Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-254 Αριθμητικη Γραμμικη Αλγεβρα
Χειμερινο Εξαμηνο 2016
Εργαστηριο 1
18-10-2016
Η επαναληπτικη μεθοδος Gauss-Seidel

1. Διατύπωση του προβλήματος.

Έστω:

- $d \in \mathbb{N}$,
- αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία,
- διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^d$.

Σκοπός μας είναι να βρούμε μια προσέγγιση της λύσης $x \in \mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος $A\,x = b$, εφαρμόζοντας την επαναληπτική μέθοδο Gauss-Seidel. Πρέπει να έχετε υπόψιν ότι οι παραπάνω υποθέσεις δεν αρκούν για να εξασφαλιστεί ότι η μέθοδος Gauss-Seidel συγκλίνει.

2. Περιγραφή της επαναληπτικής μεθόδου Gauss-Seidel.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ κατασκευάζουμε $x^{(n)} \in \mathbb{R}^d$ ως εξής:

$$x_j^{(n)} := -\tfrac{1}{A_{j,j}}\left[\sum_{k=1}^{j-1} A_{j,k}\,x_k^{(n)} + \sum_{k=j+1}^{d} A_{j,k}\,x_k^{(n-1)} - b_j\right], \quad j = 1,\dots,d,$$

όπου $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$ μια αρχική επιλογή π.χ. $x^{(0)} = b$ ή $x^{(0)} = 0$.

Για τον τερματισμό της επαναληπτικής διαδικασίας επιλέγουμε μικρό θετικό πραγματικό αριθμό TOL (π.χ. TOL$=10^{-5}$) και σταματάμε την επαναληπτική διαδικασία όταν ικανοποιείται το κριτήριο:

$$\frac{\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|_\infty}{\sigma(\|x^{(n-1)}\|_\infty)} \le \text{TOL}$$

όπου $\|z\|_\infty := \max_{1\le i\le d} |z_i|$ για κάθε $z \in \mathbb{R}^d$, και $\sigma : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ με

$$\sigma(z) := \begin{cases} 1, & \text{όταν} \quad z = 0 \\ z, & \text{όταν} \quad z > 0 \end{cases} \quad \forall\, z \in [0,+\infty).$$

Μετά τον τερματισμό της επαναληπτικής μεθόδου, το διάνυσμα $y = x^{(n)}$ είναι η προσέγγιση της λύσης x που προκύπτει ως αποτέλεσμα της εκτέλεσης του προγράμματος.

3. Αντικείμενο εργαστηρίου.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τις προσεγγίσεις $x^{(n)}$ της μεθόδου Gauss-Seidel με οικονομία στη χρησιμοποιούμενη μνήμη, δηλ. να χρησιμοποιείται ένα μόνο διάνυσμα για τις προσεγγίσεις και να μην κατακρατούνται όλες μέχρι τον τερματισμό των επαναλήψεων. Επιπλέον, το πρόγραμμά σας να τυπώνει στην οθόνη την προσέγγιση y της λύσης του γραμμικού συστήματος καθώς και τον αριθμό των επαναλήψεων που πραγματοποιήθηκαν.

Παράδειγμα. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με ένα τριδιαγώνιο πίνακα A με διαγώνια στοιχεία $A_{j,j} = 1$ για $j = 1,\dots,d$, υπερδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j+1} = \varepsilon$ για $j = 1,\dots,d-1$, και υποδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j-1} = -\varepsilon$ για $j = 2,\dots,d$. Εδώ η παράμετρος ε είναι μια θετική σταθερά. Ο πίνακας A έχει κυριαρχική διαγώνιο όταν $1 > 2\,\varepsilon$. Αν $b_1 = 1+\varepsilon$, $b_j = 1$ για $j = 2,\dots,d-1$, $b_d = 1-\varepsilon$, τότε $x_j = 1$ για $j = 1,\dots,d$. Συγκρίνετε τη συμπεριφορά της μεθόδου: α) για τιμές του ε κοντά στο $\frac{1}{2}$ και κοντά στο 0, και β) για διαφορετικές τιμές του TOL. Επειδή γνωρίζετε την ακριβή λύση του συστήματος συγκρίνεται την τιμή του TOL με το σφάλμα $\|x-y\|_\infty$.

Γ. Ζουράρης