

4. Εισαγωγή στην επεξεργασία ακουστικών σημάτων

Τα ακουστικά σήματα που καταγράφονται στο θαλάσσιο περιβάλλον ποικίλουν ανάλογα με την πηγή τους, ενώ η επιλογή του τύπου ενός ακουστικού σήματος που εκπέμπεται στη θάλασσα για συγκεκριμένους λόγους εξαρτάται από την εφαρμογή για την οποία εκπέμπεται. Κύρια κριτήρια επιλογής των σημάτων που εκπέμπονται από ενεργητικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στην ακουστική ωκεανογραφία είναι η μεταφορά όσο το δυνατό μεγαλύτερης ενέργειας σε μεγάλη απόσταση και η επίτευξη χαρακτηριστικών λήψης που να είναι εύκολα αναγνωρίσιμα και αξιοποιήσιμα. Με την έννοια αυτή ένα ημιτονοειδές κύμα (κύμα σταθερής συχνότητας ω , άπειρης διάρκειας), όπως αυτό στο οποίο βασίσαμε τη μέχρι τώρα ανάπτυξη δεν θεωρείται το πλέον κατάλληλο, μια και δεν έχει καλά χαρακτηριστικά αναγνωρισιμότητας, όπως π.χ. μέτρησης χρόνου. Από την άλλη πλευρά, σήματα που εκπέμπονται από φυσικές πηγές έχουν τα δικά τους χαρακτηριστικά ως προς το εύρος συχνοτήτων από τα οποία συντίθενται. Είναι επομένως δύσκολο στα πλαίσια ενός εισαγωγικού μαθήματος να συζητήσει κανείς τα χαρακτηριστικά κάποιων από τα σήματα αυτά, έχει όμως νόημα να αναφερθούμε σε στοιχεία της επεξεργασίας τους που θα βοηθήσουν να κατανοήσουμε έννοιες όπως του εύρους του σήματος (bandwidth) του μετασχηματισμού από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο των συχνοτήτων κ.λ.π. . Έτσι θα γίνει κατανοητή και η επιμονή μας στην αναφορά των λύσεων που αφορούν αρμονικά σήματα.

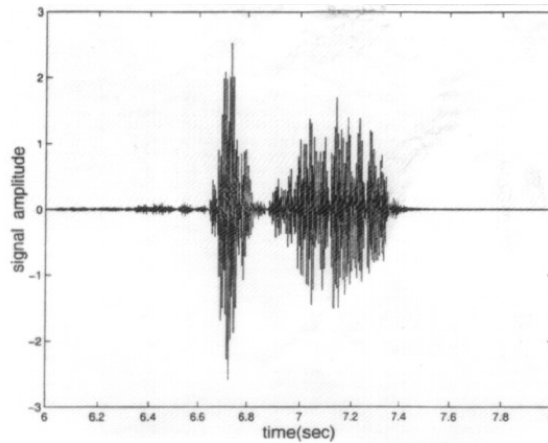
4.1 Στοιχεία από την ανάλυση των ακουστικών σημάτων – Ανάλυση Fourier.

Τα ακουστικά σήματα λαμβάνονται και καταγράφονται στο πεδίο του χρόνου. Εάν τα θεωρήσουμε με την αναλογική τους έκφραση, περιγράφονται ως συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου $f(t)$. Για παράδειγμα ένα μονοχρωματικό σήμα που οδεύει κατά μήκος του άξονα r μπορεί να έχει την έκφραση.

