

2. Τα ακουστικά κύματα στο θαλάσσιο περιβάλλον

Η ακουστική ωκεανογραφία επικεντρώνεται γύρω από την διάδοση της ακουστικής ενέργειας στο νερό και στα γειτονικά του μέσα (πυθμένας) και επομένως η μελέτη των συνθηκών διάδοσης και αλληλεπίδρασης με τα σύνορα ενός ακουστικού μέσου είναι η βάση της έρευνας στην συγκεκριμένη θεματική περιοχή. Στα κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε τα βασικά σημεία της κυματικής θεωρίας περιορίζοντας την μαθηματική ανάλυση στα επίπεδα κύματα και στα φαινόμενα τοπικής διάδοσης και ανάκλασης κυμάτων ανάμεσα σε διεπιφάνειες. Στο επόμενο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε στοιχεία της γεωμετρικής ακουστικής με βάση την οποία μπορεί με ένα σχετικά απλό και κατανοητό τρόπο να μελετήσει κάποιος την διάδοση του ήχου σε ένα ακουστικό μέσο.

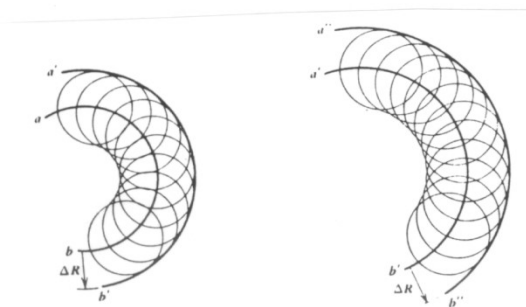
2.1 Η φύση των ακουστικών διαταραχών.

Ένα ακουστικό κύμα είναι μία διαταραχή της πίεσης ενός μέσου που διαδίδεται μέσα στο μέσον αυτό. Για να γίνει δυνατή η μετάδοση της διαταραχής, το μέσον πρέπει να είναι συμπιεστό (να επιτρέπει αυξομειώσεις της πυκνότητας) και τα ακουστικά κύματα χαρακτηρίζονται ως *κύματα συμπιεστότητας (compressional waves)*. Η διαταραχή προέρχεται από την ακουστική πηγή που με κάποιο φυσικό τρόπο (π.χ. ταλάντωση ή έκρηξη) διαταράσσει την κατάσταση ισορροπίας του μέσου με έμφαση στα κινητικά χαρακτηριστικά των στοιχειωδών σωματιδίων που το αποτελούν και προκαλεί αυξομειώσεις των μεγεθών που υπεισέρχονται στην μηχανική συμπεριφορά του υλικού, όπως είναι η πυκνότητα, η πίεση, και η ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων. Ανάλογα με το μέγεθος της διαταραχής η πηγή χαρακτηρίζεται ως μεγάλης ή μικρής έντασης. Είναι αυτονόητο ότι η ακουστική διαταραχή προσδίδει ενέργεια στο σύστημα που χαρακτηρίζεται ως “*ακουστική ενέργεια*”.

2.2 Ακουστικά κύματα.

Η ακουστική διαταραχή διαδίδεται στο ακουστικό μέσον με μία διαδικασία που πολύ απλά μπορεί να περιγραφεί ως μία διαδοχική διέγερση των στοιχειωδών σωματιδίων του ακουστικού μέσου. Εάν θεωρήσουμε μία σημειακή πηγή, η αρχή του Huygens μας δίδει παραστατικά τη διαδικασία αυτή για ομογενή και ισότροπα μέσα. Σύμφωνα λοιπόν με αυτήν, μία διαταραχή που έχει φτάσει σε συγκεκριμένο σημείο του ακουστικού χώρου δρα ως νέα πηγή που λόγω συμμετρίας στέλνει ακουστική ενέργεια σε μέτωπα που έχουν τη μορφή σφαιρικών επιφανειών. Συνθέτοντας τις νέες αυτές επιφάνειες παίρνει κανείς το νέο «*μέτωπο κύματος*»² κ.ο.κ.. Η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής παίρνει συγκεκριμένη τιμή που μπορεί να μεταβάλλεται με τον χώρο και τον χρόνο. Εάν η ταχύτητα θεωρηθεί σταθερή και ίση με c , η διανυθείσα από το μέτωπο κύματος απόσταση σε χρόνο Δt είναι $\Delta R = c \Delta t$.

² Για ένα αυστηρότερο ορισμό του μετώπου κύματος παραπέμπουμε στο Κεφάλαιο 2.4.



Σχήμα 2.1 Η αρχή του Huygens σε ότι αφορά την εκπομπή κυμάτων από σημειακή πηγή (από Clay and Medwin 1977)

2.3 Διάδοση του ήχου – Ακουστική εξίσωση.

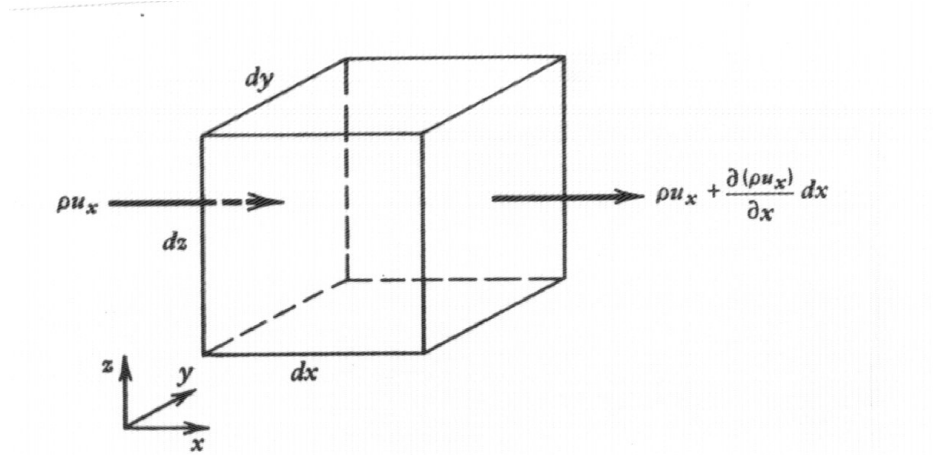
Η μελέτη των χαρακτηριστικών διάδοσης των κυμάτων προϋποθέτει τη διατύπωση των εξισώσεων που διέπουν τη μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Τα μεγέθη αυτά είναι η **πίεση** p , η **ταχύτητα** των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου $\vec{u}$ (διανυσματικό μέγεθος) και η **πυκνότητα** ρ , που είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών και του χρόνου, $p = p(\vec{x}, t)$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ όπου με $\vec{x}$ συμβολίζουμε τις χωρικές μεταβλητές. Δεδομένου ότι θα ασχοληθούμε με τη διάδοση του ήχου στο νερό, θα παράγουμε την ακουστική εξίσωση μόνο για ρευστά ακουστικά μέσα.

Σημειώνουμε ότι τα ακουστικά κύματα είναι «**διαμήκη**». Διαμήκη κύματα ονομάζονται τα κύματα των οποίων η διεύθυνση διάδοσής τους είναι παράλληλη στη διεύθυνση της ταλάντωσης των σωματιδίων που αποτελούν το μέσο διάδοσης. Διαμήκη κύματα (και επομένως ακουστικά κύματα) διαδίδονται τόσο στα στερεά όσο και στα υγρά και στα αέρια σώματα. Τα διαμήκη κύματα καθώς και τα διατμητικά (εγκάρσια) κύματα που θα τα συναντήσουμε αργότερα στη μελέτη των κυμάτων που διαδίδονται στον πυθμένα της θάλασσας αποτελούν τα δύο βασικά είδη κυμάτων.

Το πρόβλημα θα το μελετήσουμε κατ' αρχήν στις τρεις διαστάσεις και στη συνέχεια θα περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις όπου και θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές λύσεις. Η ακουστική εξίσωση προκύπτει από την εφαρμογή των βασικών εξισώσεων των συμπίεστων ρευστών που διέπουν τις μεταβολές των χαρακτηριστικών μεγεθών του μέσου. Παρατηρώντας ότι έχουμε τρεις ανεξάρτητες ποσότητες των οποίων ζητούμε τον υπολογισμό, μπορεί κανείς να διατυπώσει την απαίτηση για την εφαρμογή τριών ανεξαρτήτων μεταξύ τους εξισώσεων που θα μας δώσουν τη δυνατότητα να διατυπώσουμε ισάριθμες εξισώσεις ανά μία για κάθε μία από τις ανωτέρω ποσότητες.

Οι τρεις εξισώσεις που θα επεξεργαστούμε είναι:

- Η εξίσωση της συνέχειας
- Η εξίσωση του Euler και
- Η καταστατική εξίσωση



Σχήμα 2.2 Στοιχειώδης όγκος ρευστού για την εφαρμογή των νόμων συνέχειας και Euler.

Στην ανάπτυξη που θα ακολουθήσει θα υποθέσουμε ότι το ρευστό είναι ομογενές, ισότροπο και δεν υπάρχουν μηχανισμοί που να δημιουργούν συνεκτικότητα (viscosity) ή μεταφορά θερμότητας. Επίσης θα υποθέσουμε αμελώντας την επιδραση της βαρύτητας, ότι οι τιμές ισορροπίας της πίεσης και της πυκνότητας τις οποίες θα ορίσουμε στη συνέχεια, είναι σταθερές σε όλο τον όγκο του ρευστού. Τέλος δεν θα θεωρήσουμε εξωτερική εισαγωγή ενέργειας στο σύστημα (ακουστική πηγή), για την οποία θα κάνουμε την υπόθεση ότι βρίσκεται εκτός του χωρίου στο οποίο θα υπολογίσουμε τις μεταβολές των ακουστικών μεγεθών.

2.3.1 Η εξίσωση συνέχειας

Θεωρούμε έναν όγκο ρευστού $dV = dx dy dz$ όπως στο Σχήμα 2.2 που είναι σταθερός στο χώρο και μέσω του οποίου διέρχεται το ρευστό. Ο ρυθμός ροής του υγρού διαμέσου του όγκου αυτού, πρέπει να είναι ίσος με το ρυθμό αύξησης ή μείωσης της μάζας του ρευστού στον όγκο.

Η καθαρή ροή του ρευστού κατά τον άξονα των x είναι:

$$\{\rho u_x - [\rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx]\} dy dz = -\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dV \quad (2.3.1)$$

όπου u_x είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον άξονα των x .

Εντελώς αντίστοιχα παίρνουμε τις εξισώσεις για τους υπόλοιπους άξονες και αθροίζοντας οδηγούμεθα στην ακόλουθη έκφραση για την καθαρή ροή διαμέσου του όγκου dV :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] dV = -[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] dV \quad (2.3.2)$$

Η καθαρή ροή διαμέσου του όγκου ισοδυναμεί με την μεταβολή της μάζας του όγκου στη μονάδα του χρόνου που είναι $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$.

Εξισώνοντας τους ανωτέρω όρους παίρνουμε:

$$-[\nabla \cdot (\rho \vec{u})] = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.3.3)$$

που καλείται εξίσωση συνέχειας.

Όπως είναι διατυπωμένη η ανωτέρω εξίσωση είναι μη γραμμική μια και στον πρώτο όρο εμφανίζεται το γινόμενο της πυκνότητας επί την ταχύτητα που είναι και οι δύο άγνωστες συναρτήσεις. Στην συνέχεια θα δούμε πως μπορεί να εφαρμοστεί μία διαδικασία γραμμικοποίησης που θα μας οδηγήσει στην γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση που είναι γνωστή απλά ως «ακουστική εξίσωση».

2.3.2 Η εξίσωση του Euler

Θεωρούμε τώρα ένα στοιχειώδη όγκο ρευστού $dV = dx dy dz$ που όμως κινείται με αυτό. Η επιτάχυνση της στοιχειώδους μάζας του ρευστού που περιέχεται στο όγκο είναι $\vec{a}(\vec{x}, t) = \vec{a}(x, y, z, t)$ και σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton συνδέεται με την δύναμη $d\vec{f}$ που ενεργεί στη μάζα, μέσω της σχέσης:

$$d\vec{f} = \vec{a} dm \quad (2.3.4)$$

Εάν αμελήσουμε την συνεκτικότητα, η καθαρή δύναμη που επενεργεί στο στοιχειώδη όγκο κατά τη διεύθυνση x , οφείλεται στην καθαρή πίεση που επενεργεί στην πλευρά $dydz$ και είναι:

$$df_x = [p - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)] dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dV \quad (2.3.5)$$

και στις τρεις διαστάσεις:

$$d\vec{f} = -\nabla p dV \quad (2.3.6)$$

Η επιτάχυνση σύμφωνα με τον ορισμό της είναι:

$$\vec{a}(x, y, z, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) - \vec{u}(x, y, z, t)}{dt} \quad (2.3.7)$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor την ταχύτητα και κρατώντας όρους πρώτης τάξης παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= (x + u_x dt, y + u_y dt, z + u_z dt, t + dt) = \\ &\vec{u}(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y dt + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z dt\end{aligned}\quad (2.3.8)$$

με τις παραγώγους να υπολογίζονται στο (x, y, z, t) , οπότε η επιτάχυνση είναι:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z \quad (2.3.9)$$

που γράφεται:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (2.3.10)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης, (σχέση 2.3.4) και τις σχέσεις 2.3.6 και 2.3.10 παίρνουμε μία σχέση ανάμεσα στην πίεση, την πυκνότητα και την ταχύτητα του μέσου:

$$-\nabla p = \rho \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right\} \quad (2.3.11)$$

Η εξίσωση αυτή γνωστή ως Εξίσωση Euler είναι και πάλι μη γραμμική.

