωνομετρική ταυτότητα

   $$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos\theta\,\cos(n-1)\theta.$$

   Τότε

   $$\begin{aligned} \cos n\theta &= 2\cos\theta\,\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \\ \Rightarrow T_n(\cos\theta) &= 2\cos\theta\,T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta), \quad \forall\theta \\ \overset{x=\cos\theta}{\Rightarrow} T_n(x) &= 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad \forall x \in [-1,1]. \end{aligned}$$

   Επειδή τα T_n, T_{n-1}, T_{n-2} είναι πολυώνυμα η παραπάνω σχέση θα ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

2. Οι ρίζες του πολυωνύμου T_n είναι $x_i^{(n)} = \cos\frac{(2i-1)\pi}{2n}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Είναι όλες τους απλές και ανήκουν στο $(-1, 1)$.
   Απόδειξη. **Άσκηση.**

3. Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών του T_n υπάρχει ακριβώς μία ρίζα του T_{n-1}.
   Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n-1$ ισχύει

   $$\begin{aligned} &\frac{2i-1}{2n} < \frac{2i-1}{2(n-1)} < \frac{2i+1}{2n} \\ \Rightarrow \quad & x_i^{(n)} > x_i^{(n-1)} > x_{i+1}^{(n)}. \end{aligned}$$

   □

4. Τα πολυώνυμα T_n και T_{n-1} δεν έχουν κοινές ρίζες.
   Απόδειξη. Αυτό είναι άμεσο από την Ιδιότητα 3, ας δούμε όμως και μια άλλη απόδειξη. Έστω x_0 κοινή ρίζα των T_n και T_{n-1}. Δηλαδή $T_n(x_0) = T_{n-1}(x_0) = 0$. Άρα από την Ιδιότητα 1, έχουμε ότι και $T_{n-2}(x_0) = 0$. Επαναλαμβάνοντας αυτό το επιχείρημα έχουμε ότι $T_k(x_0) = 0$ για $k < n$, και το ίδιο ισχύει και για $k = 0$. Άτοπο αφού το $T_0(x) = 1$ δεν έχει ρίζες. □

5. Τα πολυώνυμα Chebyshev είναι ορθογώνια στο $[-1,1]$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο με βάρος $w(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Απόδειξη. Για $m \neq n$

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{x=\cos\theta}{=} \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta \, d\theta = 0.$$

Για $m = n$

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta \, d\theta = \begin{cases} \pi, & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{αν } n > 0 \end{cases}.$$

Κεφάλαιο 3

Πολυωνυμική παρεμβολή.

Στο κεφάλαιο αυτό ακολουθούμε, κυρίως, τις σημειώσεις παραδόσεων των Σ. Νοτάρη, [7], και το βιβλίο των Γ. Ακρίβη και Β. Δουγαλή, [2].

3.1 Πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange.

Ο στόχος στην πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange είναι να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση μ΄ ένα πολυώνυμο με τέτοιο τρόπο ώστε η συνάρτηση και το πολυώνυμο να παίρνουν τις ίδιες τιμές σε δεδομένα σημεία. Το πρόβλημα λοιπόν της παρεμβολής θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής: Δοθέντων $n+1$ διαφορετικών ανα δύο σημείων $x_0, x_1, \ldots, x_n$ και των τιμών $f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, μιας συνάρτησης f στα σημεία αυτά, να βρεθεί πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$, τέτοιο ώστε $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Μερικά ερωτήματα που προκύπτουν φυσιολογικά είναι τα ακόλουθα: α) Υπάρχει τέτοιο πολυώνυμο, και αν ναι, είναι μοναδικό; β) ποιοί τρόποι υπολογισμού και παράστασης του πολυωνύμου υπάρχουν; γ) μπορούμε να βρούμε εκτιμήσεις για το σφάλμα της παρεμβολής $e(x) = f(x) - p(x)$, όταν $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$; και δ) μπορούμε να βρούμε φράγματα για την ποιότητα της προσέγγισης της f από το p, καθώς ο αριθμός των σημείων (και άρα και ο βαθμός του πολυωνύμου) αυξάνει;

Το απλούστερο παράδειγμα παρεμβολής είναι η γραμμική παρεμβολή, δηλαδή η περίπτωση $n = 1$. Όπως φαίνεται άμεσα από το Σχήμα 3.1, το πρόβλημα της γραμμικής παρεμβολής έχει μοναδική λύση. Είναι επίσης προφανές ότι αν δεν γνωρίζουμε τίποτα για τη συνάρτηση f εκτός από τις τιμές της στα σημεία a και b, τότε το σφάλμα $e(x) := f(x) - p(x)$ μπορεί να γίνει πολύ μεγάλο.