$$f(t) = A \sin(kr - \omega t) \quad (4.1.1)$$

Ένα τυχαίο σήμα (ντετερμινιστικό όμως ως προς την έκφρασή του) μπορεί να συντεθεί από πολλές αρμονικές, συνιστώσες δηλαδή σήματα που έχουν την ως άνω μορφή (4.1.1) αλλά που μπορεί να διαφέρουν ως προς το πλάτος και τη συχνότητα. Εάν θεωρήσουμε μία συνεχή κατανομή συχνοτήτων, η συνεισφορά κάθε μίας από τις συχνότητες στο σήμα, χαρακτηρίζεται μέσω της συνάρτησης $F(\omega)$. Οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ αποτελούν ένα ζεύγος συναρτήσεων που χαρακτηρίζει το οποιοδήποτε αναλογικό σήμα. Ο υπολογισμός του κάθε μέλους του ζεύγους μπορεί να γίνει εάν γνωρίζουμε το άλλο, μέσω του **Μετασχηματισμού Fourier** (*Fourier Transform*) που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Εάν οι ως άνω συναρτήσεις δεν είναι συνεχείς αλλά δίδονται για συγκεκριμένες τιμές των μεταβλητών t και ω (t_i, ω_j), η σχέση τους δίδεται μέσω του **Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier** (*Discrete Fourier Transform*). Με δεδομένη τη σύγχρονη ψηφιακή τεχνολογία, η τελευταία αυτή περίπτωση παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και στις δύο περιπτώσεις αρχίζοντας από τη συνεχή περίπτωση.



Σχήμα 4.1 Καταγραφή ενός ακουστικού σήματος στο πεδίο του χρόνου

4.1.1 Ο Μετασχηματισμός Fourier.

ΟΡΙΣΜΟΣ : Τα ζεύγη των μιγαδικών εν γένει συναρτήσεων $f(t)$ και $F(\omega)$ καλούνται ζεύγη μετασχηματισμού Fourier, και συμβολίζονται ως $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, όταν σχετίζονται μέσω των εξισώσεων

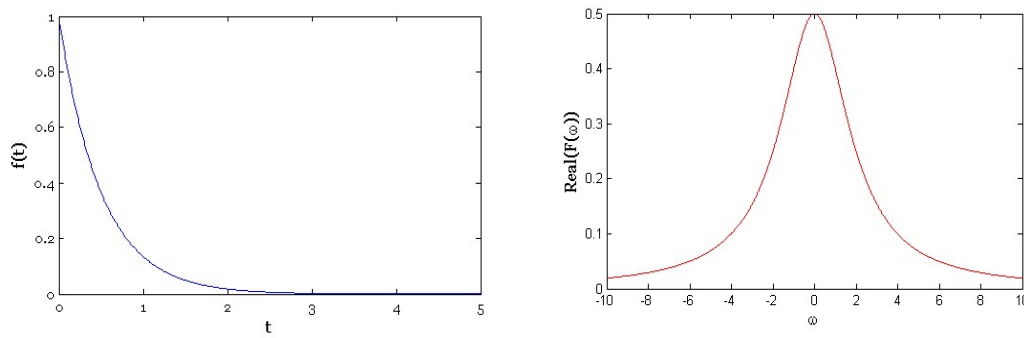
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (4.1.2)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (4.1.3)$$

Γράφοντας τις παραπάνω σχέσεις υποθέτουμε ότι τα ολοκληρώματα υπάρχουν με την έννοια της πρωτεύουσας τιμής του Cauchy¹¹.

Η συνάρτηση $F(\omega)$ ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ και συμβολίζεται και ως $F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\}$ ενώ η $f(t)$ χαρακτηρίζεται ως αντίστροφος μετασχηματισμός της $F(\omega)$ και συμβολίζεται ως $f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\}$. Να σημειώσουμε εδώ, ότι η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $F(\omega)$ και $f(t)$ για τις πρακτικές εφαρμογές αναφέρεται στο μέτρο τους π.χ. ($|F(\omega)|$), που είναι και ένας ενεργειακός δείκτης πολύ χρήσιμος στις εφαρμογές ή στο πραγματικό μέρος της $F(\omega)$.

¹¹ Δηλαδή για το ολοκλήρωμα ισχύει μια σχέση της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A x(t) dt$



Σχήμα 4.2 Παράδειγμα του σήματος της σχέσης 4.1.4 στα πεδία του χρόνου και της συχνότητας. Οι τιμές αφορούν $\alpha=2$.

Για παράδειγμα, εάν $f(t) = e^{-at}$ $a > 0$ $t > 0$ (Σχήμα 4.2), η $F(\omega)$ είναι

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{1}{a+i\omega} \quad (4.1.4)$$

Η αντίστροφη σχέση 4.1.3 μπορεί να διαπιστωθεί από τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.

Σημειώνουμε εδώ ως πρώτη βασική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier τη **γραμμικότητα**.