2.3.3 Η καταστατική εξίσωση

Η καταστατική εξίσωση είναι χαρακτηριστική του μέσου στο οποίο διαδίδεται η κυματική διαταραχή και συσχετίζει τις μεταβολές της πίεσης και της πυκνότητας. Θεωρώντας αδιαβατικές μεταβολές στο ρευστό, η καταστατική εξίσωση δεν περιλαμβάνει όρο που να σχετίζεται με την εντροπία και εκφράζεται μέσω της γενικής σχέσης:

$$p = g(\rho) \quad (2.3.12)$$

Η μορφή της συνάρτησης g εξαρτάται από το υλικό μέσα στο οποίο πραγματοποιείται η διάδοση και μέσω αυτής όπως θα δούμε διαφοροποιείται η ακουστική διάδοση ανάλογα με το είδος του ρευστού.

2.3.4 Η γραμμικοποιημένη κυματική εξίσωση

Στη φύση, η μεταβολή της πίεσης ενός ακουστικού μέσου που προέρχεται από μια ηχητική πηγή δημιουργεί μικρές μεταβολές των παραμέτρων του ακουστικού μέσου. Έτσι με αφετηρία τις τιμές των παραμέτρων στο μέσον όταν δεν υπάρχει ακουστική διαταραχή, μπορούμε να γράψουμε τις αντίστοιχες ποσότητες ως αθροίσματα τιμών ισορροπίας και μικρών μεταβολών:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \rho_1(\vec{x}, t) \\
p &= p_0(\vec{x}, t) + \varepsilon p_1(\vec{x}, t) \\
\vec{u} &= \vec{u}_0(\vec{x}, t) + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{x}, t)
\end{aligned}
\tag{2.3.13}$$

όπου η παράμετρος ε χαρακτηρίζει τις μικρές μεταβολές. Ο δείκτης 0 χαρακτηρίζει τις τιμές στο ακουστικό αδιατάρακτο μέσον, ενώ ο δείκτης 1 χαρακτηρίζει τις μεταβολές λόγω της ακουστικής διέγερσης.

Αντικαθιστώντας τις αναπαραστάσεις 2.3.13 στην εξίσωση συνέχειας 2.3.4 παίρνουμε:

$$\frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(\vec{u}_0 + \varepsilon \vec{u}_1)\} = 0
\tag{2.3.14}$$

Εξισώνοντας όρους ίδιας δύναμης του ε παίρνουμε:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_0 \vec{u}_0\} = 0
\tag{2.3.15}$$

Εάν υποθέσουμε αδιατάρακτο ρευστό σε ισορροπία ($\vec{u}_0 = 0$), παίρνουμε και $\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$ οπότε η πυκνότητα ισορροπίας δεν εξαρτάται από το χρόνο ($\rho_0 = \rho(\vec{x})$).

Με την ίδια υπόθεση, εξισώνουμε τους όρους πρώτης τάξης ως προς ε παίρνουμε :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot \{\rho_0 \vec{u}_1\} = 0
\tag{2.3.16}$$

Εντελώς αντίστοιχα παίρνουμε για την εξίσωση του Euler:

$$-\nabla p_1 = \rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}
\tag{2.3.17}$$

όπου έχουμε επίσης αμελήσει όρους δεύτερης τάξης ως προς ε και βέβαια έχοντας επαναλάβει την υπόθεση για μηδενική ταχύτητα ισορροπίας ($\vec{u}_0 = 0$).

Όσον αφορά στην καταστατική εξίσωση μπορούμε εύκολα, αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από την τιμή ισορροπίας (δείκτης 0) και αμελώντας όρους δεύτερης τάξης και άνω, να καταλήξουμε στη σχέση :

$$p_1 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \rho_1
\tag{2.3.18}$$

Οι εξισώσεις 2.3.16-2.3.18 είναι αρκετές για να μας οδηγήσουν στην ακουστική εξίσωση:

Παίρνοντας την απόκλιση των δύο όρων της Euler έχουμε:

$$-\nabla^2 p_1 = \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}) \quad (2.3.19)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο την εξίσωση της συνέχειας παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} + \nabla \cdot (\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}) = 0 \quad (2.3.20)$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις παίρνουμε :

$$-\nabla^2 p_1 = -\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} \quad (2.3.21)$$

Από την καταστατική εξίσωση παίρνουμε:

$$\rho_1 = p_1 \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0} \quad (2.3.22)$$

Ορίζουμε $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0 \equiv c^2$ και αντικαθιστώντας την πυκνότητα διαταραχής ρ_1 από την 2.3.22 στην 2.3.21 καταλήγουμε στη σχέση :

$$\nabla^2 p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (2.3.23)$$

Παρατηρούμε ότι οδηγηθήκαμε σε μια κυματική εξίσωση. Ο συντελεστής c που ορίστηκε ανωτέρω είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και τον συναντήσαμε ήδη στην φαινομενολογική ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι οδηγηθήκαμε σ' αυτόν μέσω της καταστατικής εξίσωσης και γι αυτό θεωρούμε ότι η σχέση 2.3.22 οδηγεί στον «θερμοδυναμικό ορισμό» της ταχύτητας διάδοσης του ήχου. Αντίστοιχα μπορούμε να οδηγηθούμε σε εξισώσεις ως προς την ταχύτητα ή την πυκνότητα που είναι και αυτές κυματικής μορφής.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην εξίσωση 2.3.23 δεν υπάρχει κάποιος όρος που να μας δίνει πληροφορία για την πηγή ενέργειας (ακουστική πηγή). Αυτό συμβαίνει γιατί στην διατύπωση της εξίσωσης δεν λάβαμε υπ' όψιν μας είσοδο ενέργειας στο σύστημα. Απλά θεωρήσαμε ότι στο πεδίο ορισμού του προβλήματος, υπάρχει μια διαταραχή της πίεσης που έχει προκύψει με μη συγκεκριμένο τρόπο. Φυσικά η πλήρης κυματική θεωρία ως προς τη διάδοση του ήχου σε οποιοδήποτε μέσο περιλαμβάνει και την πληροφορία για την πηγή. Η πηγή μπορεί να εισαχθεί στη διαφορική εξίσωση 2.3.23 με τη μορφή ενός όρου διέγερσης.

Για λόγους πληρότητας και μόνο θα παραθέσουμε στη συνέχεια την γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση, η οποία θα προέκυπτε (βλ. Allan Boyles) εάν

θεωρούσαμε είσοδο ενέργειας στο σύστημα που εκφράζεται μέσω της έντασης της πηγής (source strength) Q_1 , και επί πλέον εάν δίναμε τη δυνατότητα μεταβολής της πυκνότητας ισορροπίας ρ_0 συναρτήσει των χωρικών μεταβλητών.

$$\nabla^2 p_1 - \frac{1}{\rho_0} \Delta \rho_0 \cdot \Delta p_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q_1}{\partial t} \quad (2.3.24)$$

Είναι φανερό ότι όταν η πυκνότητα ισορροπίας θεωρηθεί σταθερή, ο δεύτερος όρος μηδενίζεται και η μόνη διαφορά που έχουμε με τη σχέση 2.3.23 είναι η προσθήκη του όρου διέγερσης.

Δεν θα μας απασχολήσει όμως εδώ η πλήρης κυματική θεωρία που αποτελεί αντικείμενο άλλου μαθήματος³.

Με βάση την εξίσωση 2.3.23, συμπεραίνουμε ότι μία μικρή διαταραχή της δυναμικής κατάστασης ενός μέσου, οδηγεί στην παραγωγή ενός κύματος που διαδίδεται στο μέσον με ταχύτητα c . Με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάνει, η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται εν γένει από τις χωρικές μεταβλητές $\vec{x}$.

Η κυματική εξίσωση 2.3.23 έχει προέλθει από την γραμμικοποίηση των εξισώσεων των ρευστών (παράλειψη όρων τάξης υψηλότερης του ε^1) και καλείται **γραμμικοποιημένη ακουστική εξίσωση**. Η υπόθεση ωστόσο για μικρές μεταβολές των παραμέτρων της κινηματικής κατάστασης του ρευστού στην οποία στηρίζεται δεν απέχει από την πραγματικότητα και εκφράζει την φύση των ακουστικών διαταραχών. Την εξίσωση 2.3.23 θα την αναφέρομε στη συνέχεια ως «ακουστική εξίσωση».

Να πούμε ακόμη ότι η διατύπωση ενός προβλήματος κυματικής διάδοσης στο θαλάσσιο περιβάλλον περιλαμβάνει εκτός από την βασική εξίσωση και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες για τη συμπεριφορά της άγνωστης συνάρτησης στα σύνορα, που στην περίπτωση μας είναι η επιφάνεια της θάλασσας και οι διεπιφάνειες του πυθμένα, ενώ απαιτείται ακόμη η γνώση της επ' άπειρον συμπεριφοράς της λύσης στην περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι εκτείνεται μέχρι εκεί. Αναλυτική παρουσίαση του προβλήματος της κυματικής διάδοσης στη θάλασσα γίνεται επίσης στο μάθημα «Κυματική Διάδοση».

Στη συνέχεια θα δούμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης χωρίς ειδική αναφορά σε σύνορα και άρα σε συνοριακές συνθήκες ενός «καλώς τεθειμένου» προβλήματος κυματικής διάδοσης⁴.

³ Η σχετική θεωρία αποτελεί Τμήμα του Μαθήματος «Κυματική Διάδοση».

⁴ «Καλώς τεθειμένο πρόβλημα» είναι ένα πρόβλημα το οποίο με βάση τη διατύπωσή του διαθέτει μοναδική λύση.

2.4 Στοιχειώδεις λύσεις της ακουστικής εξίσωσης

2.4.1 Χωρισμός μεταβλητών χώρου-χρόνου

Μια τεχνική για τη λύση των μερικών διαφορικών εξισώσεων υπό ορισμένες συνθήκες είναι η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών. Με βάση τη μέθοδο αυτή μια μερική διαφορική εξίσωση για μία συνάρτηση πολλών μεταβλητών μπορεί να χωριστεί σε μια ομάδα συνήθων διαφορικών εξισώσεων κάθε μια από τις οποίες ορίζεται για μια συνάρτηση που εξαρτάται από μία μόνο μεταβλητή (συναρτήσεις που μεταβάλλονται ανεξάρτητα η μία από την άλλη). Ο χωρισμός μεταβλητών δεν είναι βέβαια δυνατός σε κάθε περίπτωση. Ειδικά για την κυματική εξίσωση ο χωρισμός είναι δυνατός σε 11 συστήματα συντεταγμένων (βλ. Morse and Feshbach “Methods of Theoretical Physics”) και μόνον εάν οι διεπιφάνειες του προβλήματος συμπίπτουν με μία επιφάνεια συντεταγμένων των ως άνω 11 συστημάτων, Επιπλέον ο όρος $1/c^2$ της κυματικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι είτε άθροισμα όρων καθένας από τους οποίους εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή, ή να είναι ο ίδιος συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι οι ανωτέρω όροι πληρούνται και θα οδηγηθούμε σε συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που θα μας δώσουν τη λύση απλών σχετικά προβλημάτων που αναφέρονται στη διάδοση του ήχου στη θάλασσα.

Θα προσπαθήσουμε κατ' αρχήν να απομονώσουμε την χρονική εξάρτηση.

Θεωρούμε ότι η ακουστική πίεση μπορεί να γραφεί ως:

$$p_1(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x})T(t) \quad (2.4.1)$$

Σημειώνουμε ότι από το σημείο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό p για τη χωρική συνιστώσα της ακουστικής πίεσης ($p(\vec{x}) \equiv \bar{p}(\vec{x})$) και δεν θα πρέπει να συγχέεται με την ολική πίεση του μέσου όπως εκφράζεται από την εξίσωση 2.3.13. Η ταχύτητα διάδοσης του ήχου c θα θεωρηθεί όπως έχουμε ήδη σημειώσει συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών $c = c(\vec{x})$. Έτσι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την 2.4.1 στην ακουστική εξίσωση 2.3.23 και να πάρουμε:

$$T \nabla^2 p = \frac{1}{c^2} p \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2.4.2)$$

ή

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} \quad (2.4.3)$$

Μια και ο αριστερός όρος της 2.4.3 είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών και ο δεξιός όρος συνάρτηση μόνο του χρόνου, για να ισχύει πάντοτε η εξίσωση, θα πρέπει κάθε όρος να ισούται με μια σταθερά. Έτσι παίρνουμε :

$$\frac{c^2}{p} \nabla^2 p = \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\omega^2 \quad (2.4.4)$$

όπου το αρνητικό σημείο αλλά και η ίδια η μορφή της σταθεράς ω^2 έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να διευκολύνονται οι μαθηματικοί χειρισμοί αφ' ενός αλλά και η φυσική ερμηνεία αφ' ετέρου. Έτσι, στην 2.4.4 αναγνωρίζει κανείς στην σταθερά ω την *κυκλική συχνότητα* του κύματος που συναντήσαμε και στα επιφανειακά κύματα βαρύτητας και θυμίζουμε τη σχέση που συνδέει κυκλική συχνότητα με συχνότητα εκφρασμένη σε Hz, που είναι $\omega = 2\pi f$.

Από την 2.4.4 παίρνουμε δύο εξισώσεις που ισχύουν παράλληλα:

$$\nabla^2 p + \frac{\omega^2}{c^2} p = 0 \quad (2.4.5)$$

και

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \quad (2.4.6)$$

Από τις εξισώσεις αυτές η πρώτη είναι γνωστή ως *εξίσωση Helmholtz* και διέπει την χωρική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης για «μονοχρωματική πηγή»⁵ ενώ η λύση της δεύτερης δίνει την χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης.

Η 2.4.6 έχει ως γνωστόν δύο ανεξάρτητες μεταξύ τους λύσεις :

$$T = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (2.4.7)$$

με A, B σταθερές.