Ένας τρόπος υπολογισμού του p είναι να το γράψουμε ως ένα σταθμητό μέσο των $f(a)$ και $f(b)$,

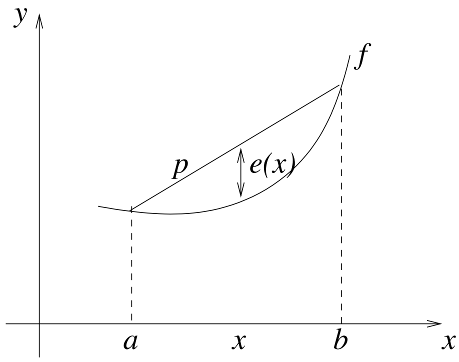
$$p(x) = \frac{x-b}{a-b}\, f(a) + \frac{x-a}{b-a}\, f(b).$$

(Αυτός είναι ο τρόπος παράστασης του πολυωνύμου παρεμβολής κατά Lagrange.)

Ένας άλλος τρόπος για να γράψουμε το p προκύπτει με τη βοήθεια της εξίσωσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$,

$$p(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

(Αυτή είναι η έκφραση του πολυωνύμου παρεμβολής στη μορφή του Νεύτωνα.)



Σχήμα 3.1: Γραμμική παρεμβολή.

Στη γενική περίπτωση έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεωρημα 3.1.1 *Έστω τα $n+1$ διακριτά σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ και οι τιμές μιας συνάρτησης f στα σημεία αυτά $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n) \in \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα πολυώνυμο p βαθμού το πολύ n τέτοιο ώστε*

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{3.1}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της ύπαρξης ενός πολυωνύμου $p \in \mathbb{P}_n$ που ικανοποιεί τις (3.1) αρκεί να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο πολυώνυμο. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τα *πολυώνυμα Lagrange* που ορίζονται ως εξής

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Τα L_i είναι προφανώς πολυώνυμα βαθμού n και έχουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα

$$L_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = k \\ 0, & \text{αν } i \neq k. \end{cases}$$

Ορίζουμε τώρα το πολυώνυμο p ως εξής:

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x). \tag{3.2}$$

Προφανώς το $p \in \mathbb{P}_n$ και, επιπλέον, $p(x_k) = \sum_{i=0}^n f(x_i)L_i(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, οπότε το p είναι το ζητούμενο πολυώνυμο. Η σχέση (3.2) αναφέρεται ως *η μορφή Lagrange του πολυωνύμου παρεμβολής*.

Για τη μοναδικότητα του πολυωνύμου παρεμβολής, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα άλλο πολυώνυμο $q \in \mathbb{P}_n$, τέτοιο ώστε $q(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Αν $r(x) := p(x) - q(x)$, τότε το $r \in \mathbb{P}_n$ και $r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$. Άρα το r είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και έχει $n + 1$ διακριτές ρίζες, οπότε το $r \equiv 0$, και συνεπώς το $p \equiv q$. □

Συμβολισμός: Θα συμβόλίζουμε με $p_n\big(f; \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}; x\big)$ την τιμή σ′ ένα $x \in \mathbb{R}$ του πολυωνύμου βαθμού το πολύ n, που παρεμβάλλεται στις τιμές της f στα $n+1$ σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Αν είναι σαφές ποιά είναι τα σημεία της παρεμβολής, τότε θα γράφουμε $p_n(f; x)$.

Εύκολα, από τον ορισμό του, βλέπουμε ότι το πολυώνυμο παρεμβολής $p_n(f; \cdot)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\begin{aligned} p_n(f+g;\cdot) &= p_n(f;\cdot) + p_n(g;\cdot), \\ p_n(\alpha f;\cdot) &= \alpha\, p_n(f;\cdot), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ p_n(q;\cdot) &= q, \quad \forall q \in \mathbb{P}_n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Στη συνέχεια θα δώσουμε έναν αναλυτικό τύπο για το σφάλμα της παρεμβολής όταν η f είναι μια ομαλή συνάρτηση