Η γραμμικότητα εκφράζεται ως εξής :

Εάν $f_i(t) \leftrightarrow F_i(\omega)$ για $i=1, \dots, N$ και c_i αυθαίρετες πραγματικές ή μιγαδικές σταθερές, τότε ισχύει :

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \dots + c_n f_n(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega) + \dots + c_n F_n(\omega) \quad (4.1.5)$$

Όπως είπαμε, οι συναρτήσεις $f(t)$ και $F(\omega)$ είναι γενικά μιγαδικές.

$$f(t) = f_1(t) + if_2(t) \quad F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της εκθετικής συνάρτησης μέσω ημίτονου και συνημίτονου (τύπος Euler) και την ιδιότητα της γραμμικότητας μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε σε εκφράσεις για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των ως άνω συναρτήσεων :

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t) \cos \omega t + f_2(t) \sin \omega t] dt \quad (4.1.6a)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_2(t) \cos \omega t - f_1(t) \sin \omega t] dt \quad (4.1.6\beta)$$

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t] d\omega \quad (4.1.6\gamma)$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) \sin \omega t + X(\omega) \cos \omega t] d\omega \quad (4.1.6\delta)$$

Στην πράξη, αναφερόμενοι σε επεξεργασία σημάτων, οι συναρτήσεις $f(t)$ αντιπροσωπεύουν μετρήσεις σημάτων στο πεδίο του χρόνου και είναι πραγματικές συναρτήσεις ($f_2(t) = 0$). Στην περίπτωση αυτή εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (4.1.7)$$

Άλλες σχέσεις που ισχύουν στην περίπτωση αυτή είναι $R(-\omega) = R(\omega)$ και $X(-\omega) = -X(\omega)$. Έτσι, υποδηλώνοντας με $*$ τον συζυγή, βλέπουμε ότι ισχύει και μια σχέση της μορφής $F^*(\omega) = F(-\omega)$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ είναι άρτια, ($f(-t) = f(t)$) παίρνουμε $X(\omega) = 0$. Δηλαδή ο μετασχηματισμός μιας πραγματικής άρτιας συνάρτησης δίνει πραγματική συνάρτηση. Αντίστοιχα εάν $f(-t) = -f(t)$ (περιττή συνάρτηση) παίρνουμε $R(\omega) = 0$.

Παραθέτουμε στη συνέχεια χωρίς απόδειξη μια σειρά από ενδιαφέροντα θεωρήματα αντιστοίχισης που ισχύουν για κάθε ζεύγος μετασχηματισμού Fourier. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει τις αντιστοιχίες ως άσκηση.

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$	
$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$	Συμμετρία (Δυσκότητα)
$f^*(t) \leftrightarrow F^*(-\omega)$	Συζυγία
$f^*(-t) \leftrightarrow F^*(\omega)$	
$f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$	Αντιστροφή χρόνου
$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	Αλλαγή κλίμακας
$\frac{1}{ a } f\left(\frac{t}{a}\right) \leftrightarrow F(a\omega)$	
$f(t-a) \leftrightarrow e^{-ia\omega} F(\omega)$	Μετατόπιση χρόνου
$e^{iat} f(t) \leftrightarrow F(\omega-a)$	Μετατόπιση συχνότητας
$f(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [F(\omega + \omega_0) + F(\omega - \omega_0)]$	Διαμόρφωση

4.1.2 Συνέλιξη

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ και τα αντίστοιχα δεύτερα μέλη των ζευγών του μετασχηματισμού Fourier $F_1(\omega)$ και $F_2(\omega)$.

Συνέλιξη (convolution) των συναρτήσεων $f_1(t)$ και $f_2(t)$ ονομάζουμε το ολοκλήρωμα

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \quad (4.1.8)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αντιπροσωπεύει μία νέα συνάρτηση του χρόνου και είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη των φίλτρων. Σημειώνουμε ότι θα χρησιμοποιήσουμε και το συμβολισμό $f_1(t) * f_2(t)$ για τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων. Επομένως θα θεωρήσουμε ότι ως προς το συμβολισμό ισχύει $f_1(t) * f_2(t) \equiv (f_1 * f_2)(t)$.