Χωρίς να χαθεί η γενικότητα της λύσης θα θεωρήσουμε ότι η σταθερά A είναι 1, και θα δεχθούμε από τις δύο πιθανές λύσεις εκείνη που αντιστοιχεί σε αρνητικό πρόσημο στον εκθέτη. Αυτό σημαίνει ότι θα μελετήσουμε πηγές οι οποίες εκπέμπουν ενέργεια στο περιβάλλον με χρονική εξάρτηση $e^{-i\omega t}$. Καταλήγουμε δηλαδή στο να θεωρήσουμε λύσεις της μορφής

$$T = e^{-i\omega t} \quad (2.4.8)$$

Κατόπιν αυτών, η λύση μας για την πίεση διαταραχής γράφεται

$$p_1(\vec{x}, t) = p(\vec{x})e^{-i\omega t} \quad (2.4.9)$$

2.4.2 Χωρισμός μεταβλητών για την χωρική εξάρτηση της πίεσης

Ο λόγος που αναφερόμαστε στην ειδική μορφή της λύσης για τη συνάρτηση p είναι ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε έκφραση για επίπεδα κύματα που θα αποτελέσουν την πρώτη ειδική μορφή κυμάτων που θα μας απασχολήσει στη μελέτη μας. Το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θα αναφερόμαστε είναι το καρτεσιανό, για το οποίο ο

τελεστής ∇^2 παίρνει τη μορφή $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

⁵ Μονοχρωματική (monochromatic) χαρακτηρίζεται μία πηγή όταν εκπέμπει σε συγκεκριμένη συχνότητα. Χαρακτηρίζεται και ως «αρμονική».

Θεωρώντας ακόμη ότι

$$p(\vec{x}) = p(x, y, z) = p_x(x)p_y(y)p_z(z) \quad (2.4.10)$$

και αντικαθιστώντας την ανωτέρω έκφραση στην εξίσωση Helmholtz (2.4.5) παίρνομε μετά από στοιχειώδεις πράξεις :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \cdot \frac{1}{p_x} + \frac{d^2 p_y}{dy^2} \cdot \frac{1}{p_y} + \frac{d^2 p_z}{dz^2} \cdot \frac{1}{p_z} + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.4.11)$$

Για να ισχύει η εξίσωση αυτή θα πρέπει κάθε όρος που περιέχει τις συνιστώσες της πίεσης σε κάθε διάσταση να είναι σταθερός αφού η μεταβολή της συνιστώσας της πίεσης με την αντίστοιχη διάσταση δεν επηρεάζει την άλλη. Εάν συμβολίσουμε με $-k_i^2$ $i = x, y, z$ την τιμή κάθε όρου παίρνομε :

$$\frac{d^2 p_x}{dx^2} \frac{1}{p_x} = -k_x^2 \Rightarrow \frac{d^2 p_x}{dx^2} + k_x^2 p_x = 0 \quad (2.4.12\alpha)$$

$$\frac{d^2 p_y}{dy^2} \frac{1}{p_y} = -k_y^2 \Rightarrow \frac{d^2 p_y}{dy^2} + k_y^2 p_y = 0 \quad (2.4.12\beta)$$

$$\frac{d^2 p_z}{dz^2} \frac{1}{p_z} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 p_z}{dz^2} + k_z^2 p_z = 0 \quad (2.4.12\gamma)$$

Προσέξτε το συμβολισμό της παραγώγου που για κάθε συνιστώσα της πίεσης είναι συνήθης και όχι μερική παράγωγος με δεδομένο ότι κάθε μία από τις συναρτήσεις p_i , $i = x, y, z$ είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής⁶.

Τέλος από τη σχέση 2.4.11 βλέπομε ότι για τις σταθερές k_i^2 $i = x, y, z$ ισχύει η σχέση:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (2.4.13)$$

Στο σημείο αυτό να υπενθυμίσουμε ότι δεν έχουμε λάβει υπ' όψιν μας οριακές ή αρχικές συνθήκες στην μέχρι τώρα ανάλυση. Επομένως δεν μιλάμε ακόμη για λύση ενός προβλήματος αλλά λύσεις μιας εξίσωσης. Κατόπιν αυτών, προχωράμε στην διατύπωση λύσεων για τις εξισώσεις 2.4.12(α-γ) που για k_i ($i = x, y, z$) $\neq 0$ είναι:

⁶ Το αρνητικό πρόσημο στη σταθερά χωρισμού δικαιολογείται από τη διανυσματική θεώρηση του αριθμού κύματος που θα δούμε στη συνέχεια.

$$p_x(x) = A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x} \quad (2.4.14\alpha)$$

$$p_y(y) = B_1 e^{ik_y y} + B_2 e^{-ik_y y} \quad (2.4.14\beta)$$

$$p_z(z) = C_1 e^{ik_z z} + C_2 e^{-ik_z z} \quad (2.4.14\gamma)$$

όπου οι συντελεστές θα υπολογιστούν εφ' όσον έχει οριστεί πλήρως το πρόβλημα και σε συνδυασμό με τις οριακές συνθήκες καθώς και τη συνθήκη της πηγής για την οποία δεν έχουμε ακόμη αναφέρει κάτι.

Στο παράρτημα Δ των σημειώσεων, παρουσιάζεται σύντομα η εναλλακτική θεώρηση των λύσεων των εξισώσεων 2.4.12 μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Η ισοδυναμία των λύσεων με εκθετικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι προφανής μέσω των εκφράσεων των εκθετικών συναρτήσεων που προκύπτουν από τον ορισμό τους.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η φυσική της κυματικής διάδοσης, θα υποθέσουμε προς στιγμήν ότι η ακουστική πίεση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή, δηλαδή έχουμε διάδοση προς μία μόνο διεύθυνση. Θεωρώντας x την διεύθυνση αυτή η ακουστική πίεση γράφεται :

$$p_1(x, t) = p_x(x) e^{-i\omega t} = (A_1 e^{ik_x x} + A_2 e^{-ik_x x}) e^{-i\omega t} = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} + A_2 e^{i(-k_x x - \omega t)} \quad (2.4.15)$$

Από τους δύο τελευταίους όρους, και με δεδομένη την χρονική εξάρτηση της πίεσης που έχουμε επιλέξει, ο πρώτος όρος αντιπροσωπεύει κύμα οδεύον προς τα αυξανόμενα (θετικά) x και ο δεύτερος, κύμα οδεύον προς τα μειούμενα (αρνητικά) x . Οι συντελεστές A_1 και A_2 αντιπροσωπεύουν το πλάτος του κύματος και το όρισμα στην εκθετική συνάρτηση την *φάση*.

Σημειώνουμε επίσης ότι η πραγματική πίεση είναι το πραγματικό μέρος της ανωτέρω σχέσης. Σε πολλά εγχειρίδια για να γίνει διάκριση ανάμεσα στη μιγαδική και την πραγματική πίεση, η μιγαδική πίεση αναφέρεται με έντονα γράμματα.

Επίσης επισημαίνουμε ότι σε άλλα εγχειρίδια, εκλαμβάνεται ως χρονική εξάρτηση της ακουστικής πίεσης η συνάρτηση $T = e^{i\omega t}$. Με αυτή την παραδοχή, η οποία δεν αλλάζει επί της ουσίας τη θεώρηση που κάνουμε, ο πρώτος όρος στην τελική μορφή της 2.4.15 θα έδινε τα κύματα που οδεύουν προς τα μειούμενα x και ο δεύτερος προς τα αυξανόμενα x , με το πρόσημο της χρονικής εξάρτησης να είναι θετικό. Θα επανέλθουμε σε αυτή τη θεώρηση μόνο στο Παράρτημα Α που αναφέρεται στη σύνθεση των πηγών, ενώ στο υπόλοιπο του κειμένου διατηρούμε την αρχική μας παραδοχή.

Για τις ανάγκες της θεωρίας μας θα πρέπει να ορίσουμε τα **επίπεδα κύματα**. Ένα κύμα λέγεται επίπεδο, εάν το κύμα οδεύει στον χώρο και η επιφάνεια σταθερής φάσης σε μία δεδομένη χρονική στιγμή είναι επίπεδο. Παρατηρώντας την λύση της ακουστικής εξίσωσης όπως δίδεται από την 2.4.15, βλέπομε ότι για t σταθερό, η φάση του κύματος είναι σταθερή όταν x είναι σταθερό.

Από την Αναλυτική Γεωμετρία, γνωρίζουμε ότι η επιφάνεια (στον χώρο) που ορίζεται από την εξίσωση ($x=c$) είναι μία επίπεδη επιφάνεια κάθετη στον άξονα των x στο σημείο c του άξονα. Συνεπώς η λύση 2.4.15 αντιπροσωπεύει ένα επίπεδο κύμα.

Θεωρώντας το πρόβλημά μας στις τρεις διαστάσεις και κρατώντας τον πρώτο από τους δύο όρους της λύσης μας για κάθε μία από τις συναρτήσεις p_x, p_y, p_z , που σημαίνει ότι δεχόμαστε διάδοση προς μία κατεύθυνση, βλέπουμε ότι η ακουστική πίεση παίρνει τη μορφή :

$$p_1(x, y, z, t) = A_1 B_1 C_1 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} \quad (2.4.16)$$

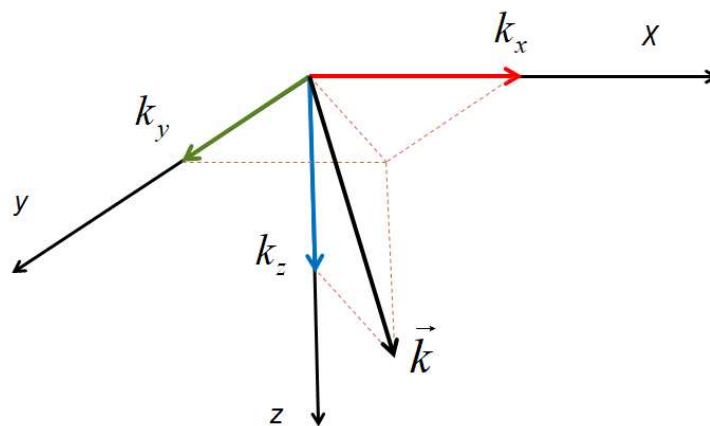
και σε διανυσματική μορφή ως προς τον εκθέτη του e ,

$$p_1(x, y, z, t) = D e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (2.4.17)$$

όπου $D = A_1 B_1 C_1$ και όπου έχουμε θεωρήσει ένα νέο διάνυσμα $\vec{k} = \vec{k}_x + \vec{k}_y + \vec{k}_z$.

Εάν ανατρέξουμε στην εξίσωση 2.4.13, με την ως άνω θεώρηση βλέπουμε ότι το πηλίκο $\frac{\omega}{c}$ αντιπροσωπεύει το μέτρο του διανύσματος $\vec{k}$, με k_i $i = x, y, z$ να είναι τα μέτρα των συνιστωσών του. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{k}$ είναι ο **αριθμός κύματος** που τον συναντήσαμε και στο πρώτο κεφάλαιο των σημειώσεων στο οποίο αναφερθήκαμε στα κύματα βαρύτητας.

Στο σχήμα 2.3 βλέπουμε τη διανυσματική απεικόνιση του αριθμού κύματος με τις αντίστοιχες συνιστώσες στις τρεις διαστάσεις. Παρατηρούμε τέλος ότι επιφάνειες σταθερής φάσης είναι επίπεδα κάθετα στο διάνυσμα $\vec{k}$. Επομένως η 2.4.17 αντιπροσωπεύει επίσης λύση για επίπεδα κύματα, με το διάνυσμα του αριθμού κύματος να είναι κάθετο στην επιφάνεια σταθερής φάσης (μέτωπο κύματος). Η παραπάνω παρατήρηση είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση της γεωμετρίας της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα αλλά και για τις περιπτώσεις ανάκλασης και διάδοσης του ήχου στη διαχωριστική επιφάνεια νερού-πυθμένα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.



Σχήμα 2.3 Ο αριθμός κύματος ως διανυσματικό μέγεθος.

2.5 Διάδοση σε ελαστικούς χώρους ακουστικών και διατμητικών κυμάτων.

2.5.1 Δυναμικό μετατόπισης

Υπενθυμίζουμε ότι το ακουστικό κύμα είναι διάμηκες κύμα που διαδίδεται σε κάθε συμπιεστό μέσον. Όταν ο χώρος θεωρηθεί ρευστός (π.χ. νερό ή αέρας) τα ακουστικά είναι τα μόνα μηχανικά κύματα που μπορεί να διαδοθούν. Σε ελαστικούς εν γένει χώρους όπως χαρακτηρίζονται οι χώροι με αρκετή ακαμψία υποστηρίζεται και η διάδοση διατμητικών κυμάτων για τα οποία θα γίνει μια σύντομη αναφορά στη συνέχεια. Δεδομένου όμως ότι όπως θα δούμε, οι δύο ομάδες κυμάτων συνυπάρχουν στα ιζήματα του πυθμένα, η μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο ομάδων κυματισμών θα πρέπει να μελετηθεί τουλάχιστον στον βαθμό που επηρεάζει την ακουστική διάδοση στο νερό που ενδιαφέρει βασικά την ακουστική ωκεανογραφία. Η μελέτη βοηθιέται ουσιαστικά με την εισαγωγή ενός μεγέθους που μπορεί να περιγράψει τις βασικές συναρτήσεις που σχετίζονται με τα δύο είδη κυμάτων σε ενιαία μορφή. Το μέγεθος αυτό είναι το «δυναμικό» που θα το χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να μελετήσουμε το πρόβλημα της διάδοσης κυμάτων σε ελαστικούς εν γένει χώρους.

Γνωρίζουμε ότι η περιστροφή της κλίσης μια συνάρτησης μηδενίζεται.

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (2.5.1)$$

Από την εξίσωση 2.3.17 παρατηρούμε ότι εάν πάρουμε την περιστροφή των δύο μερών, θα πρέπει να ισχύει και $\nabla \times \vec{u} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα μπορεί να εκφραστεί μέσω της κλίσης ενός βαθμωτού μεγέθους Φ_u που ονομάζεται «δυναμικό» (potential).

$$\vec{u} = \nabla \Phi_u \quad (2.5.2)$$

Η ανωτέρω σχέση ισχύει γενικά για την ταχύτητα ροής σε «αστροβίλα» ρευστά και ειδικά στην περίπτωση της ακουστικής διαταραχής, θεωρούμε ότι η διαταραχή δεν δημιουργεί στροβιλισμό στο ρευστό.

