

Ασκήσεις Προετοιμασίας Ι

1. Να βρεθεί το πλέγμα υποσωμάτων των $GF(p^{16})$, $GF(p^{20})$, $GF(p^{24})$.
2. Ναδειχθεί ότι αν n περιττός, τότε $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.
3. Ναδειχθεί ότι για κάθε κυκλοτομικό πολυώνυμο $\Phi_n(x)$, $n > 1$, ο σταθερός όρος είναι ίσος με 1.

4. Ναδειχθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\Phi_n(x) = x^{\varphi(n)} \Phi_n(1/x).$$

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω κυκλοτομικά πολυώνυμα:

α. $\Phi_{24}(x)$.

β. $\Phi_{35}(x)$.

γ. $\Phi_{40}(x)$.

δ. $\Phi_{60}(x)$.

ε. $\Phi_{105}(x)$.

6. Να αναλυθούν πλήρως σε γινόμενο αναγώγων τα παρακάτω κυκλοτομικά πολυώνυμα.

α. $\Phi_{17}(x)$ πάνω από το $\mathbb{F}_2$.

β. $\Phi_{11}(x)$ πάνω από το $\mathbb{F}_3$.

γ. $\Phi_{13}(x)$ πάνω από το $\mathbb{F}_5$.

δ. $\Phi_{19}(x)$ πάνω από το $\mathbb{F}_7$.

7. Έστω F σώμα χαρακτηριστικής 2. Να υπολογιστούν τα

α. $\Phi_{10}(x)$.

β. $\Phi_{12}(x)$.

γ. $\Phi_{14}(x)$.

δ. $\Phi_{16}(x)$.

8. Να αναλυθεί πλήρως το πολυώνυμο $X^{16} - X$ σε γινόμενο αναγώνων πάνω απ'το σώμα

α. $\mathbb{F}_2$.

β. $\mathbb{F}_{16}$.

γ. $\mathbb{F}_4$ ($\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \omega^2\}$, όπου $\omega^2 = \omega + 1$).

9. Να αναλυθεί πλήρως το πολυώνυμο $X^{24} - 1$ σε γινόμενο αναγώνων πάνω απ'το σώμα

α. $\mathbb{F}_2$.

β. $\mathbb{F}_3$.

γ. $\mathbb{F}_4$.

δ. $\mathbb{F}_5$.

ε. $\mathbb{F}_7$.