Εάν πάρουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $(f_1 * f_2)(t)$, έχουμε για $t = \tau + x$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+x)} f_2(x) dx d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

Έτσι, προκύπτει ένα σημαντικό συμπέρασμα σε ό,τι αφορά στο γινόμενο συναρτήσεων που περιγράφονται στο πεδίο των συχνοτήτων :

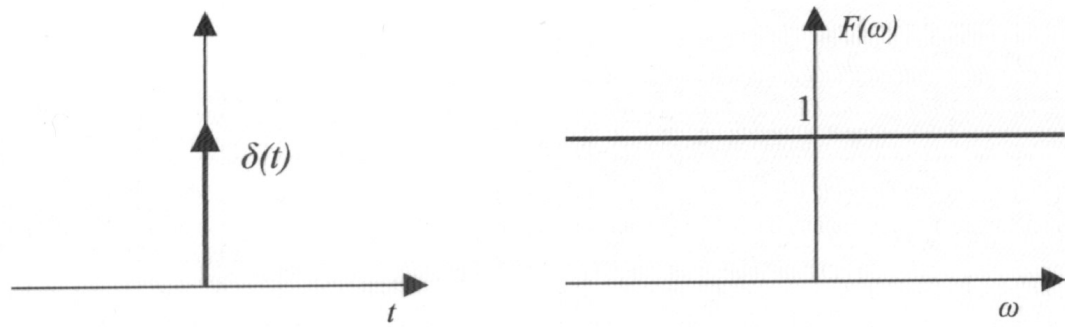
Η συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου μετασχηματίζεται σε γινόμενο συναρτήσεων στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η συμβολικά : Εάν $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$ και $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$ τότε

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega) \quad (4.1.9)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε (Άσκηση) ότι

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega) \quad (4.1.10)$$



Σχήμα 4.3 Ο παλμός δ .

Τέλος θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η ενέργεια του σήματος παραμένει αναλλοίωτη με το μετασχηματισμό. Η ιδιότητα αυτή έρχεται ως συνέπεια της φόρμουλας του Parseval για συνεχή σήματα που είναι :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega) F_2^* d\omega \quad (4.1.11)$$

Για $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ παίρνουμε :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f^2(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int |F(\omega)|^2 d\omega \quad (4.1.12)$$

που εκφράζει το ενεργειακό θεώρημα για το μετασχηματισμό Fourier. Θα το συναντήσουμε αργότερα, στην αναφορά μας στο θόρυβο του θαλάσσιου περιβάλλοντος.

4.1.3 Ο παλμός δ

Σε πολλές εφαρμογές της ανάλυσης σημάτων συναντάμε συναρτήσεις με τη μορφή ενός παλμού δέλτα (delta function δ). Οι ιδιότητες της ειδικής αυτής συνάρτησης βασίζονται στην ορισμό της, που δίδεται μέσω της σχέσης

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \phi(t) dt = \phi(0) \quad (4.1.13)$$

που ισχύει για κάθε συνάρτηση $\phi(t)$ που είναι συνεχής στο $t = 0$.

Από την ανωτέρω σχέση προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1 \quad (4.1.14)$$

που σημαίνει απλά ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δ είναι η μονάδα (1).

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad (4.1.15)$$

Με άλλα λόγια, ένας παλμός δέλτα στο πεδίο του χρόνου (στιγμιαία διέγερση) μετασχηματίζεται στο πεδίο των συχνοτήτων σε μία σταθερή συνάρτηση (Σχήμα 4.3).

Εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση για τον αντίστροφο μετασχηματισμό, παίρνουμε :

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.1.16)$$

Εάν $f(t) = 1$ παίρνουμε

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (4.1.17)$$

Επομένως:

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (4.1.18)$$

4.1.4 Περιοδικά σήματα – Σειρές Fourier

Το πέρασμα από το συνεχή μετασχηματισμό Fourier στο διακριτό είναι απαραίτητο μια και σήμερα η επεξεργασία των σημάτων είναι άμεσα συνδεδεμένη με την ψηφιακή ανάλυση. Τα σήματα ψηφιοποιούνται και βέβαια η επεξεργασία γίνεται σε πεπερασμένο χρόνο και για πεπερασμένες συχνότητες. Έτσι δεν είναι δυνατή η άμεση εφαρμογή του συνεχούς μετασχηματισμού Fourier. Αναζητείται συνεπώς κάτι περισσότερο συνδεδεμένο με τα πραγματικά δεδομένα της ανάλυσης σημάτων. Ως πρώτο βήμα για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου. Το σήμα αυτό εκφράζεται μέσω της συνάρτησης $f(t)$ για την οποία ισχύει :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT) \quad (4.1.19)$$