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι και τα υπόλοιπα διανυσματικά μεγέθη που σχετίζονται με την ταχύτητα μπορούν να εκφραστούν από αντίστοιχα δυναμικά. Επιλέγουμε στη συνέχεια την μετατόπιση (displacement) $\vec{d}$ των στοιχειωδών σωματιδίων ενός μέσου που όπως θα φανεί στη συνέχεια είναι ένα μέγεθος που μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην μελέτη της αλληλεπίδρασης των κυμάτων.

Ορίζουμε λοιπόν μία νέα βαθμωτή συνάρτηση $\Phi(\vec{x}, t)$ που καλείται **δυναμικό μετατόπισης** (displacement potential) και της οποίας η κλίση μας δίδει την μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων του συμπιεστού μέσου.

$$\vec{d} = \nabla \Phi \quad (2.5.3)$$

Θα προσπαθήσουμε να συνδέσουμε στη συνέχεια την ακουστική πίεση με το δυναμικό μετατόπισης. Η μεταβολή της πίεσης του στοιχειώδους σωματιδίου ενός ρευστού μέσου, συνδέεται με την προκαλούμενη μετατόπιση μέσω του νόμου του Hooke:

$$p_1 = -K \nabla \cdot \vec{d} \quad (2.5.4)$$

όπου K είναι το **μέτρο διόγκωσης** (bulk modulus). Περισσότερα για το μέτρο διόγκωσης και άλλα μεγέθη της μηχανικής που μας ενδιαφέρουν στο μάθημα αναφέρονται στο Παράρτημα Β. Στη συνέχεια θα παραλείψουμε τα ορίσματα σε όλες τις συναρτήσεις που υπεισέρχονται στην ανάλυση για ευκολία στην ανάπτυξη των σχέσεων. Εκτός και αν αναφέρεται αλλού, η ταχύτητα διάδοσης είναι συνάρτηση μόνο των χωρικών μεταβλητών, ενώ οι κυματικές συναρτήσεις είναι συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου.

Από τις 2.5.3 και 2.5.4 παίρνουμε αμέσως

$$p_1 = -K \nabla^2 \Phi \quad (2.5.5)$$

Το δυναμικό μετατόπισης Φ υπόκειται επίσης στην κυματική εξίσωση

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.6)$$

ενώ για το μέτρο διόγκωσης K ισχύει (δείτε Παράρτημα Β),

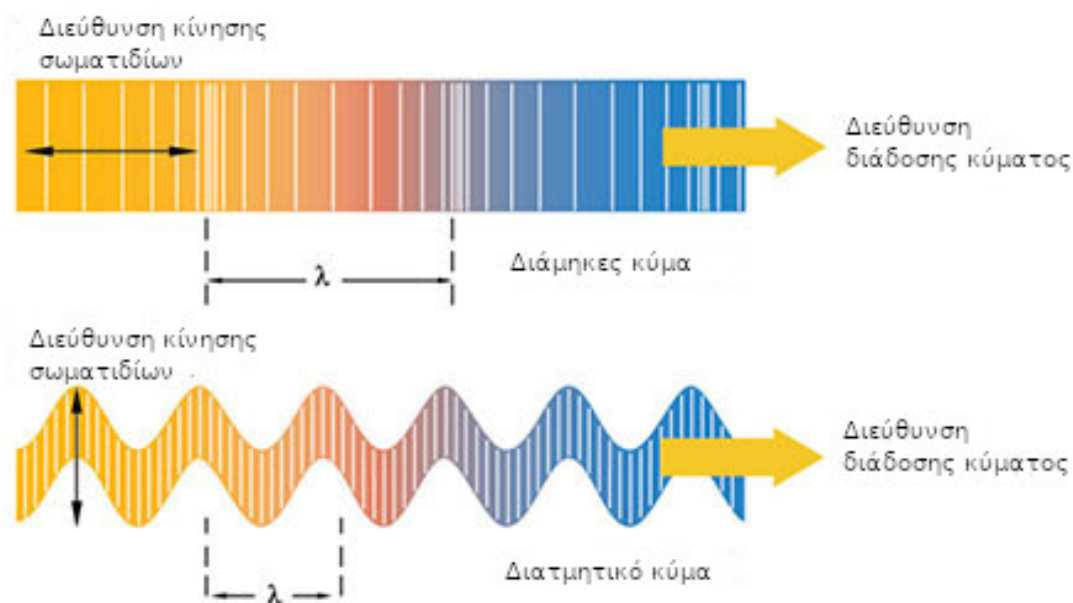
$$K = \rho c^2 \quad (2.5.7)$$

και η ακουστική πίεση μπορεί επίσης να γραφεί στην μορφή

$$p_1 = -\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.8)$$

2.5.2 Διατμητικά κύματα

Όταν το μέσον διάδοσης της ακουστικής διαταραχής διαθέτει επαρκή ακαμψία, μπορεί να δεχθεί τη διάδοση και **διατμητικών κυμάτων** (shear waves). Η διαφορά των ακουστικών από τα διατμητικά κύματα είναι ότι τα μεν πρώτα αφορούν διαμήκεις μετατοπίσεις των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου διάδοσης σε σχέση με την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ενώ τα διατμητικά αφορούν εγκάρσιες μετατοπίσεις. Για το λόγο αυτό χαρακτηρίζονται και ως **εγκάρσια κύματα**. Με άλλα λόγια, στα διαμήκη κύματα (P-waves στην σεισμολογία και την γεωλογία) η διεύθυνση μετατόπισης των στοιχειωδών σωματιδίων είναι κατά την διεύθυνση διάδοσης του κύματος, ενώ στα διατμητικά κύματα (S-waves), η διεύθυνση μετατόπισης είναι κάθετη σε εκείνη της διεύθυνσης διάδοσης (Σχήμα 2.4). Το νερό όπως και άλλα υλικά δεν διαθέτουν επαρκή ακαμψία και συνεπώς δεν υποστηρίζουν την διάδοση διατμητικών κυμάτων. Κάτι τέτοιο όμως δεν ισχύει στην μεγάλη πλειοψηφία των θαλασσινών ιζημάτων τα οποία είναι αρκετά «άκαμπτα», και υποστηρίζουν την διάδοση διατμητικών κυμάτων.



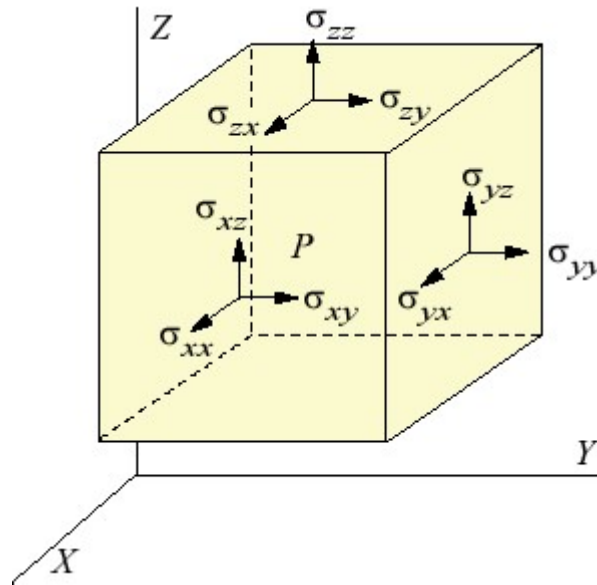
Σχήμα 2.4 Σχηματική παράσταση διαμήκων και διατμητικών κυμάτων

Επομένως, σε κάθε ωκεανογραφικό σύστημα θα πρέπει να περιλάβουμε και τη μελέτη των διατμητικών κυμάτων καθώς και την αλληλεπίδρασή τους με τα ακουστικά κύματα.

Δεν πρόκειται να επεκταθούμε στη σχετική ανάπτυξη μια και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον μας είναι στην διάδοση του ήχου στο νερό και παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη σε εγχειρίδια μηχανικής που περιγράφουν το φαινόμενο της διάδοσης διατμητικών κυμάτων με πληρότητα (π.χ. Ewing et al. 1957).

Στα πλαίσια του μαθήματός μας όμως θα δούμε το πώς η διέγερση διατμητικών κυμάτων στον πυθμένα επηρεάζει την διάδοση του ήχου στο νερό και συνεπώς είναι απαραίτητη μια μικρή εισαγωγή στην θεωρία διάδοσης και των διατμητικών κυμάτων.

Θεωρούμε ένα ομογενές και ισότροπο στερεό σώμα το οποίο υπόκειται σε μικρές μεταβολές της δυναμικής του κατάστασης. Οι μεταβολές αυτές δημιουργούν δυνάμεις οι οποίες εκφράζονται μέσω των τάσεων οι οποίες με την σειρά τους αναφέρονται στις επιφάνειες στις οποίες αναπτύσσονται αλλά και στην διεύθυνσή τους. Οι τάσεις συμβολίζονται ως σ_{ij} (ή τ_{ij}) με τον πρώτο δείκτη να αναφέρεται στην επιφάνεια ανάπτυξης της τάσης και τον δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνση εφαρμογής της τάσης. Αντίστοιχα οι συνιστώσες της μετατόπισης θα συμβολίζονται με d_i με τον δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνσή τους (x, y, z) στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



Σχήμα 2.5 Οι τάσεις σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

Στη μηχανική εισάγεται και η έννοια της παραμόρφωσης ε_{ij} (strain) ως εξής :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5.9)$$

Αξίζει επίσης να επισημανθεί το γεγονός ότι ο πίνακας των παραμορφώσεων είναι συμμετρικός ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$).

Η σχέση τάσης και παραμόρφωσης από το Νόμο του Hooke για ισοτροπικά υλικά είναι :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.5.10)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, λ και μ είναι οι σταθερές Lamè της μηχανικής (βλ. Παράρτημα Β) και το σύμβολο ε_{kk} υποδηλώνει άθροισμα ως προς όλους τους δείκτες. Δηλαδή στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων :

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (2.5.11)$$

Το ανωτέρω άθροισμα καλείται **ανηγμένη διόγκωση (dilatation)** και σε πολλά βιβλία συμβολίζεται ως Θ .

Αντικαθιστώντας την παραμόρφωση από την 2.5.9 στην 2.5.10 παίρνουμε :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + \mu \left(\frac{\partial d_i}{\partial x_j} + \frac{\partial d_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.5.12)$$

Αξιοποιώντας τον δεύτερο Νόμο του Newton και αντίστοιχες υποθέσεις με αυτές που είδαμε στην παραγωγή της ακουστικής εξίσωσης παίρνουμε τη σχέση τάσης-μετατόπισης :

$$\rho \frac{\partial^2 d_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.5.13)$$

όπου αναγνωρίζουμε το αντίστοιχο της εξίσωσης 2.3.17 για την συνιστώσα i της μετατόπισης.

Αντικαθιστώντας την τάση από την 2.5.12 στην 2.5.13, θεωρώντας και πάλι μικρές μεταβολές και εφαρμόζοντας ιδιότητες των τελεστών παίρνουμε :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{d}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \vec{d}) \quad (2.5.14)$$

Η εξίσωση αυτή χαρακτηρίζεται και ως **σεισμική εξίσωση** (*seismic equation*) και διέπει και τα δύο είδη κυμάτων που διαδίδονται στο ελαστικό μέσον.

Παίρνοντας την περιστροφή των δύο μερών και εφαρμόζοντας ξανά ιδιότητες των τελεστών καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$\nabla^2 (\nabla \times \vec{d}) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 (\nabla \times \vec{d})}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5.15)$$

$$\text{όπου } c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Η ανωτέρω εξίσωση είναι κυματική για τη διανυσματική συνάρτηση $\nabla \times \vec{d}$ και διέπει την διάδοση των διατμητικών κυμάτων σε ένα ελαστικό μέσο. Επίσης το μέγεθος c_s^2 αντιπροσωπεύει την ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων την οποία θα θεωρήσουμε σταθερά.

Παίρνοντας τώρα την απόκλιση της 2.5.14, με αντίστοιχο τρόπο καταλήγουμε σε μία άλλη κυματική εξίσωση της μορφής :

$$\nabla^2 (\nabla \cdot \vec{d}) - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \vec{d})}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5.16)$$

όπου ο όρος

$$c_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (2.5.17)$$

αντιπροσωπεύει την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων που επίσης θα θεωρηθεί σταθερά. Η συνάρτηση $\nabla \cdot \vec{d}$ είναι βαθμωτή.

Παρατηρούμε ότι για $\mu=0$, οδηγούμεθα στην περίπτωση ενός υλικού που υποστηρίζει τη διάδοση ακουστικών κυμάτων μόνο και η ταχύτητα των διαμήκων κυμάτων c_p είναι στην πραγματικότητα η ταχύτητα διάδοσης των ακουστικών κυμάτων που είδαμε προηγουμένως.

Στο ελαστικό μέσον θα θεωρήσουμε ένα διανυσματικό **ελαστικό δυναμικό** Ψ (*shear wave potential*) (συνιστώσες Ψ_x, Ψ_y, Ψ_z).

Η μετατόπιση του στοιχειώδους σωματιδίου του ελαστικού μέσου είναι τώρα:

$$\vec{d} = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi \quad (2.5.18)$$

ενώ σημειώνουμε ότι για το ελαστικό δυναμικό ισχύει ότι η απόκλιση του είναι 0

$$\nabla \cdot \Psi = 0 \quad (2.5.19)$$

Το ελαστικό δυναμικό υπακούει επίσης στην κυματική εξίσωση με την ταχύτητα του κύματος να είναι εκείνη των διατμητικών κυμάτων.