Θεωρημα 3.1.2 *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^{n+1}[a, b]$, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ διαφορετικά ανά δύο σημεία και $p_n(f; \cdot)$ το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Τότε ισχύουν*

$$\forall x \in [a,b]\ \exists \xi = \xi(x) \in (a,b): \ \ f(x) - p_n(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \tag{3.4}$$

και

$$\|f - p_n(f;\cdot)\|_\infty \leqq \max_{a \leqq x \leqq b} \left| \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \right| \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Δείτε την απόδειξη του Θεωρ. 4.2 στο βιβλίο των Γ. Ακρίβη και Β. Δουγαλή, [2]. □

Παρατήρηση. Στη διατύπωση του Θεωρήματος 3.1.2 αναφέρεται ότι το ξ είναι κάποιο σημείο στο διάστημα $[a, b]$, χωρίς όμως να γνωρίζουμε ποιό είναι. Η απαίτηση $f \in C^{n+1}[a, b]$ και η αδυναμία γνώσης του ξ είναι δύο λόγοι για τους οποίους οι τύποι (3.4) και (3.5) έχουν περιορισμένη πρακτική σημασία.

Παραδείγματα.

1) Γραμμική παρεμβολή ($n = 1$). Έστω $p_1(f; \cdot)$ το γραμμικό πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ μιας συνάρτησης $f \in C^2[a, b]$. Τότε από τις (3.4) και (3.5) θα έχουμε

$$f(x) - p_1(f;x) = (x-a)(x-b)\,\frac{f''(\xi)}{2}, \quad a < \xi < b$$

και

$$\|f - p_1(f;\cdot)\|_\infty \leqq \max_{a\leqq x\leqq b}\big|(x-a)(x-b)\big| \,\frac{\|f''\|_\infty}{2},$$

οπότε επειδή $\max_{a\leqq x\leqq b}\big|(x-a)(x-b)\big| = \frac{(b-a)^2}{4}$,

$$\|f - p_1(f;\cdot)\|_\infty \leqq \frac{(b-a)^2}{8}\,\|f''\|_\infty.$$

2) Τετραγωνική παρεμβολή ($n = 2$) με ισαπέχοντα σημεία $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2$, $h = \frac{b-a}{2}$. Αν $f \in C^3[a, b]$, έχουμε για $x \in [a, b]$

$$f(x) - p_2(f; x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\frac{f'''(\xi)}{6},, \quad a < \xi < b$$

και, παρόμοια με το Παράδειγμα 1,

$$\|f - p_2(f;\cdot)\|_\infty \leqq \frac{(b-a)^3}{96}\,\|f'''\|_\infty.$$

3) Έστω $f \in C^{n+1}[a, b]$ και $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, όπου $h = \frac{b-a}{n}$, τα $n + 1$ σημεία ενός ομοιόμορφου διαμερισμού του διαστήματος $[a, b]$. Τότε μπορεί κανείς να δείξει (**άσκηση**) ότι

$$\max_{a\leqq x\leqq b}\left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \leqq \frac{n!}{4}\,h^{n+1},$$

οπότε

$$\|f - p_n(f;\cdot)\|_\infty \leqq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)}\,\|f^{(n+1)}\|_\infty.$$

Από την εκτίμηση αυτή συμπεραίνουμε ότι για πολλές συναρτήσεις το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής σε ισαπέχοντα σημεία τείνει ομοιόμορφα προς το μηδέν, καθώς το $n \to \infty$. Μια τέτοια κατηγορία είναι συναρτήσεις που έχουν παραγώγους οποιασδήποτε τάξης στο $[a, b]$, για τις οποίες υπάρχει $M > 0$, τέτοιος ώστε $\|f^{(n)}\|_\infty \leqq M^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (**άσκηση**).

Θα υπέθετε λοιπόν κανείς ότι στην περίπτωση ομοιόμορφου διαμερισμού, και καθώς το πλήθος των σημείων παρεμβολής τείνει προς το άπειρο, η ακολουθία των πολυωνύμων μιας οποιασδήποτε συνεχούς συνάρτησης f συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f. Όμως αποδείχθηκε ότι αυτό δεν είναι σωστό.