$$\text{όπου } f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

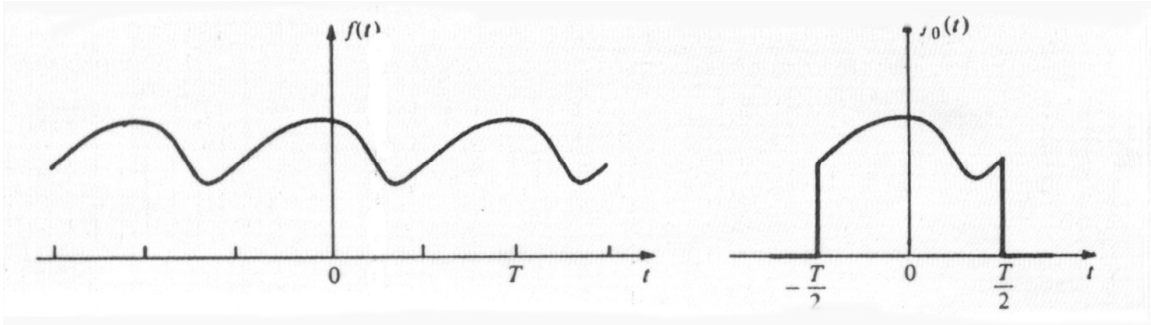
και T είναι η περίοδος του σήματος. Ο μετασχηματισμός Fourier της $f_0(t)$ είναι η $F_0(\omega)$.

Εάν συμβολίσουμε με $\bar{\delta}(t)$ τη σειρά

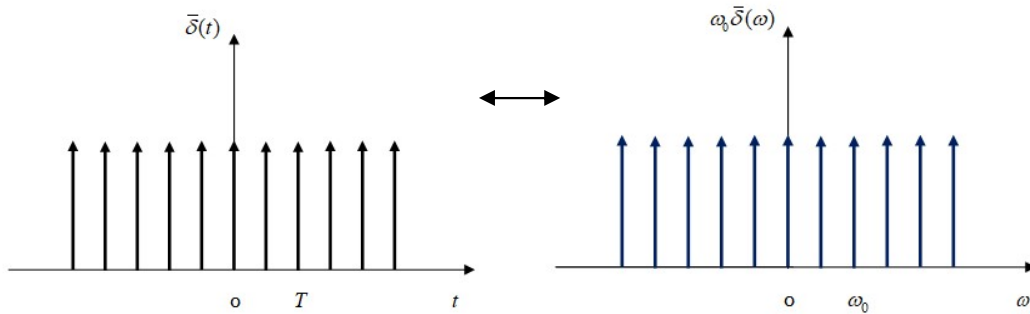
$$\bar{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) \quad (4.1.20)$$

μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση $f(t)$ γράφεται ως

$$f(t) = \bar{\delta}(t) * f_0(t) \quad (4.1.21)$$



Σχήμα 4.4 Περιοδικό σήμα

Σχήμα 4.5 Το ζεύγος των παλμών $\bar{\delta}(t)$, $\omega_0 \bar{\delta}(\omega)$

Συμβολίζοντας με $\bar{\delta}(\omega)$ τη σειρά, $\bar{\delta}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ όπου $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι $\bar{\delta}(t) \leftrightarrow \omega_0 \bar{\delta}(\omega)$ (Σχήμα 4.5).

Στη συνέχεια παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier των δύο μερών της 4.1.21 και με χρήση του θεωρήματος συνέλιξης έχουμε :

$$F(\omega) = \omega_0 \bar{\delta}(\omega) \cdot F_0(\omega) = \omega_0 F_0(\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_0) \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.1.22)$$

όπου έγινε χρήση της ιδιότητας των συναρτήσεων δ , $f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a)$.

