Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-254 Αριθμητικη Γραμμικη Αλγεβρα
Χειμερινο Εξαμηνο 2016
Εργαστηριο 3
25-10-2016
Η Αναλυση Cholesky

1. Διατύπωση του προβλήματος.

Έστω:

- $d \in \mathbb{N}$,
- συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$,
- διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^d$.

Σκοπός μας είναι να βρούμε τη λύση $x \in \mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος $A\,x = b$, χρησιμοποιώντας την ανάλυση Cholesky.

2. Περιγραφή της μεθόδου.

Επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, υπάρχει κάτω τριγωνικός πίνακας $L \in \mathbb{R}^{d\times d}$ με θετικά διαγώνια στοιχεία τέτοιος ώστε $A = L\,L^T$. Επειδή το γραμμικό σύστημα παίρνει τη μορφή: $L(L^T\,x) = b$, πρώτα βρίσκουμε τη λύση $y \in \mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος $L\,y = b$ ως εξής:

$$y_i = \tfrac{1}{L_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij}\,y_j \right), \quad i = 1, \dots, d,$$

και στη συνέχεια βρίσκουμε τη λύση x λύνοντας το γραμμικό σύστημα $L^T\,x = y$, ως εξής:

$$x_i = \tfrac{1}{L_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{d} L^T_{ij}\,x_j \right), \quad i = d, \dots, 1.$$

3. Υπολογισμός του πίνακα L.

Για $k = 1, \dots, d$, πρώτα υπολογίζουμε το διαγώνιο στοιχείο L_{kk} ως εξής:

$$L_{kk} = \left(A_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} (L_{kj})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της $k-$στήλης ως εξής:

$$L_{ik} := \tfrac{1}{L_{kk}} \left(A_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} L_{ij}\,L_{kj} \right), \quad i = k+1, \dots, d.$$

4. Αντικείμενο εργαστηρίου.

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τη λύση x του γραμμικού συστήματος $Ax = b$ χρησιμοποιώντας την ανάλυση Cholesky όπως περιγράψαμε στις προηγούμενες παραγράφους.

Επειδή ο πίνακας είναι συμμετρικός αρκεί να ξέρουμε τα στοιχεία της διαγωνίου και τα υποδιαγώνια στοιχεία του, δηλ. δεν απαιτούνται d^2 θέσεις μνήμης για την αποθήκευση των στοιχείων του αλλά $N = \frac{d(d+1)}{2}$ θέσεις μνήμης. Επιπλέον, για την αποθήκευση του πίνακα L δεν απαιτούνται επιπλέον θέσεις μνήμης, καθώς το L_{ij} μπορεί να αποθηκευτεί στο στοιχείο A_{ij} το οποίο δεν χρειάζεται στον υπολογισμό των υπολοίπων στοιχείων του L.

Επομένως, μπορούμε να αποθηκεύσουμε τα στοιχεία του πίνακα A κατά γραμμές σε ένα διάνυσμα v μήκους N, δηλ. το $A(i,j)$ αντιστοιχεί στο στοιχείο $v\left(\frac{(i-1)i}{2}+j\right)$.

Παράδειγμα. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με ένα τριδιαγώνιο πίνακα A με διαγώνια στοιχεία $A_{j,j}=2$ για $j=1,\dots,d$, υπερδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j+1}=-1$ για $j=1,\dots,d-1$, και υποδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j-1}=-1$ για $j=2,\dots,d$. Για $b\in\mathbb{R}^d$ με $b_1=1$, $b_j=0$ για $j=2,\dots,d-1$, και $b_d=1$, η λύση $x\in\mathbb{R}^d$ του γραμμικού συστήματος έχει συντεταγμένες $x_i=1$ για $i=1,\dots,d$.

Γ. Ζουράρης