Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-254 Αριθμητικη Γραμμικη Αλγεβρα
Χειμερινο Εξαμηνο 2016
Εργαστηριο 4
29-11-2016
Εκτιμηση του Δεικτη Καταστασης ενος Πινακα ως προς την $\|\cdot\|_1$ νορμα

1. Βασικοί ορισμοί. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Στα πλαίσια του μαθήματος έχουμε ορίσει την $\|\cdot\|_1$ νόρμα του $\mathbb{C}^n$ ως εξής: $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$. Η παραγόμενη φυσική νόρμα $\|\cdot\|_1$ πινάκων ορίζεται ως εξής:

$$\|B\|_1 := \sup_{z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \tfrac{\|Bz\|_1}{\|z\|_1} = \sup_{z \in \mathcal{S}} \|Bz\|_1 \quad \forall\, B \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

όπου $\mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C}^n : \ \|z\|_1 = 1\}$, και έχουμε αποδείξει ότι ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$\|B\|_1 := \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^n |B_{i,j}| \quad \forall\, B \in \mathbb{C}^{n \times n}. \tag{1}$$

Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι:

$$\|B\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \tfrac{\|Bx\|_1}{\|x\|_1} = \sup_{z \in \widetilde{\mathcal{S}}} \|Bz\|_1 \quad \forall\, B \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

όπου $\widetilde{\mathcal{S}} := \{z \in \mathbb{R}^n : \ \|z\|_1 = 1\}$. Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο δείκτης κατάστασης του πίνακα A ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{cond}_1(A) := \|A\|_1 \, \|A^{-1}\|_1.$$

Ο σκοπός είναι να υπολογίσουμε το δείκτη κατάστασης $\mathrm{cond}_1(A)$ του A ή να τον εκτιμήσουμε.

2. Υπολογισμός του $\mathrm{cond}_1(A)$.

Βήμα 2.1. Υπολογίστε την ποσότητα $b_1 := \|A\|_1$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (1).

Βήμα 2.2. Έστω ότι ο πίνακας A^{-1} έχει στήλες $(a_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$, και $(e_k)_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ με $(e_k)_i = \delta_{ki}$ για $i = 1, \dots, n$ και $k = 1, \dots, n$. Επειδή $A^{-1} e_k = a_k$ για $k = 1, \dots, n$, έχουμε

$$A a_k = e_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε τις στήλες του πίνακα A^{-1} λύνοντας τα n γραμμικά συστήματα που περιγράφονται στην (2). Τότε υπολογίζουμε την ποσότητα $b_2 := \max_{1 \le k \le n} \|a_k\|_1$, που είναι ίση με την $\|A^{-1}\|_1$. Υποθέστε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την ανάλυση Cholesky για να λύσετε τα γραμμικά συστήματα στην (2) και να υπολογίστε το b_2.

Βήμα 2.3. Η ποσότητα $c = b_1 \, b_2$ είναι ο ζητούμενος δείκτης κατάστασης $\mathrm{cond}_1(A)$.

3. Η μέθοδος του Hager. Έστω $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Ο αλγόριθμος του Hager για την εκτίμηση της νόρμας $\|B\|_1$ έχει ως εξής:

Βήμα 3.1. Ορίζουμε $x \in \mathbb{R}^n$ με $x_i = \frac{1}{n}$ για $i = 1, \dots, n$. (Προσέξτε ότι $x \in \widetilde{\mathcal{S}}$ επειδή $\|x\|_1 = 1$).

Βήμα 3.2. Στη συνέχεια ορίζουμε διανύσματα $y, w, z \in \mathbb{R}^n$ ως εξής

$$\begin{aligned} y &= Bx, \\ w_i &= \mathrm{sgn}(y_i), \quad i = 1, \dots, n. \\ z &= B^T w. \end{aligned}$$

όπου

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

Αν $\|z\|_\infty \leq (z,x)_2$, **τότε** θέτουμε $\gamma(B) = \|y\|_1$, **διαφορετικά** θέτουμε $x = e_k$ με $k \in \{1,\ldots,n\}$ τ.ω. $|z_k| = \|z\|_\infty$ και επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω με τη νέα τιμή για το x. Όταν τερματίσει ο αλγόριθμος το $\gamma(B)$ είναι μια προσέγγιση της $\|B\|_1$.

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια προσέγγιση c του $\operatorname{cond}_1(A)$ ως εξής: $c = \gamma(A)\,\gamma(A^{-1})$. Υποθέστε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος και χρησιμοποιήστε την ανάλυση Cholesky για να υπολογίσετε τα διανύσματα y και z όταν $B = A^{-1}$. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα που παίρνετε με εκείνα που δίνει ο υπολογισμός του δείκτη κατάστασης που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Προσοχή: Ο παραπάνω αλγόριθμος βρίσκει ένα κάτω φράγμα του δείκτη κατάστασης και μπορεί σε ειδικές περιπτώσεις να ειναι μακρυά από την πραγματική τιμή. Το προσδόκομενο όφελος από τον αλγόριθμο Hager είναι η εκτίμηση του δείκτη κατάστασης του A με τη λύση λιγότερων γραμμικών συστημάτων από ότι ο ακριβής υπολογισμός του.

Παράδειγμα.

α) Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με ένα τριδιαγώνιο πίνακα A με διαγώνια στοιχεία $A_{j,j} = 4$ για $j = 1,\ldots,n$, υπερδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j+1} = -1$ για $j = 1,\ldots,n-1$, και υποδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j-1} = -1$ για $j = 2,\ldots,n$.

β)Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με τον πίνακα Hilbert $H^n \in \mathbb{R}^n$ ο οποίος ορίζεται ως εξής: $H^n_{ij} := \frac{1}{i+j-1}$ για $i,j = 1,\ldots,n$.

Γ. Ζουράρης