Επομένως καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης περιόδου T , αποτελείται από μία αλληλουχία παλμών δ σε αποστάσεις ω_0 μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα οδηγεί στην έκφραση της $f(t)$ μέσω σειράς Fourier. Πράγματι, εάν πάρουμε

$$a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (4.1.23)$$

και τον αντίστροφο μετασχηματισμό στα δύο ακραία μέλη της εξίσωσης (4.1.22), οδηγούμεθα στη σχέση

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.24)$$

Αντίστοιχα, από την 4.1.22 βλέπουμε ότι η $F(\omega)$ γράφεται

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi a_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (4.1.25)$$

Οι συναρτήσεις $f(t)$, $F(\omega)$ αποτελούν το ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier.

Παράδειγμα Για να έχουμε μια εποπτεία των ανωτέρω, θα αναφερθούμε στο σχήμα 4.6 (από Παρουλίσ) στο οποίο παρουσιάζεται η περιοδική συνάρτηση

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t + nT) \quad \text{όπου} \quad f_0(t) = q_c(t) \quad \text{με}$$

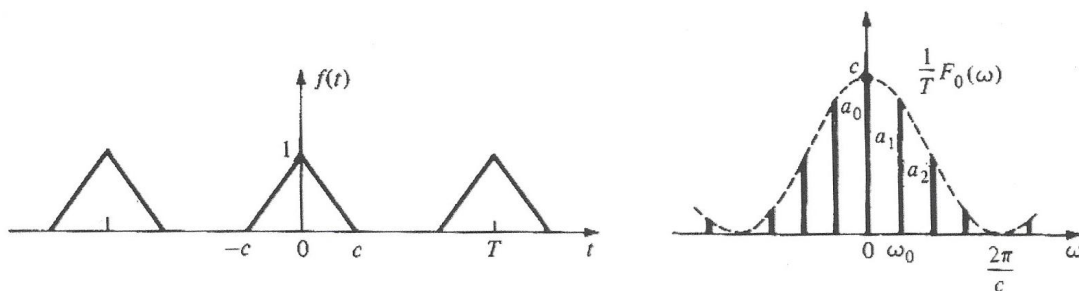
$$q_c(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{c} & |t| < c \\ 0 & |t| > c \end{cases} \quad (4.1.26)$$

και οι συντελεστές Fourier a_n της $f(t)$.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε (Άσκηση) ότι

$$q_c(t) \leftrightarrow F_0(\omega) = \frac{4 \sin^2(c\omega/2)}{c\omega^2} \quad (4.1.27)$$

ενώ από την (4.1.23) υπενθυμίζουμε ότι $a_n = \frac{1}{T} F_0(n\omega_0)$. Στο σχήμα φαίνονται τόσο οι συντελεστές a_n όσο και η συνάρτηση $\frac{1}{T} F_0(\omega)$ (δικεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 4.6 Η περιοδική συνάρτηση $f(t)$ του παραδείγματος και οι συντελεστές a_n

Παρατηρούμε ότι στο πεδίο των συχνοτήτων, η περιοδικότητα της συνάρτησης $f(t)$ εκφράζεται με διακριτή αλληλουχία παλμών στις συχνότητες $\omega = n\omega_0, -\infty < n < \infty$ και επομένως στο πεδίο του χρόνου η συνάρτηση $f(t)$ αναπαρίσταται με σειρά και όχι με ολοκλήρωμα. Προσέξτε επίσης τα όρια ολοκλήρωσης στον υπολογισμό των συντελεστών a_n .

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί και ένα θεώρημα συνέλιξης για τα σήματα της ως άνω κατηγορίας. Έτσι, εάν

$$f_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad f_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.28)$$

τότε

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n e^{in\omega_0 t} \quad (4.1.29)$$

και

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_1(t) f_2(t) e^{-in\omega_0 t} dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{n-m} \quad (4.1.30)$$