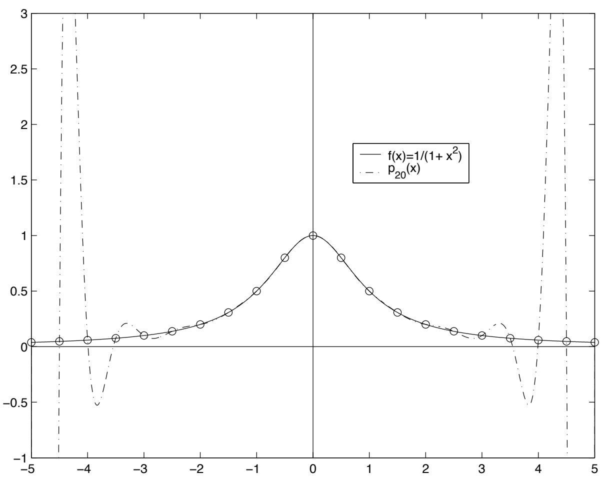
Παραδείγματα.

1) Ο πρώτος που έδωσε ένα αρνητικό παράδειγμα ήταν ο Runge, το 1901, με τη συνάρτηση

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}, \quad -5 \leqq x \leqq 5.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο [-5,5]. Εφαρμόζοντας παρεμβολή με ισαπέχοντα σημεία $x_i = -5 + i\,\frac{10}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ο Runge κατάφερε να δείξει ότι

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(f;x)| = \begin{cases} 0, & \text{αν } |x| < 3.633\ldots \\ \infty, & \text{αν } |x| > 3.633\ldots. \end{cases}$$



Σχήμα 3.2: Πολυώνυμο παρεμβολής p_{20}, για τη συνάρτηση του Runge. Ομοιόμορφος διαμερισμός.

Στο Σχήμα 3.2 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του Runge, καθώς και του πολυωνύμου παρεμβολής $p_n(f;\cdot)$ για τον ομοιόμορφο διαμερισμό του [-5,5] με $n = 20$.

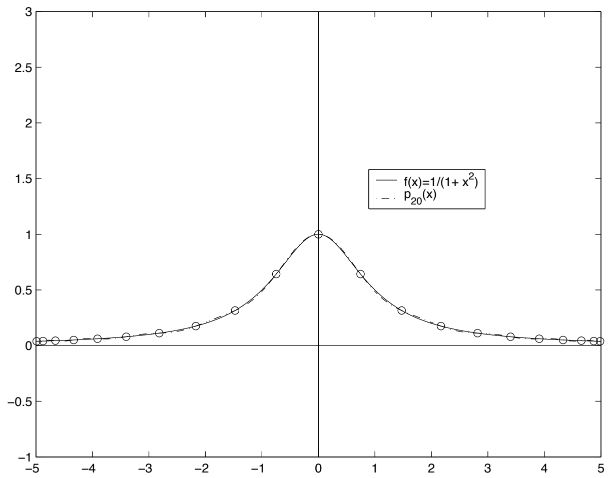
2) Ένα δεύτερο αρνητικό παράδειγμα δόθηκε από τον Bernstein για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$, $-1 \leqq x \leqq 1$. Αν εφαρμόσουμε παρεμβολή με ισαπέχοντα σημεία $x_i = -1 + i\,\frac{2}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} |f(x) - p_n(f;x)| = \infty$ για κάθε $x \in [-1, 1]$, εκτός από $x = -1, 0$ και 1.

Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να υποθέσει ότι το πρόβλημα βρίσκεται στην επιλογή των σημείων παρεμβολής και ειδικότερα στην επιλογή ομοιόμορφων διαμερισμών. Κοιτώντας, για παράδειγμα, τη σχέση (3.5) φαίνεται λογικό να προσπαθήσουμε να επιλέξουμε τα σημεία παρεμβολής έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν την ποσότητα $\max\limits_{a\leqq x\leqq b} \left|\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)\right|$. Παρατηρήστε όμως ότι το $\prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n+1$ με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου 1. Από το Πόρισμα 2.3.1 γνωρίζουμε ότι το πολυώνυμο βαθμού $n+1$ με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου μονάδα που έχει την ελάχιστη $\|\cdot\|_\infty$ νόρμα στον $C[a,b]$ είναι το $p(x) = \frac{(b-a)^{n+1}}{2^n\,2^{n+1}}\,T_{n+1}\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)$, όπου το T_{n+1} είναι το πολυώνυμο Chebyshev βαθμού $n+1$. Επομένως θα ελαχιστοποιήσουμε το γινόμενο $|\prod(x - x_i)|$ αν επιλέξουμε ως σημεία παρεμβολής τις ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev βαθμού $n+1$ στο διάστημα $[a,b]$.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι τα σημεία αυτά δίνονται από τον τύπο

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\,\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Στο Σχήμα 3.3 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης του Runge, καθώς και του πολυωνύμου παρεμβολής $p_n(f;\cdot)$ στα σημεία του Chebyshev για $n = 20$.