Συνοψίζοντας, σε ένα ελαστικό μέσο, οι δύο κυματικές εξισώσεις που ισχύουν ταυτόχρονα είναι :

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.5.20)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad (2.5.21)$$

Για τις λύσεις των δύο αυτών εξισώσεων ισχύει ό,τι έχουμε πει και για την ακουστική εξίσωση. Με χωρισμό μεταβλητών καταλήγουμε σε χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{\pm i\omega t}$ (ίδια και για τους δύο κυματισμούς) ενώ για την χωρική εξάρτηση διατυπώνονται αντίστοιχα δύο εξισώσεις Helmholtz της μορφής :

$$\nabla^2 \Phi_\omega + \left(\frac{\omega}{c_p} \right)^2 \Phi_\omega = 0 \quad (2.5.22)$$

$$\nabla^2 \Psi_\omega + \left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2 \Psi_\omega = 0 \quad (2.5.23)$$

όπου $\Phi_\omega(\vec{x})$ και $\Psi_\omega(\vec{x})$ είναι αντίστοιχα οι χωρικές εξαρτήσεις των αντίστοιχων δυναμικών. Στις εξισώσεις 2.5.22 και 2.5.23 αναγνωρίζουμε και τους αριθμούς κύματος για τα διαμήκη και διατμητικά κύματα αντίστοιχα :

$$k_p = \frac{\omega}{c_p} \quad \text{και} \quad k_s = \frac{\omega}{c_s} \quad (2.5.24)$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων είναι μεγαλύτερη από εκείνη των διατμητικών κυμάτων (Παράρτημα Γ), το μέτρο του αριθμού κύματος των διαμήκων κυμάτων είναι μικρότερο από εκείνο των διατμητικών κυμάτων για το ίδιο μέσο διάδοσης.

Θα προσθέσουμε εδώ ως παρατήρηση ότι η απόκλιση της μετατόπισης που εισάγεται στην εξίσωση 2.5.16 είναι

$$\nabla \cdot \vec{d} = \nabla \cdot (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi) = \nabla^2 \Phi \quad (2.5.25)$$

λόγω της 2.5.19, ενώ η περιστροφή της μετατόπισης που εισάγεται στην εξίσωση 2.5.15 είναι

$$\nabla \times \vec{d} = \nabla \times (\nabla \Phi + \nabla \times \Psi) = \nabla \times \nabla \times \Psi \quad (2.5.26)$$

αφού η περιστροφή της κλίσης μια βαθμωτής συνάρτησης είναι 0. Περαιτέρω αξιοποίηση των ιδιοτήτων των τελεστών και της 2.5.19 μας οδηγεί στη σχέση :

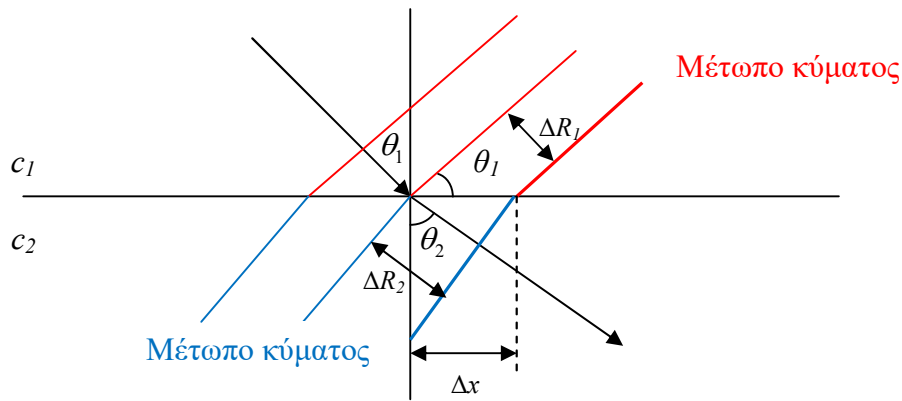
$$\nabla \times \vec{d} = -\nabla^2 \Psi \quad (2.5.27)$$

2.6 Διάθλαση ακουστικών κυμάτων και Νόμος του Snell.

Θα μελετήσουμε τώρα την πρόσπτωση ενός ακουστικού κύματος στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο υλικά διαφορετικής σύστασης που χαρακτηρίζονται από διαφορετική ταχύτητα διάδοσης του ήχου c_1 και c_2 αντίστοιχα. Θα θεωρήσουμε ότι η επιφάνεια αυτή είναι επίπεδη και οριζόντια. Στην ανάπτυξη της παραγράφου αυτής θα θεωρήσουμε ότι η ακουστική πηγή βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση από την διεπιφάνεια, ώστε το μέτωπο κύματος να μπορεί να περιγραφεί πολύ καλά ως επίπεδο.

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα στις δύο διαστάσεις και συγκεκριμένα στο επίπεδο x, z . Το μέτωπο κύματος θα είναι επίπεδο κάθετο στο επίπεδο της μελέτης με το ίχνος του να είναι ευθεία στο επίπεδο x, z .

Η πρόσπτωση του κύματος γίνεται υπό γωνία θ_I ως προς τον κατακόρυφο άξονα (Σχήμα 2.5) όπου η γωνία ορίζεται από την φέρουσα του αριθμού κύματος και τον κάθετο στην διεπιφάνεια άξονα. Σύμφωνα με την φυσική, η πρόσπτωση ενός κύματος σε επιφάνεια που χωρίζει δύο υλικά διαφορετικής σύνθεσης επιφέρει μία ανάκλαση του κύματος, οπότε μέρος της κυματικής ενέργειας επιστρέφει στο μέσο από το οποίο προσέπεσε ενώ μέρος της ενέργειας διαδίδεται στο δεύτερο μέσον. Για να υπάρξει διάδοση θα πρέπει να ικανοποιούνται και ορισμένες άλλες συνθήκες όπως θα δούμε στη συνέχεια, ενώ θα πρέπει να τονισθεί ότι υπάρχει η δυνατότητα διάδοσης και άλλου είδους κυματισμού (π.χ. διατμητικών κυμάτων εάν το δεύτερο μέσον θεωρηθεί ελαστικό).



Σχήμα 2.5 Ανάκλαση και διάθλαση επίπεδων κυμάτων. Γεωμετρική θεώρηση για την απόδειξη του Νόμου του Snell.

Προς το παρόν πάντως θα επικεντρωθούμε στα ακουστικά κύματα και θα μελετήσουμε την ανάκλαση και τη διάθλαση ενός ακουστικού κύματος σε μία οριζόντια διεπιφάνεια που χωρίζει δύο ακουστικά μέσα.

Κατά την ανάκλαση κύματος από την επίπεδη διεπιφάνεια, το μέτωπο κύματος στο πρώτο μέσον αλλάζει διεύθυνση με την γωνία που σχηματίζει η φέρουσα τον αριθμό κύματος (κάθετος στο μέτωπο κύματος) με την κάθετο στην διεπιφάνεια να παραμένει ίδια με εκείνη της πρόσπτωσης θ_1 , αλλά κατά τη διάδοσή του κύματος στο δεύτερο μέσον το μέτωπο κύματος θα πάρει διαφορετική κλίση και η νέα γωνία διάδοσης θ_2 που ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στο μέτωπο κύματος με την κάθετο στην διεπιφάνεια θα σχετίζεται με την πρώτη, μέσω της σχέσης :

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (2.6.1)$$

Αυτός είναι ο νόμος του Snell που η απόδειξή του μπορεί να γίνει με απλά γεωμετρικά μέσα, εάν ληφθούν υπόψιν οι απλοποιητικές παραδοχές που αναφέραμε προηγουμένως.

Έτσι, με αναφορά στο σχήμα 2.5 και θεωρώντας διάδοση του μετώπου στο μέσον 1 κατά ΔR_1 μετά την πρόσπτωση και στο μέσον 2 κατά ΔR_2 , κατά το ίδιο χρονικό διάστημα Δt , η καθοριστική φυσική συνθήκη είναι ότι ταυτόχρονα πάνω στην διεπιφάνεια τα δύο μέτωπα πρέπει να βρίσκονται σε επαφή έχοντας διανύσει την κοινή απόσταση Δx . Από απλή γεωμετρία παίρνουμε τότε

$$\Delta R_1 = \Delta x \sin \theta_1 \quad \text{και} \quad \Delta R_2 = \Delta x \sin \theta_2 \quad (2.6.2)$$

Συνεπώς

$$\Delta R_1 / \sin \theta_1 = \Delta R_2 / \sin \theta_2 \quad (2.6.3)$$

Καθώς οι ταχύτητες είναι

$$c_1 = \frac{\Delta R_1}{\Delta t} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{\Delta R_2}{\Delta t} \quad (2.6.4)$$

αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για ΔR_1 και ΔR_2 στην 2.6.3, παίρνουμε τη σχέση που διέπει το Νόμο του Snell.

Με ανάλογοι τρόπο αποδεικνύεται και ότι η γωνία πρόσπτωσης είναι ίδια με την γωνία ανάκλασης.

Θα πρέπει να διευκρινήσουμε στο σημείο αυτό ότι εάν υπάρχει διάδοση στο δεύτερο μέσο και κυματισμού άλλου είδους, το μέτωπο του δεύτερου αυτού κυματισμού θα διαδοθεί με διαφορετική γωνία εάν η ταχύτητα διάδοσης του κυματισμού αυτού είναι διαφορετική από εκείνη του πρώτου μέσου. Με εντελώς αντίστοιχη θεώρηση με αυτή που αναπτύξαμε στο εδάφιο αυτό, είναι προφανές ότι εάν η γωνία διάδοσης του δεύτερου κυματισμού είναι θ_{s2} (το σύμβολο s αντιστοιχεί στα διατμητικά κύματα που είναι ο δεύτερος κυματικός μηχανισμός που θα μας απασχολήσει), και η ταχύτητα διάδοσης c_{s2} , θα ισχύει

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_{s2}}{c_{s2}} \quad (2.6.5)$$

2.7 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο στρώματα διαφορετικής σύνθεσης. Το πρόβλημα σε δύο διαστάσεις

2.7.1 Εισαγωγή

Συνεχίζοντας να μελετάμε το πρόβλημα της πρόσπτωσης ακουστικών κυμάτων στη διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο μέσα, θα διατηρήσουμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και θα θεωρήσουμε διάδοση σε δύο διαστάσεις. Τα ακουστικά κύματα θε θεωρηθούν επίπεδα, που αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση ενός πραγματικού φαινομένου ακουστικής διάδοσης όταν η ακουστική πηγή θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη διεπιφάνεια.

Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της ανάκλασης της ακουστικής ενέργειας σε μία διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο μέσα από τα οποία το πρώτο διαδίδει μόνο ακουστικά κύματα, ενώ το δεύτερο είναι ελαστικό επιτρέποντας τη διάδοση τόσο ακουστικών (διαμήκων) όσο και διατμητικών κυμάτων. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε με τον όρο «ρευστό» στο μέσον στο οποίο διαδίδονται μόνο ακουστικά κύματα και με τον όρο «ελαστικό» στο μέσον που υποστηρίζει τόσο διαμήκη όσο και διατμητικά κύματα.

Είναι συνηθισμένο σε ένα πρόβλημα αυτής της γεωμετρίας να θεωρήσουμε ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες τους x και z με τον άξονα των z να τείνει προς τα κάτω (δείτε το σχήμα 2.6). Όλα τα μεγέθη του προβλήματος θεωρούνται ανεξάρτητα από το y , ενώ η διεπιφάνεια που χωρίζει τα δύο ακουστικά μέσα νοείται κάθετη στο

επίπεδο του σχήματος με το ίχνος της στο επίπεδο του σχήματος να αντιστοιχεί στον άξονα των x . Έτσι ο άξονας των z είναι κάθετος στην διεπιφάνεια.

Σε ένα πρόβλημα όπως αυτό, τα μεγέθη που υπεισέρχονται από την μεριά του ρευστού, είναι η πίεση και η μετατόπιση των στοιχειωδών σωματιδίων, ενώ για την περίπτωση του ελαστικού μέσου, έχουμε τον τανυστή⁷ των τάσεων και την μετατόπιση. Ο τανυστής των τάσεων αποτελείται από τις συνιστώσες της τάσης που αναπτύσσεται σε ένα στερεό και οι οποίες συμβολίζονται ως σ_{ij} όπως έχουμε δει, με τον πρώτο δείκτη να αναφέρεται στην επιφάνεια στην οποία επενεργεί η τάση και τον δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στην διεύθυνση της τάσης. Καθώς αναφερόμαστε σε πρόβλημα δύο διαστάσεων με τη διεπιφάνεια να είναι κάθετη στον άξονα των z , τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν θα αφορούν το εν λόγω επίπεδο και συνεπώς με βάση τον ορισμό των τάσεων ο πρώτος δείκτης στο σχετικό συμβολισμό θα είναι πάντα ο z ενώ ο δεύτερος θα αναφέρεται στην διεύθυνση της τάσης. Από τις τάσεις που αναπτύσσονται στο ελαστικό μέσο, στο πρόβλημά μας υπεισέρχεται όπως θα δούμε η συνιστώσα που είναι κάθετη στη διεπιφάνεια ανάμεσα στα δύο μέσα και συμβολίζεται με σ_{zz} και η συνιστώσα που βρίσκεται στο επίπεδο της διεπιφάνειας και συμβολίζεται με σ_{zx} . Σημειώνουμε τέλος ότι στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα του δυναμικού της μετατόπισης των διατμητικών κυμάτων είναι κάθετο στο επίπεδο xz και έχει μέτρο Ψ (άσκηση), οπότε αρκεί μόνο η συγκεκριμένη συνιστώσα για να μελετηθεί το πρόβλημα της διάδοσης των κυμάτων στο δεύτερο μέσον.