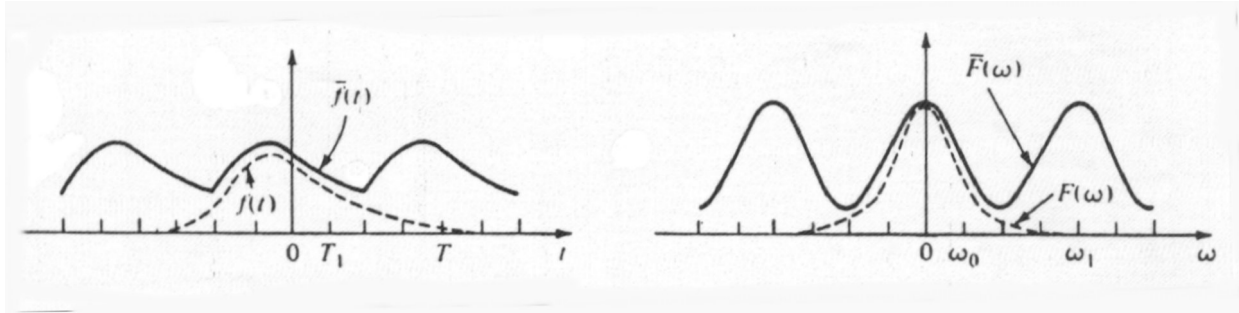
Τέλος αξίζει να παρατηρήσουμε ότι εάν η περίοδος της συνάρτησης $f(t)$ αρχίζει τη χρονική στιγμή T_0 , τα όρια ολοκλήρωσης στην 4.1.23 είναι από T_0 έως $T_0 + T$. Είναι επίσης συνηθισμένο η ολοκλήρωση να γίνεται ως προς τη συχνότητα και όχι ως προς την κυκλική συχνότητα (πρβλ την αναφορά μας στα φίλτρα). Συμβολίζοντας με f τη συχνότητα και αλλάζοντας το συμβολισμό της συνάρτησης του χρόνου σε $x(t)$, για να αποφύγουμε τυχόν σύγχυση με το συμβολισμό της συχνότητας, γράφομε για το ζεύγος του μετασχηματισμού

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i2\pi n f_0 t} \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi X_n \delta(2\pi f - 2\pi n f_0) \quad (4.1.31)$$

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} x(t) e^{-i2\pi n f_0 t} dt \quad (4.1.32)$$

εδώ, $f_0 = \frac{1}{T}$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ανωτέρω θεώρηση μπορεί να προκύψει και από τη θεωρία αναπαράστασης των περιοδικών συναρτήσεων με σειρές Fourier. Η έκφραση της $f(t)$ από την 4.1.24 (αντίστοιχα της $x(t)$ από την 4.1.31) είναι η κλασσική αναπαράσταση των αντίστοιχων συναρτήσεων με χρήση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βάσης στην εκθετική τους μορφή.



Σχήμα 4.5 Οι συναρτήσεις $\bar{f}(t)$ και $\bar{F}(\omega)$ (από Papoulis)

4.1.5 Ο Διακριτός μετασχηματισμός Fourier

Στόχος του διακριτού μετασχηματισμού Fourier είναι ο υπολογισμός του ζεύγους $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ όταν είναι γνωστές διακριτές τιμές της μίας ή της άλλης συνάρτησης. Με άλλα λόγια θα μπορούσε να δει κανείς τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier ως μία προσπάθεια αριθμητικού υπολογισμού των ολοκληρωμάτων που ορίζουν το συνεχή μετασχηματισμό (Σχέσεις 4.1.2 και 4.1.3). Είναι προφανές ότι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier έχει άμεση εφαρμογή στη σημερινή ψηφιακή εποχή.

Θεωρούμε το ζεύγος $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ και τις σχετιζόμενες με αυτό νέες συναρτήσεις :

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t + nT) \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega + n\omega_1) \quad (4.1.33)$$

Η συνάρτηση $\bar{f}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο T , ενώ η $\bar{F}(\omega)$ είναι επίσης περιοδική, με περίοδο ω_1 (Σχήμα 4.5). Οι σταθερές T και ω_1 είναι αυθαίρετες.

Μπορεί να δειχτεί ότι η συνάρτηση $\bar{f}(t)$ γράφεται με τη μορφή ενός *αθροίσματος Poisson* (*Poisson sum formula*) ως

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{in\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.1.34)$$

Προφανώς, οι συντελεστές $F(n\omega_0)$ είναι οι συντελεστές Fourier της περιοδικής συνάρτησης $T\bar{f}(t)$ (πρβλ. Σχέση 4.1.24). Δηλαδή

$$F(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} \bar{f}(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (4.1.35)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\bar{F}(\omega) = \frac{2\pi}{\omega_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_1) e^{-inT_1\omega} \quad , \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad (4.1.36)$$

Οι συντελεστές $F(n\omega_0)$ μπορεί να θεωρηθούν ως διακριτές τιμές της συνάρτησης $F(\omega)$ αφού υπολογίζονται σε διακριτές τιμές του πεδίου των συχνοτήτων. Επίσης μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για τις τιμές $n\omega_0$, το ολοκλήρωμα

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{με όρια στο άπειρο, μεταπίπτει στο πεπερασμένο ολοκλήρωμα}$$

4.1.35 αλλά για την συνάρτηση $\bar{f}(t)$.

