Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-254 Αριθμητικη Γραμμικη Αλγεβρα
Χειμερινο Εξαμηνο 2016
Εργαστηριο 6
1-12-2016
Λυση γραμμικου συστηματος με βαση την QR αναλυση του πινακα

1. Εισαγωγή. Έστω $M \in \mathbb{N}$ φυσικός αριθμός και $A \in \mathbb{R}^{M\times M}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $b \in \mathbb{R}^M$ ένα διάνυσμα. Ο σκοπός μας είναι να λύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, μετατρέποντας τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό με τη χρήση μετασχηματισμών Householder.

Η μετατροπή του πίνακα A σε άνω τριγωνικό με τη χρήση μετασχηματισμών Householder στηρίζεται στον ακόλουθο μηχανισμό: Έστω $v \in \mathbb{R}^k$ ένα δοθέν διάνυσμα, $u \in \mathbb{R}^k$ ένα διάνυσμα με συντεταγμένες:

$$u_1 = v_1 + \mathrm{sign}(v_1)\,\|v\|_2, \quad u_i = v_i, \quad i = 2,\dots,k,$$

και

$$\theta = \tfrac{1}{2}\,\|u\|_2^2,$$

όπου $\mathrm{sgn}(x) = 1$ όταν $x \geq 0$ και $\mathrm{sgn}(x) = -1$ όταν $x < 0$. Όταν $\theta \neq 0$,

$$v \notin \{\lambda\,(1,0,\dots,0)^T : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

και $Q \in \mathbb{R}^{k\times k}$ με

$$Q = I - \tfrac{1}{\theta}\,u\,u^T$$

όπου I ο μοναδιαίος πίνακας του $\mathbb{R}^{k\times k}$, τότε για το διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^k$ με $w = Q_k\,v$ ισχύει ότι: $w_1 = -\mathrm{sign}(v_1)\,\|v\|_2$ και $w_i = 0$ για $i = 2,\dots,k$.

2. Περιγραφή του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 2.1. Ορίζουμε μεταβλητή kc που υποδηλώνει τη στήλη στην οποία βάζουμε μηδενικά από την $kc+1$ μέχρι την M γραμμή. Θέτουμε αρχική τιμή $kc = 1$.

Βήμα 2.2: Ορίζουμε $km = M - kc + 1$ και διάνυσμα $v \in \mathbb{R}^{km}$ το οποίο περιέχει τα στοιχεία της στήλης kc του A από την kc έως την M γραμμή, δηλ.

$$v(i) = A(kc - 1 + i, kc) \quad i = 1,\dots,km.$$

Αν $v_i = 0$ για $i = 2,\dots,km$, **τότε** αλλάζουμε στήλη θέτοντας

$$kc = kc + 1,$$

διαφορετικά:
i) ορίζουμε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^{km}$ ως εξής:

$$u(i) = \begin{cases} v(1) + \mathrm{sgn}(v(1))\,\|v\|_2, & i = 1, \\ v(i), & i = 2,\dots,km, \end{cases},$$

όπου

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

ii) ορίζουμε

$$\theta = \tfrac{1}{2}\,\|u\|_2^2,$$

iii) θέτουμε

$$A(kc,kc) = -\mathrm{sgn}(v(1))\,\|v\|_2$$

και

$$A(i + kc, kc) = u(i), \quad i = 1,\dots,km,$$

iv) για $j = kc+1, \dots, M$, θέτουμε

$$v(i) = A(kc-1+i, j), \quad i = 1, \dots, km,$$

και στη συνέχεια θέτουμε

$$A(kc-1+i, j) = v(i) - \tfrac{1}{\theta}\,(u,v)_2\, u(i), \quad i = 1, \dots, km,$$

v) θέτουμε

$$v(i) = b(kc-1+i), \quad i = 1, \dots, km,$$

και στη συνέχεια θέτουμε

$$b(kc-1+i, j) = v(i) - \tfrac{1}{\theta}\,(u,v)_2\, u(i), \quad i = 1, \dots, km,$$

vi) Θέτουμε

$$kc = kc + 1.$$

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν $kc = M$.

Βήμα 2.3: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο A (μετά τα προηγούμενα βήματα) είναι άνω τριγωνικός.

Παράδειγμα. Έστω: α) τριδιαγώνιος πίνακας A με διαγώνια στοιχεία $A_{j,j} = 4$ για $j = 1, \dots, M$, υπερδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j+1} = -1$ για $j = 1, \dots, M-1$, και υποδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j-1} = -1$ για $j = 2, \dots, M$, και β) $b \in \mathbb{R}^M$ με $b_1 = 3$, $b_i = 2$ για $i = 2, \dots, M-1$, $b_M = 3$. Τότε το σύστημα $Ax = b$, έχει λύση $x \in \mathbb{R}^M$ με $x_i = 1$ για $i = 1, \dots, M$.

Γ. Ζουράρης