Οι σχέσεις που συνδέουν τα δυναμικά των διαμήκων και διατμητικών κυμάτων με τις συνιστώσες των τάσεων από την 2.5.10 είναι :

$$\sigma_{zz} = \lambda \nabla^2 \Phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.1)$$

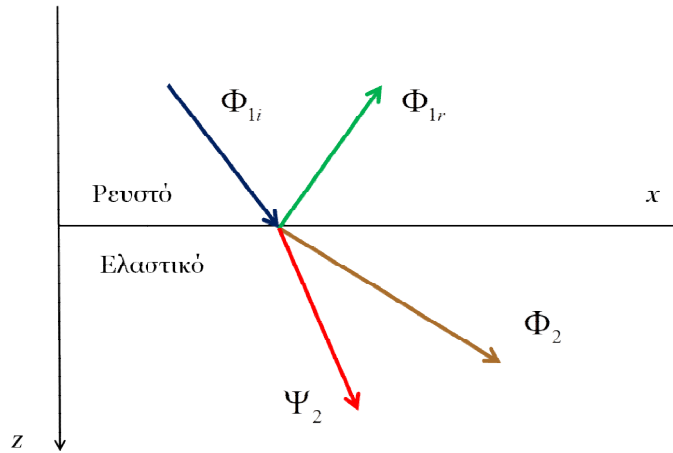
και

$$\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.2)$$

2.7.2 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον.

Θεωρούμε λοιπόν μία ακουστική διαταραχή που διαδίδεται με την μορφή επίπεδου κύματος και προσπίπτει στην επιφάνεια που χωρίζει τα δύο μέσα από την πλευρά του ρευστού (Σχήμα 2.6). Τα δύο μέσα θεωρούνται ημιάπειρα σε έκταση κατά τη διεύθυνση z , ενώ υπενθυμίζουμε ότι όλα τα μεγέθη δεν εξαρτώνται από την μεταβλητή y . Τμήμα της ακουστικής ενέργειας θα ανακλαστεί και θα επιστρέψει στο ρευστό και τμήμα θα διαδοθεί στο ελαστικό μέσον αλλά με τη μορφή δύο κυμάτων διαφορετικού είδους: Διάμηκες και διατμητικό.

⁷ Τανυστής είναι ένα γενικευμένο διάνυσμα τάξης n ανάλογα με τις συνιστώσες του. Ένα βαθμωτό μέγεθος είναι ειδική περίπτωση τανυστή τάξης 0 ενώ ένα διανυσματικό φυσικό μέγεθος στον χώρο έχει τανυστική τάξη 1 καθώς απαιτεί 3^1 αριθμούς για τον προσδιορισμό του.



Σχήμα 2.6 Δυναμικά κύματα που προσπίπτουν, ανακλώνται και διαδίδονται στην επιφάνεια που χωρίζει ένα ρευστό από ένα ελαστικό μέσον.

Τα κύματα θα παραμείνουν επίπεδα (στο σχήμα βλέπουμε την διεύθυνση διάδοσης των αντίστοιχων κυμάτων) και θα χαρακτηρίζονται από τα εξής δυναμικά:

- Δυναμικό μετατόπισης ακουστικού κύματος στο ρευστό μέσον $\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$
- Δυναμικό μετατόπισης ακουστικού κύματος στο ελαστικό μέσον Φ_2
- Ελαστικό δυναμικό διατμητικού κύματος στο ελαστικό μέσον Ψ_2 (μία συνιστώσα λόγω επίπεδης γεωμετρίας).

Προσέξτε ότι το δυναμικό μετατόπισης στο πρώτο μέσον το γράψαμε ως άθροισμα δύο δυναμικών τα οποία, με βάση το σχήμα 2.6, μας παραπέμπουν στο προσπίπτον και το ανακλώμενο κύμα.

Υπενθυμίζουμε ότι τα ως άνω δυναμικά ικανοποιούν τις αντίστοιχες κυματικές εξισώσεις με τις ταχύτητες διάδοσης των κυμάτων που αντιστοιχούν στο κάθε μέσον μετάδοσης.

$$\nabla^2 \Phi_1 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} \quad (2.7.3)$$

$$\nabla^2 \Phi_2 = \frac{1}{c_{p2}^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.4)$$

$$\nabla^2 \Psi_2 = \frac{1}{c_{s2}^2} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.5)$$

όπου οι ταχύτητες διάδοσης του ακουστικού και του διατμητικού κύματος στο δεύτερο μέρος συμβολίζονται με c_{p2} και c_{s2} αντίστοιχα.

Κάνοντας την παρατήρηση ότι έχουμε διάδοση μόνο προς τα θετικά x ,⁸ οι λύσεις των ως άνω κυματικών εξισώσεων θα είναι αντίστοιχα :

$$\Phi_1 = A_1 e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} + A_2 e^{i(k_{x1}x - k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.6)$$

$$\Phi_2 = B_1 e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} + B_2 e^{i(k_{x2}x - k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.7)$$

$$\Psi_2 = C_1 e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} + C_2 e^{i(k_{x2}x - k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.8)$$

όπου βέβαια έχουμε θεωρήσει χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{-i\omega t}$.

Οι ανωτέρω εκφράσεις παραπέμπουν σε λύσεις που αντιπροσωπεύουν κύματα που διαδίδονται τόσο προς τα θετικά (αυξανόμενα) – πρώτος όρος, όσο και προς τα αρνητικά (μειούμενα) – δεύτερος όρος, z . Οι συνιστώσες του αριθμού κύματος που εμφανίζονται στις ανωτέρω σχέσεις υποδηλώνονται με το δεύτερο δείκτη να αναφέρεται στο αντίστοιχο μέσον διάδοσης.

Επομένως, στην 2.7.6 αναγνωρίζουμε τον πρώτο όρο ως Φ_{1i} και τον δεύτερο ως Φ_{1r} . Επίσης παρατηρούμε ότι δεν υπάρχουν κύματα που να οδεύουν προς τα αρνητικά z στο δεύτερο μέσον. Ετσι οι συντελεστές B_2 και C_2 στις 2.7.7 και 2.7.8 πρέπει να είναι 0 :

Απλοποιούμε στη συνέχεια τους υπολογισμούς μας θεωρώντας ότι το κύμα προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με μοναδιαίο πλάτος ($A_1=1$).

Ετσι παίρνουμε τις παρακάτω εκφράσεις έχοντας αντικαταστήσει τους συντελεστές των λύσεων των εκφράσεων 2.7.6-2.7.8 με σύμβολα που παραπέμπουν στους συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης των ακουστικών και διατμητικών κυμάτων στα δύο μέσα που θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

$$\Phi_{1i} = e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.9)$$

$$\Phi_{1r} = R_{12} e^{i(k_{x1}x - k_{z1}z - \omega t)} \quad (2.7.10)$$

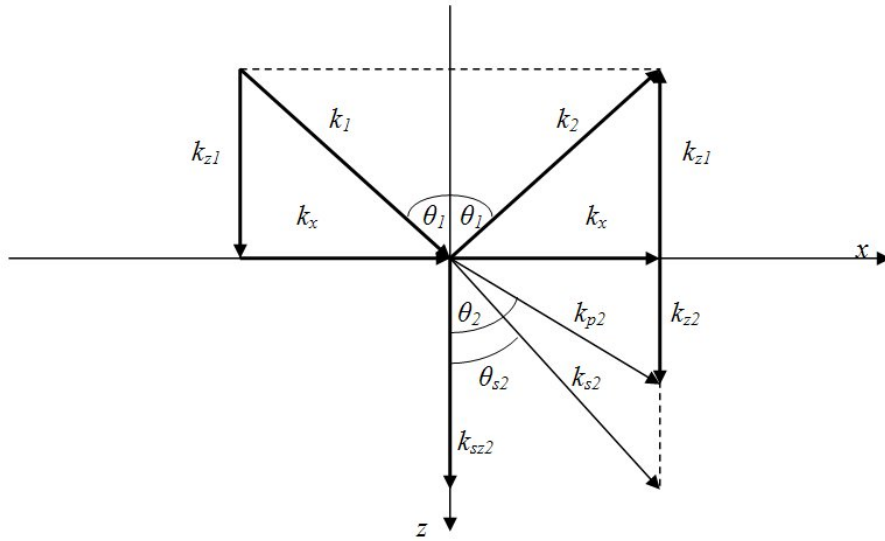
$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.11)$$

$$\Psi_2 = T_s e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)} \quad (2.7.12)$$

Ο συντελεστής R_{12} είναι ο *συντελεστής ανάκλασης (reflection coefficient)* του ήχου στη διεπιφάνεια ανάμεσα στο ρευστό και το ελαστικό μέσον ενώ οι συντελεστές T_p και T_s είναι αντίστοιχα οι *συντελεστές διάδοσης*⁹ (*transmission coefficients*) των διαμήκων και διατμητικών κυμάτων στο δεύτερο μέσον.

⁸ Η τεκμηρίωση των σχέσεων 2.7.6-2.7.8 αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη

⁹ Με αναφορά πάντα στα δυναμικά των κυμάτων.



Σχήμα 2.7 Οι αριθμοί κύματος στο πρόβλημα της ανάκλασης επίπεδων ακουστικών κυμάτων από επιφάνεια ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον. Θεωρούμε ότι $C_{s2} < C_{p2}$

Με δεδομένο ότι το μέτρο της εκθετικής συνάρτησης είναι μονάδα, και ότι ο προσπίπτων κυματισμός έχει πλάτος 1, αντιλαμβάνεται κανείς ότι οι συντελεστές εκφράζουν το ποσοστό της ακουστικής ενέργειας που ανακλάται στο πρώτο η διαδίδεται στο δεύτερο μέσον αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός των συντελεστών θα γίνει στη συνέχεια όταν εφαρμοστούν οι φυσικές συνθήκες που διέπουν τις τάσεις και τις παραμορφώσεις στη διεπιφάνεια ανάμεσα στα δύο μέσα.

Στο σχήμα 2.7 βλέπουμε τους αριθμούς κύματος που υπεισέρχονται στο πρόβλημά μας με τη διανυσματική τους έκφραση. Βλέπουμε και τις γωνίες πρόσπτωσης, ανάκλασης και διάδοσης, καθώς και τις συνιστώσες των αριθμών κύματος.

Σημειώνουμε ότι από το νόμο του Snell, η οριζόντια συνιστώσα του αριθμού κύματος k_x παραμένει η ίδια και στα δύο ήδη κυματισμών (γιατί ;). Έτσι θα ισχύει $k_{x1} = k_{x2} = k_x$. Η κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος στο πρώτο μέρος θα παραμείνει ως μέτρο η ίδια αλλά θα αλλάξει φορά και διεύθυνση, με τη γωνία πρόσπτωσης να είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό που είδαμε νωτέρω για τις ταχύτητες διάδοσης ακουστικών και διατμητικών κυμάτων στα δύο μέσα, οι αντίστοιχοι αριθμοί κύματος

$$\text{έχουν μέτρο } k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_{p2} = \frac{\omega}{c_{p2}} \text{ και } k_{s2} = \frac{\omega}{c_{s2}}.$$

Το πρόβλημά μας είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές των δυναμικών όταν είναι γνωστά τα κυματικά χαρακτηριστικά στα δύο μέσα και η γωνία πρόσπτωσης στο ρευστό μέσο.

Για το σχετικό υπολογισμό θα χρησιμοποιήσουμε τις οριακές συνθήκες που προκύπτουν ως συνέπεια των φυσικών νόμων και περιορισμών που διέπουν το πρόβλημα. Οι νόμοι αυτοί είναι:

- Δεν υπάρχει υπερβάλλουσα πίεση από την μία ή την άλλη πλευρά της διεπιφάνειας
- Τα δύο μέσα βρίσκονται πάντα σε επαφή

Ως συνέπεια αυτού παίρνουμε ότι οι αναπτυσσόμενες τάσεις κάθε είδους στη διεπιφάνεια πρέπει να είναι συνεχείς (πρώτος νόμος), ενώ η κάθετη στην διεπιφάνεια μετατόπιση θα πρέπει να είναι επίσης συνεχής συνάρτηση (δεύτερος νόμος).

Στην περίπτωση του προβλήματος με το ρευστό και το ελαστικό μέσον, οι συνθήκες εξειδικεύονται στη συνέχεια της κάθετης τάσης στη διεπιφάνεια, στο μηδενισμό της διατμητικής τάσης στη διεπιφάνεια (δεν υπάρχει διατμητική τάση στο ρευστό) και τέλος στην συνέχεια της κάθετης μετατόπισης.

$$\sigma_{1,zz} = \sigma_{2,zz} \quad (2.7.13)$$

$$\sigma_{2,zx} = 0 \quad (2.7.14)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.7.15)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων στις δύο διαστάσεις, ενθυμούμενοι ότι στο πρώτο μέσον που είναι ρευστό έχουμε διάδοση μόνο ακουστικών κυμάτων, παίρνουμε αντίστοιχα

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \frac{\lambda}{c_p^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z \partial x} \right) \quad (2.7.16)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z \partial x} \right) = 0 \quad (2.7.17)$$

$$\text{και } \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \quad (2.7.18)$$

όπου $\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους. Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις στο βάθος $z=0$ και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των δυναμικών από τις σχέσεις 2.7.9-2.7.12, η επίλυση του συστήματος μας δίνει τους άγνωστους συντελεστές. Από αυτούς αναφέρομε μόνο το συντελεστή ανάκλασης R_{12} που είναι

$$R_{12} = \frac{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 - (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)}{4k_{z2}k_{sz2}k_x^2 + (k_{sz2}^2 - k_x^2)^2 + (\rho_1/\rho_2)(k_{z2}/k_{z1})(\omega^4/c_{s2}^4)} \quad (2.7.19)$$

Αξίζει να σχολιάσουμε λίγο τα μεγέθη που υπεισέρχονται στην ανωτέρω σχέση με αναφορά και στο σχήμα 2.7 που φαίνονται οι συνιστώσες των αριθμών κύματος.