Σχήμα 3.3: Πολυώνυμο παρεμβολής p_{20}, για τη συνάρτηση του Runge στα σημεία του Chebyshev.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να δώσουμε μερικά ακόμα στοιχεία σχετικά με τη σύγκλιση των πολυωνύμων παρεμβολής. Έστω, λοιπόν, $f \in C[a,b]$ και x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, διαφορετικά ανά δύο σημεία του $[a,b]$. Με τη βοήθεια του τύπου (3.2) μπορούμε να υπολογίσουμε την $\|\cdot\|_\infty$ του πολυωνύμου παρεμβολής $p_n(f;\cdot)$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} \|p_n(f;\cdot)\|_\infty &= \max_{a\leqq x\leqq b}\Big|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,L_i(x)\Big| \leqq \max_{a\leqq x\leqq b}\sum_{i=0}^{n} |f(x_i)|\,|L_i(x)| \\ &\leqq \max_{a\leqq x\leqq b}|f(x)|\,\max_{a\leqq x\leqq b}\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$\lambda_n(x) := \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)| \tag{3.7}$$

λέγεται *συνάρτηση του Lebesgue* για την παρεμβολή Lagrange, και η μέγιστη τιμή της

$$\Lambda_n := \|\lambda_n\|_\infty = \max_{a\leqq x\leqq b} \lambda_n(x), \tag{3.8}$$

λέγεται *σταθερά του Lebesgue*.

Άρα δείξαμε ότι αν $f \in C[a,b]$, τότε

$$\|p_n(f;\cdot)\|_\infty \leqq \Lambda_n\,\|f\|_\infty. \tag{3.9}$$

Με τη βοήθεια της (3.9) και των ιδιοτήτων (3.3) μπορούμε να βρούμε μια εκτίμηση για το σφάλμα της παρεμβολής. Έστω p_n^* η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}_n$, και $E_n\big(f;[a,b]\big) = \min_{p\in\mathbb{P}_n}\|f-p\|_\infty = \|f-p_n^*\|_\infty$ το σφάλμα της βέλτιστης ομοιόμορφης προσέγγισης. Τότε

$$\begin{aligned}\|f-p_n(f;\cdot)\|_\infty &= \|f-p_n^*+p_n^*-p_n(f;\cdot)\|_\infty = \|f-p_n^*+p_n(p_n^*;\cdot)-p_n(f;\cdot)\|_\infty\\ &\leqq \|f-p_n^*\|_\infty+\|p_n(p_n^*-f;\cdot)\|_\infty \leqq \|f-p_n^*\|_\infty+\Lambda_n\|f-p_n^*\|_\infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\|f-p_n(f;\cdot)\|_\infty \leqq \big(1+\Lambda_n\big)\|f-p_n^*\|_\infty = \big(1+\Lambda_n\big)\,E_n\big(f;[a,b]\big). \tag{3.10}$$

(Δηλαδή το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής είναι χειρότερο από εκείνο της βέλτιστης ομοιόμορφης προσέγγισης το πολύ κατά ένα παράγοντα $\big(1+\Lambda_n\big)$.)

Λόγω του Πορίσματος 2.1.1 (του Θεωρ. του Jackson) βλέπουμε ότι

$$\|f-p_n(f;\cdot)\|_\infty \leqq 6\,\big(1+\Lambda_n\big)\,\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right),$$

οπότε δεδομένης μιας $f\in C[a,b]$ η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής θα συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f αν $\Lambda_n\,\omega\big(\frac{b-a}{2n}\big)\to 0$, καθώς $n\to\infty$. Άρα θα πρέπει να ελέγξουμε τη συμπεριφορά της σταθεράς Λ_n. Δυστυχώς το Λ_n δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Στην περίπτωση π.χ. ισαπέχοντων σημείων παρεμβολής μπορεί να αποδειχθεί ότι η σταθερά του Lebesgue αυξάνεται εκθετικά, Συγκεκριμένα ισχύει η ακόλουθη ασυμπτωτική εκτίμηση

$$\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{\mathrm{e}n\log n}, \quad n\to\infty.$$

