Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-254 Αριθμητικη Γραμμικη Αλγεβρα
Χειμερινο Εξαμηνο 2016
Εργαστηριο 7
6-12-2016
Απαλοιφη Gauss με μερικη οδηγηση

1. Εισαγωγή. Έστω $M \in \mathbb{N}$ φυσικός αριθμός και $A \in \mathbb{R}^{M\times M}$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας και $b \in \mathbb{R}^M$ ένα διάνυσμα. Ο σκοπός μας είναι να λύσουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, μετατρέποντας τον πίνακα A σε άνω τριγωνικό χρησιμοποιώντας την απαλοιφή Gauss με μερική οδήγηση.

2. Περιγραφή του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 2.1. Ορίζουμε μεταβλητή kc που υποδηλώνει τη στήλη στην οποία βάζουμε μηδενικά από την $kc+1$ μέχρι την M γραμμή. Θέτουμε αρχική τιμή $kc = 1$.

Βήμα 2.2. Βρίσκουμε το $k \in \{kc, \dots, M\}$ για το οποίο ισχύει ότι: $|A(k, kc)| = \max\limits_{kc\leq i\leq M} |A(i, kc)|$. Στη συνέχεια θέτουμε $\mathrm{ipvt}(kc) = k$ και εναλλάσουμε τα στοιχεία της $kc-$γραμμής με εκείνα της $k-$γραμμής από την $kc-$στήλη έως την $M-$στήλη.

Βήμα 2.3. Ορίζουμε πολλαπλασιαστές:

$$v(i) = -\tfrac{A(i,kc)}{A(kc,kc)}, \quad i = kc+1, \dots, M.$$

Θέτουμε

$$A(i, kc) = v(i), \quad i = kc+1, \dots, M.$$

Για $i = kc+1, \dots, M$, θέτουμε:

$$A(i, j) \leftarrow A(i, j) + v(i)\, A(kc, j), \quad j = kc+1, \dots, M.$$

Βήμα 2.4: Θέτουμε

$$kc \leftarrow kc + 1.$$

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν $kc = M$.

Βήμα 2.5: Για $i = 1, \dots, M-1$ κάνουμε τα ακόλουθα:
i) Αν $\mathrm{ipvt}(i) \neq i$ τότε εναλλάσουμε τις τιμές $b(i)$ και $b(\mathrm{ipvt}(i))$.
ii) Θέτουμε

$$b(j) \leftarrow b(j) + A(j, i)\, b(i), \quad j = i+1, \dots, M.$$

Βήμα 2.6: Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ λαμβάνοντας υπόψιν ότι ο A (μετά τα προηγούμενα βήματα) είναι άνω τριγωνικός.

3. Παράδειγμα. Έστω: α) τριδιαγώνιος πίνακας A με διαγώνια στοιχεία $A_{j,j} = 4$ για $j = 1, \dots, M$, υπερδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j+1} = -1$ για $j = 1, \dots, M-1$, και υποδιαγώνια στοιχεία $A_{j,j-1} = -1$ για $j = 2, \dots, M$, και β) $b \in \mathbb{R}^M$ με $b_1 = 3$, $b_i = 2$ για $i = 2, \dots, M-1$, $b_M = 3$. Τότε το σύστημα $Ax = b$, έχει λύση $x \in \mathbb{R}^M$ με $x_i = 1$ για $i = 1, \dots, M$.

Γ. Ζουράρης