Για να έχουμε κυματικό φαινόμενο (διάδοση κυμάτων στις δύο διαστάσεις), θα πρέπει όλες οι συνιστώσες των αριθμών κύματος να είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν οι αριθμοί αυτοί είναι φανταστικοί, η λύση που προκύπτει δεν αντιπροσωπεύει κύμα. Αυτό είναι εύκολα κατανοητό εάν αναλογισθεί κανείς ότι οι συνιστώσες του αριθμού κύματος πολλαπλασιαζόμενοι με την χωρική μεταβλητή, συνιστούν το όρισμα της εκθετικής συνάρτησης $e^{i\varphi}$. Έτσι εάν στη έκφραση $u = e^{iax}$ θεωρήσουμε το a , φανταστικό αριθμό ($a = ia_1, a_1 \in R$), θα πάρουμε $u = e^{-a_1x}$ που εκφράζει μία αποσβενύμενη συμπεριφορά χωρίς κυματικό φαινόμενο (για a_1 θετικό) ως προς τις χωρικές συντεταγμένες. Με άλλα λόγια δεν υπάρχει διάδοση του κύματος στην αντίστοιχη διεύθυνση.

Για να έχουμε λοιπόν όλους τους αριθμούς κύματος πραγματικούς θα πρέπει να ισχύει $k_{p2} > k_{z2}, k_{p2} > k_x, k_{s2} > k_{sz2}, k_{s2} > k_x$ ώστε να έχει νόημα η ανάλυση του αριθμού κύματος ως διανυσματικού μεγέθους σε δύο (πραγματικές) συνιστώσες. Αυτό δεν είναι όμως πάντα δυνατό και εξαρτάται από τη σχέση των παραμέτρων των δύο μέσων μεταξύ τους. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε πρόσπτωση επίπεδων κυμάτων σε δύο μέσα για τα οποία ισχύει $c_{p2} > c_1$. Από το νόμο του Snell παίρνουμε ότι

$$\sin \theta_2 = \frac{c_{p2}}{c_1} \sin \theta_1 \quad (2.7.20)$$

Παρατηρούμε ότι για κάποιες γωνίες θ_1 , το ημίτονο της γωνίας διάθλασης παίρνει τιμή μεγαλύτερη από τη μονάδα και επομένως η γωνία διάθλασης γίνεται φανταστική. Αυτό ισοδυναμεί με την κατακόρυφη συνιστώσα του αριθμού κύματος να είναι φανταστική. Επομένως δεν υπάρχει διάδοση κατά τον άξονα των z .

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο περισσότερο στην αναφορά μας στο πρόβλημα της ανάκλασης στην επιφάνεια που χωρίζει δύο ρευστά μέσα όπου και θα εισάγουμε την έννοια της «κρίσιμης γωνίας». Στο σημείο αυτό μπορούμε όμως να δούμε τι θα πάρουμε εάν οι κατακόρυφες συνιστώσες και των δύο αριθμών κύματος στο δεύτερο (ελαστικό) μέσον γίνουν φανταστικές ποσότητες. $k_{z2} = ig_2, k_{sz2} = iq_2$.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στο συντελεστή ανάκλασης (2.7.13), παίρνουμε την έκφραση του συντελεστή ανάκλασης στην περίπτωση ολικής ανάκλασης από ένα ελαστικό μέσο. Κάνοντας τις σχετικές πράξεις (Άσκηση) διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης γράφεται στην περίπτωση αυτή ως

$$R_{12} = -e^{2in} \quad (2.7.21)$$

όπου

$$n = \text{Arc tan} \left\{ \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\kappa_{z1}}{g_2} \frac{c_{s2}^4}{\omega^4} [-4g_2 q_2 k_x^2 + (q_2^2 + k_x^2)^2] \right\} \quad (2.7.22)$$

Αυτό σημαίνει ότι το δυναμικό ανάκλασης διαφέρει ως προς το δυναμικό πρόσπτωσης μόνο ως προς την φάση. Το πλάτος του δυναμικού του ανακλώμενου κύματος, που εκφράζει μέσω της αντίστοιχης πίεσης και την ενέργεια που επιστρέφει στο νερό, παραμένει το ίδιο. Με άλλα λόγια, όλη η ενέργεια που προσέπεσε στη διαχωριστική επιφάνεια ανακλάστηκε, αλλά το ακουστικό κύμα υπέστη μια διαφορά φάσης. Συνεπώς δεν υπάρχει κυματική ενέργεια που να διαδίδεται στο ελαστικό μέσον !

2.7.3 Ανάκλαση επίπεδων ακουστικών κυμάτων στην διεπιφάνεια ανάμεσα σε δύο ρευστά μέσα.

Θα δούμε τώρα την ειδική περίπτωση που το δεύτερο μέσον είναι ρευστό. Η περίπτωση αυτή αποκτά ειδικό ενδιαφέρον στην ακουστική ωκεανογραφία, μια και τα υλικά του βυθού κοντά στις ακτές και στις ρηχές θάλασσες μπορούν να θεωρηθούν ρευστά. Στις περιοχές αυτές η ακουστική ωκεανογραφία έχει πληθώρα εφαρμογών.

Όταν τα δύο μέσα είναι ρευστά, το μόνο δυναμικό που ορίζεται είναι το δυναμικό των διαμήκων κυμάτων Φ . Για το προσπίπτον το ανακλώμενο και το διαθλώμενο κύμα (όλα διαμήκη – ακουστικά) η έκφραση των δυναμικών είναι :

$$\Phi_{1i} = e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} \quad (2.7.23)$$

$$\Phi_{1r} = R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)} \quad (2.7.24)$$

$$\Phi_2 = T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.25)$$

Οι συνθήκες στη διεπιφάνεια παραμένουν οι ίδιες με αυτές της προηγούμενης περίπτωσης με την απουσία βέβαια της συνθήκης για τα διατμητικά κύματα που εδώ είναι κενή περιεχομένου. Έτσι παίρνουμε

$$\sigma_{1zz} = \sigma_{2zz} \quad (2.7.26)$$

$$d_{1z} = d_{2z} \quad (2.7.27)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις των τάσεων και των μετατοπίσεων που έχουμε δει στις δύο διαστάσεις, παίρνουμε :

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = \rho_2 \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} \quad (2.7.28)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \quad (2.7.29)$$

Με αντικατάσταση των δυναμικών στις αντίστοιχες εκφράσεις και έχοντας υπ'όψιν ότι $\Phi_1 = \Phi_{1i} + \Phi_{1r}$, παίρνουμε

$$\rho_1 \omega^2 \{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} + R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}\} = \rho_2 \omega^2 T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.30)$$

και

$$ik_{z1} \{e^{i(k_x x + k_{z1} z - \omega t)} - R_{12} e^{i(k_x x - k_{z1} z - \omega t)}\} = ik_{z2} T_p e^{i(k_x x + k_{z2} z - \omega t)} \quad (2.7.31)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις αυτές στι διεπιφάνεια ($z=0$) και παρατηρώντας ότι έχουμε κοινούς όρους $e^{i(k_x x - \omega t)}$ και στα δύο μέρη, παίρνουμε

$$\rho_1 (1 + R_{12}) = \rho_2 T_p \quad (2.7.32)$$

$$k_{z1} (1 - R_{12}) = k_{z2} T_p \quad (2.7.33)$$

Το γραμμικό σύστημα ως προς τους συντελεστές R_{12}, T_p επιλύεται εύκολα (Άσκηση) και δίδει τα αποτελέσματα

$$R_{12} = \frac{k_{z1} \rho_2 - k_{z2} \rho_1}{k_{z1} \rho_2 + k_{z2} \rho_1} \quad (2.7.34)$$

$$T_p = \frac{2k_{z1} \rho_1}{k_{z1} \rho_2 + k_{z2} \rho_1} \quad (2.7.35)$$

Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι οι σχέσεις 2.7.34 και 2.7.35, εκφράζουν τα όρια των αντίστοιχων συντελεστών για την περίπτωση του προβλήματος της ανάκλασης ανάμεσα σε ένα ρευστό και ένα ελαστικό μέσον, από τους οποίους έχουμε ήδη παρουσιάσει το συντελεστή ανάκλασης (Σχέση 2.7.19), όταν η ταχύτητα διάδοσης του διατμητικού κύματος τείνει στο 0 ($c_{s2} \rightarrow 0$).

Επίσης θα πρέπει να προσέξουμε ότι ο συντελεστής διάδοσης στη μορφή που τον δίνει η σχέση 2.7.35 αφορά το συντελεστή που υπεισέρχεται στην έκφραση του δυναμικού μετατόπισης. Στα περισσότερα βιβλία που αφορούν κυματική διάδοση, ο συντελεστής διάδοσης αναφέρεται στο λόγο της πίεσης διάδοσης ως προς την πίεση πρόσπτωσης και έχει διαφορετική έκφραση σε σχέση με αυτό που αναφέρεται στην ανωτέρω σχέση (Άσκηση).

Θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με το συντελεστή ανάκλασης για να μελετήσουμε και πάλι την περίπτωση της ολικής ανάκλασης.

Εναλλακτική έκφραση του συντελεστή ανάκλασης μέσω των γωνιών ανάκλασης και διάθλασης και χρησιμοποιώντας το συμβολισμό c_2 για την ταχύτητα διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στο δεύτερο μέσον (αφού δεν υπάρχουν διατμητικά κύματα) παίρνουμε με χρήση των σχέσεων

$$k_{z1} = k_1 \cos \theta_1 = \frac{\omega}{c_1} \cos \theta_1 \quad (2.7.36)$$

$$k_{z2} = k_2 \cos \theta_2 = \frac{\omega}{c_2} \cos \theta_2 \quad (2.7.37)$$

$$R_{12} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.38)$$

Από το νόμο του Snell έχουμε $\sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_1} \sin \theta_1$ οπότε και $\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 \sin^2 \theta_1}$

Όπως είχαμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε και στην προηγούμενη περίπτωση, εάν $c_2 < c_1$, η γωνία θ_2 είναι πάντα πραγματική και υπάρχει κυματικό φαινόμενο και στο δεύτερο μέσον. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι όταν όλες οι συνιστώσες των αριθμών κύματος είναι πραγματικοί αριθμοί, ο συντελεστής ανάκλασης είναι πραγματικός αριθμός. Όταν όμως $c_2 > c_1$ υπάρχει η περίπτωση της ολικής ανάκλασης για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της **κρίσιμης γωνίας** (*critical angle*) που ορίζεται μέσω της σχέσης 2.7.14 :

$$\theta_{cr} = \text{Arc sin } \frac{c_1}{c_2} \quad (2.7.39)$$

Για γωνίες πρόσπτωσης μεγαλύτερες της κρίσιμης, η γωνία διάδοσης στο δεύτερο μέσον είναι φανταστική και ο αντίστοιχος κατακόρυφος αριθμός κύματος γράφεται $k_{z2} = ig_2$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο συντελεστής ανάκλασης γίνεται

$$R_{12} = \frac{k_{z1}\rho_2 - ig_2\rho_1}{k_{z1}\rho_2 + ig_2\rho_1} \quad (2.7.40)$$

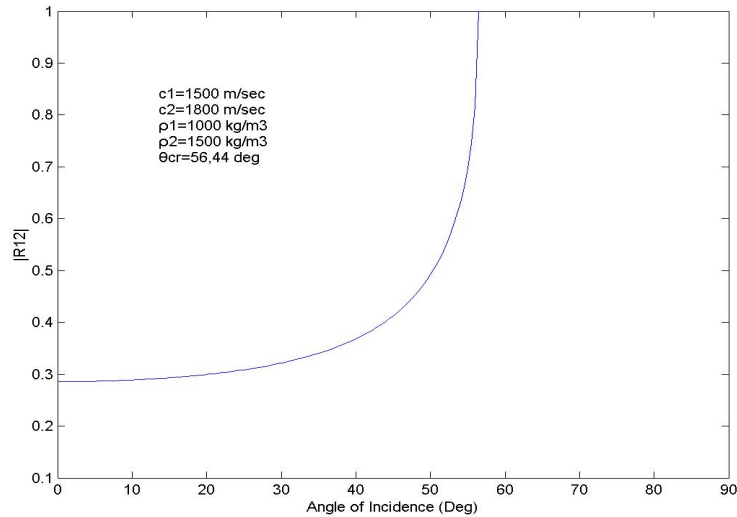
Παρατηρώντας ότι ο αριθμητής είναι ο συζυγής του παρανομαστή, ο συντελεστής ανάκλασης είναι μιγαδικός αριθμός που γράφεται ως

$$R_{12} = -e^{2i\chi} \quad (2.7.41)$$

όπου

$$\chi = \text{Arc tan}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{k_{z1}}{g_2}\right) \quad (2.7.42)$$

Στο σχήμα 2.8 βλέπουμε ένα διάγραμμα του μέτρου του συντελεστή ανάκλασης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης για την περίπτωση δύο ρευστών ακουστικών μέσων, από τα οποία το δεύτερο χαρακτηρίζεται από ταχύτητα διάδοσης μεγαλύτερη από εκείνη του πρώτου μέσου.



Σχήμα 2.8 Συντελεστής ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνει δύο ρευστών για τα οποία ισχύει $c_2 > c_1$. Προσέξτε την κρίσιμη γωνία στις 56.44°.

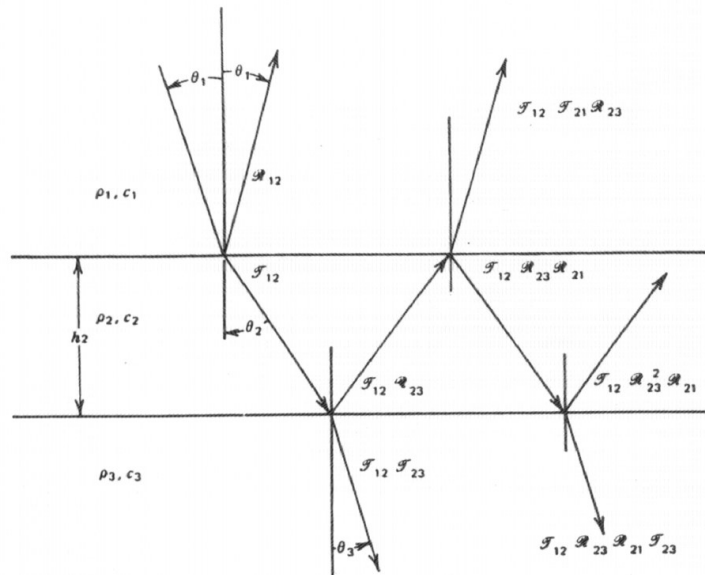
Πρόκειται για μία τυπική περίπτωση της ακουστικής ωκεανογραφίας, μια και συνήθως οι ταχύτητες διάδοσης των ακουστικών κυμάτων στα θαλασσινά ιζήματα είναι μεγαλύτερες από εκείνες του νερού.