Από την άλλη μεριά αν χρησιμοποιηθούν ως σημεία παρεμβολής τα σημεία του Chebyshev, τότε ισχύει η ακολουθη εκτίμηση

$$\frac{2}{\pi}\log(n+1)+\alpha < \Lambda_n < \frac{2}{\pi}\log(n+1)+4, \text{ για κάποια σταθερά } \alpha,$$

δηλαδή η αύξηση είναι λογαριθμική. (Για την απόδειξη μπορεί κανείς να ανατρέξει στο βιβλίο του Rivlin, [9].) Στον ακόλουθο πίνακα μπορεί κανείς να δει την αύξηση της σταθεράς του Lebesgue Λ_n, βλ. (3.8), για την παρεμβολή Lagrange στον $\mathbb{P}_n$ καθώς το n αυξάνει, για έναν ομοιόμορφο διαμερισμό και για έναν διαμερισμό με τα σημεία του Chebyshev.

n	Λ_n – Ομοιόμορφος	Λ_n – Chebyshev
2	1.25	1.67
4	2.21	1.99
8	11.0	2.36
12	89.3	2.60
16	935	2.77
20	11000	2.90

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ανεξάρτητα της επιλογής των σημείων παρεμβολής $x_i = x_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, ισχύει πάντα ότι $\Lambda_n > O(\log n)$, καθώς $n \to \infty$. Επιπλέον, ισχύει το ακόλουθο αρνητικό αποτέλεσμα που αποδείχθηκε από τον Faber το 1914.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.3 *Για κάθε πίνακα σημείων παρεμβολής $x_i^{(n)} \in [-1, 1]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, υπάρχει συνάρτηση $f \in C[-1, 1]$, τέτοια ώστε αν $p_n(f; \cdot)$ είναι το πολυώνυμο που παρεμβάλλεται στην f στα σημεία $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, τότε ισχύει*

$$\limsup_{n\to\infty} \|f - p_n(f; \cdot)\|_\infty = \infty.$$

Στον αντίποδα του Θεωρήματος 3.1.3 βρίσκεται ένα θετικό αποτέλεσμα γενικού χαρακτήρα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.4 *Αν $f \in C[a, b]$, τότε υπάρχει ένας πίνακας σημείων παρεμβολής $x_i^{(n)}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, τέτοιος ώστε η ακολουθία των πολυωνύμων παρεμβολής $p_n(f; \cdot)$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι αν (p_n^*) είναι η ακολουθία των πολυωνύμων των βέλτιστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων, τότε λόγω του Θεωρήματος του Weierstrass (Θεώρημα 2.1.1) η ακολουθία αυτή θα συγκλίνει στην f ομοιόμορφα. Έστω λοιπόν $p_n^* \in \mathbb{P}_n$ η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f στο $[a, b]$. Σύμφωνα λοιπόν με το Θεώρημα 2.2.1 υπάρχουν $n + 2$ σημεία του $[a, b]$ με την ιδιότητα η $f - p_n^*$ να εναλλάσει το πρόσημό της διαδοχικά στα σημεία αυτά. Επομένως, η $f - p_n^*$ έχει $n+1$ ρίζες στο $[a, b]$, που ας τις συμβολίσουμε $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$. Αν θεωρήσουμε τον πίνακα των σημείων παρεμβολής που αποτελείται από τις ρίζες αυτές, θα έχουμε ότι $p_n\big(f; x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}; \cdot\big) = p_n^*$, δηλαδή το πολυώνυμο παρεμβολής συμπίπτει με τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση, οπότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Δ. Ακρίβης, *Θεωρία Προσεγγίσεων* (Σημείωσεις Παραδόσεων), Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ηράκλειο 1987.

[2] Γ. Δ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση* (πέμπτη έκδοση), Π.Ε.Κ., Ηράκλειο 2004.

[3] N. L. Carothers, *A Short Course on Approximation Theory*, (Lecture Notes) `http://personal.bgsu.edu/~carother/Approx.html` .

[4] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, McGraw-Hill, 1966.

[5] D. H. Griffel, *Applied Functional Analysis*, Dover, 2002.

[6] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1978.

[7] Σ. Ε. Νοτάρης, *Σημειώσεις στη Θεωρία Προσέγγισης* (Σημείωσεις Παραδόσεων), Μαθηματικό Τμήμα, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 2001.

[8] M. J. D. Powell, *Approximation Theory and Methods*, Cambridge University Press, 1981.

[9] T. J. Rivlin, *An Introduction to the Approximation of Functions*, Dover, 1981.