Να σημειώσουμε τέλος ότι το γινόμενο $\rho_i c_i, i=1,2$ ονομάζεται **χαρακτηριστική ακουστική αντίσταση** (*characteristic acoustic impedance*) και χαρακτηρίζει ένα ακουστικό υλικό.

2.7.4 Ανάκλαση επίπεδου ηχητικού κύματος από πολυστρωματοποιημένο ρευστό μέσο

Στην πραγματικότητα, ο πυθμένας της θάλασσας δεν είναι ένα ομογενές και ισότροπο υλικό όπως απαιτεί η ανάπτυξη που κάναμε μέχρι τώρα. Αποτελείται από πολλά επάλληλα στρώματα υλικών διαφορετικής σύνθεσης που στην απλούστερη των περιπτώσεων μπορεί να θεωρήσει κανείς ότι διαχωρίζονται από επιφάνειες που είναι επίπεδες, και παράλληλες μεταξύ τους σε οριζόντια διάταξη. Επί πλέον υποθέτουμε ότι οι παράμετροι των υλικών μεταβάλλονται μόνο με το βάθος z .

Πυθμένες με τις παραπάνω ιδιότητες ονομάζονται **οριζόντια στρωματοποιημένοι** (*horizontally stratified*). Στο παρόν κεφάλαιο θα συνεχίσουμε να υποθέτουμε ότι σε κάθε στρώμα η πυκνότητα και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου δεν μεταβάλλονται. Έτσι μπορούμε να οδηγηθούμε στη μοντελοποίηση του προβλήματος της ανάκλασης του ήχου από πυθμένα αποτελούμενο από πολλά ομογενή και ισότροπα στρώματα, κάνοντας επέκταση των όσων αναπτύξαμε προηγουμένως για την περίπτωση ενός υλικού μόνο. Σε κάθε περίπτωση το τελευταίο στρώμα θα θεωρείται ότι εκτείνεται μέχρι το άπειρο στο z . Για απλούστευση πάντως της ανάπτυξης θα αναφερθούμε μόνο στην περίπτωση πολλών επάλληλων **ρευστών** στρωμάτων.



Σχήμα 2.9 Ανάκλαση και διάθλαση σε πυθμένα αποτελούμενο από δύο ρευστά στρώματα, το δεύτερο ημιάπειρου πάχους

Θα ξεκινήσουμε μελετώντας την περίπτωση του πυθμένα που αποτελείται από ένα στρώμα πεπερασμένου πάχους πάνω από ένα ημιάπειρο ημίχωρο. Η επέκταση όπως θα δούμε για πολλαπλά στρώματα είναι άμεση.

Θεωρείστε το σχήμα 2.9, στο οποίο σημειώνονται οι διευθύνσεις διάδοσης ενός ακουστικού κύματος, οι αντίστοιχες γωνίες πρόσπτωσης και οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για κάθε κυματισμό, όπως αυτοί ορίστηκαν από τα προηγούμενα.

Το πρώτο στρώμα στον πυθμένα (δ δεύτερο κατά αύξοντα αριθμό) έχει πάχος h_2 . Περιγραφικά, το κύμα που διαθλάται στο στρώμα αυτό ανακλάται στην διαχωριστική επιφάνεια του τρίτου στρώματος και μέρος της ενέργειας επιστρέφει για να προσπέσει στη συνέχεια στο όριο ανάμεσα στο δεύτερο και το πρώτο στρώμα (νερό), οπότε τμήμα της ενέργειας επιστρέφει στο νερό και τμήμα της ενέργειας γυρίζει πίσω για να ακολουθηθεί θεωρητικά η διαδικασία αυτή επ' αόριστον.

Το ενδιαφέρον μας συνήθως εστιάζεται στον υπολογισμό του ακουστικού κύματος που επιστρέφει στο νερό και το οποίο αποτελείται από επαλληλία όλων των κυματισμών που γυρίζουν σ' αυτό μετά από τις διαδικασίες ανάκλασης και διάθλασης που περιγράψαμε ανωτέρω.

Με αναφορά στους συντελεστές του σχήματος 2.9, μπορούμε να εκφράσουμε άμεσα εκείνους που αναφέρονται ανάμεσα σε δύο μέσα με τις υποθέσεις του προηγούμενου εδαφίου. Παίρνουμε δηλαδή :

$$R_{12} = \frac{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 - \rho_1 c_1 \cos \theta_2}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.43)$$

$$R_{23} = \frac{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 - \rho_2 c_2 \cos \theta_3}{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 + \rho_2 c_2 \cos \theta_3} \quad (2.7.44)$$

$$T_{12} = \frac{2\rho_1 c_2 \cos \theta_1}{\rho_2 c_2 \cos \theta_1 + \rho_1 c_1 \cos \theta_2} \quad (2.7.45)$$

$$T_{23} = \frac{2\rho_2 c_3 \cos \theta_2}{\rho_3 c_3 \cos \theta_2 + \rho_2 c_2 \cos \theta_3} \quad (2.7.46)$$

Πρέπει να προσεξουμε όμως εδώ, ότι το κύμα που έχει διαδοθεί μέσα στο δεύτερο στρώμα, έχει υποστεί συνολικά μία διαφορά φάσης $2k_2 h_2 \cos \theta_2 = 2k_{z2} h_2$ από τη στιγμή που αποχωρίζεται τη διαχωριστική επιφάνεια πρώτου-δευτέρου στρώματος μέχρι την επιστροφή της σ' αυτή μετά από την ανάκλαση στη διεπιφάνεια ανάμεσα στο δεύτερο και το τρίτο στρώμα (άσκηση).

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$R_{12} = -R_{21} \quad (2.7.47)$$

$$T_{12} T_{21} = 1 - R_{12}^2 \quad (2.7.48)$$

Αθροίζοντας γεωμετρικά όλες τις συνεισφορές από τις πολλαπλές επιστροφές στο νερό, παρατηρούμε ότι ο συνολικός συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο πρώτο και το σύνολο των δύο στρωμάτων, παίρνει τη μορφή

$$R_{13} = R_{12} + T_{12} T_{21} R_{23} \exp(2i\phi_2) + T_{12} T_{21} R_{23}^2 R_{21} \exp(4i\phi_2) + \dots \quad (2.7.49)$$

όπου $\phi_2 = k_2 h_2 \cos \theta_2$.

Μετά τον πρώτο όρο, οι όροι στην 2.7.42 έχουν τη μορφή γεωμετρικής σειράς

$S = \sum_{n=0}^{\infty} r^n = (1-r)^{-1}$ για $r < 1$, οπότε γράφουμε

$$R_{13} = R_{12} + T_{12} T_{21} R_{23} \exp(2i\phi_2) \sum_{n=0}^{\infty} [R_{23} R_{21} \exp(2i\phi_2)]^n \quad (2.7.50)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.7.47 και 2.7.48, παίρνουμε μία απλή έκφραση για το συντελεστή ανάκλασης που έχει τη μορφή

$$R_{13} = \frac{R_{12} + R_{23} \exp(2i\phi_2)}{1 + R_{12} R_{23} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.51)$$

Εντελώς αντίστοιχα μπορούμε να πάρουμε για το κύμα που διαδίδεται στο τελευταίο μέσο, το συντελεστή διάδοσης

$$T_{13} = \frac{T_{12} T_{23} \exp(i\phi_2)}{1 + R_{12} R_{23} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.52)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι συντελεστές έχουν τη μορφή ταλαντευόμενης συνάρτησης που εξαρτάται και από τη συχνότητα μέσω του κατακόρυφου αριθμού κύματος, σε αντίθεση με την περίπτωση του συντελεστή ανάμεσα σε δύο ρευστά στρώματα που είναι ανεξάρτητος της συχνότητας.

Εάν τα στρώματα είναι περισσότερα σε αριθμό, μία διαδικασία αντίστοιχη με αυτή που παρουσιάσαμε μπορεί να εφαρμοστεί με αρχή τα βαθύτερα στρώματα, έτσι ώστε να πάρουμε λύση για το συντελεστή ανάκλασης από το σύνολο των στρωμάτων. Έτσι, εάν έχουμε $n-1$ στρώματα κάτω από το νερό, ο συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο στρώμα $n-2$ και το τελευταίο στρώμα, θα είναι σε ευθεία αντιστοιχία με τη σχέση 2.7.51

$$R_{(n-2)n} = \frac{R_{(n-2)(n-1)} + R_{(n-1)n} \exp(2i\phi_{n-1})}{1 + R_{(n-2)(n-1)} R_{(n-1)n} \exp(2i\phi_{n-1})} \quad (2.7.53)$$

Για το αμέσως προηγούμενο στρώμα θα πάρουμε

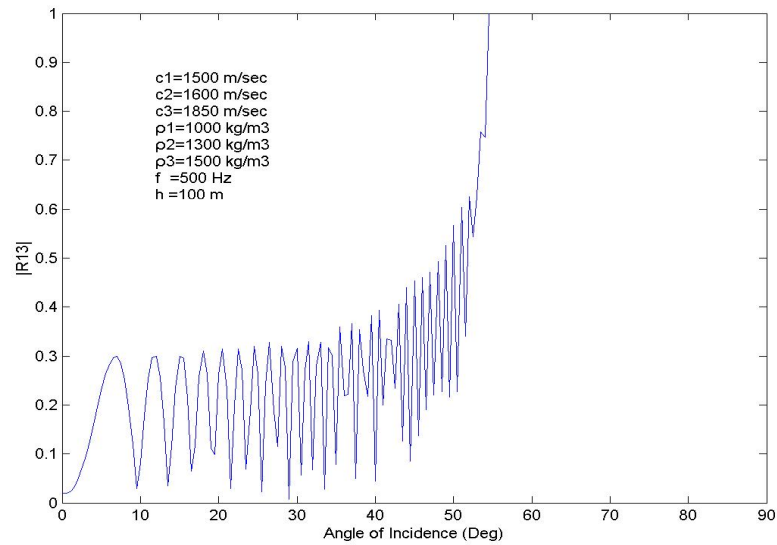
$$R_{(n-3)n} = \frac{R_{(n-3)(n-2)} + R_{(n-2)n} \exp(2i\phi_{n-2})}{1 + R_{(n-3)(n-2)} R_{(n-2)n} \exp(2i\phi_{n-2})} \quad (2.7.54)$$

και τελικά ο συντελεστής ανάκλασης ανάμεσα στο νερό και το σύνολο των στρωμάτων παίρνει τη μορφή

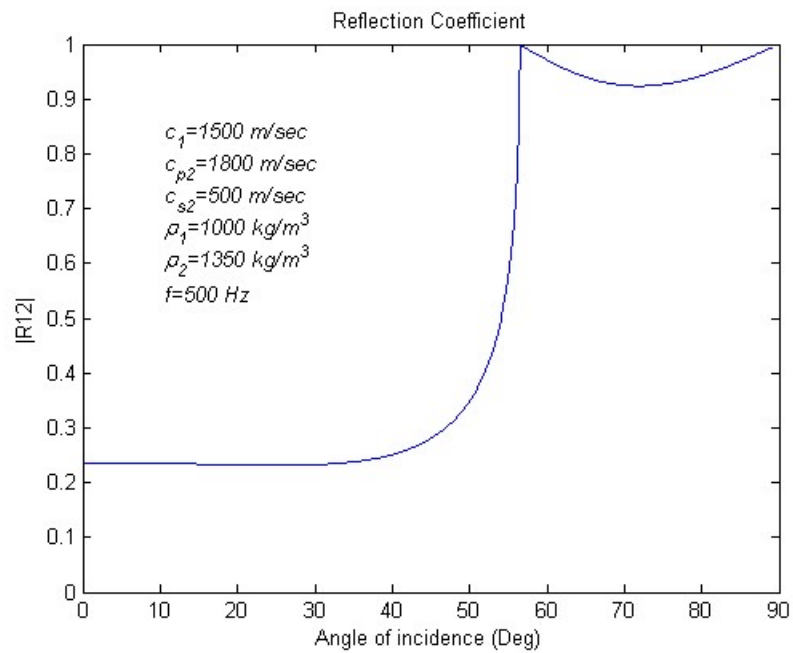
$$R_{1n} = \frac{R_{12} + R_{2n} \exp(2i\phi_2)}{1 + R_{12} R_{2n} \exp(2i\phi_2)} \quad (2.7.55)$$

Η περίπτωση της ολικής ανάκλασης για το πρόβλημά μας θα ισχύσει εφ' όσον σε κάποιο από τα στρώματα του πυθμένα υπάρξει (τοπικά) ολική ανάκλαση. Στην περίπτωση αυτή, οδηγούμεθα και πάλι σε συντελεστή ανάκλασης με μέτρο μονάδα.

Στο σχήμα 2.10 βλέπουμε το διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή ανάκλασης από ένα πυθμένα που αποτελείται από δύο συνολικά στρώματα. Η κρίσιμη γωνία εμφανίζεται όταν παρουσιαστεί ολική ανάκλαση στη διαχωριστική επιφάνεια ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο στρώμα του πυθμένα (γιατί ;).



Σχήμα 2.10 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια νερού και δύο στρωμάτων επάλληλων ρευστών. Η κρίσιμη γωνία εδώ είναι στις 54.18°



Σχήμα 2.11 Μέτρο του συντελεστή ανάκλασης επίπεδου ηχητικού κύματος στη διαχωριστική επιφάνεια νερού και ελαστικού στρώματος πυθμένα