Χρειαζόμαστε κάτι ανάλογο και για τη συνάρτηση $f(t)$. Δηλαδή ένα τρόπο υπολογισμού των διακριτών τιμών της στο πεδίο του χρόνου εάν γνωρίζουμε την μετασχηματισμένη της στο πεδίο συχνότητας. Επί πλέον θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο να μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα 4.1.35 με την μορφή σειράς.

Ας θεωρήσουμε την περιοδική συνάρτηση

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t} \quad (4.1.37)$$

Εάν N είναι μία αυθαίρετη σταθερά και $T_1 = T/N$, οι διακριτές τιμές της $y(t)$ δίδονται από τις σχέσεις

$$y(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 mT_1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k w_N^{km} \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.38)$$

όπου $\omega_0 T_1 = \omega_0 T / N = 2\pi / N$.

Ο ακέραιος k γράφεται ως ένα άθροισμα $k = n + rN$, $n = 0, \dots, N-1$, $r = \dots, -1, 0, 1, \dots$ και αφού $w_N^N = 1$, $w_N^{km} = w_N^{(n+rN)m} = w_N^{nm}$.

Επίσης, η (4.1.38) γράφεται

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} w_N^{(n+rN)m} = \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{nm} \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN} \quad (4.1.39)$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\bar{c}_N \equiv \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_{n+rN}$, παίρνουμε

$$y(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n w_N^{nm}, \quad m = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.40)$$

Έτσι παίρνουμε N εξισώσεις που ορίζουν μέσω των συντελεστών $\bar{c}_n$ τις διακριτές τιμές της συνάρτησης $y(t)$.

Τα ανωτέρω ισχύουν και για τη συνάρτηση $\bar{f}(t)$, όπως αυτή ορίζεται από την (4.1.34).

Υπενθυμίζοντας τις σχέσεις

$$T_1 = T / N, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = N\omega_0, \quad \text{έχουμε}$$

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) w_N^{mn}, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.41)$$

Η τελευταία έκφραση μας δίνει N εξισώσεις (για $m=0, \dots, N-1$), που μας δίνουν τις διακριτές τιμές $\bar{F}(n\omega_0)$ της περιοδικής συνάρτησης $\bar{F}(\omega)$, συναρτήσει των διακριτών τιμών $\bar{f}(mT_1)$ της περιοδικής συνάρτησης $\bar{f}(t)$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν $F(\omega) = 0$ για $|\omega| > \sigma$ και $\omega_1 > 2\sigma$, τότε $F(\omega) = \bar{F}(\omega)$ για $|\omega| < \sigma$ και η λύση της 4.1.41 (τιμές $\bar{F}(n\omega_0)$) δίνει τις διακριτές τιμές της $F(\omega)$ δηλαδή $\bar{F}(n\omega_0) = F(n\omega_0)$. Περισσότερα για αυτή την αντιστοιχία θα δούμε παρακάτω.

Η σχέση (4.1.41) είναι της μορφής

$$A_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n w_N^{mn} \quad m = 0, \dots, N-1, \quad w_N = e^{i2\pi/N} \quad (4.1.42)$$

και μπορούμε να δείξουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} A_m w_N^{-mn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.1.43)$$

Τα ζεύγη των συντελεστών που ορίζονται από τις σχέσεις (4.1.42) και (4.1.43) αποτελούν μία διακριτή σειρά ζευγών *Fourier (discrete Fourier series pair)* τάξης N . και θα συμβολίζονται με

$$a_n \leftrightarrow_N A_m$$

Η σειρά είναι περιοδική, δηλαδή ισχύει

$$A_{m+N} = A_m, \quad a_{n+N} = a_n$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι για περιοδικά σήματα, η διακριτή σειρά Fourier μας δίνει μέσω των 4.1.35 και 4.1.36, διακριτές τιμές του σήματος στο πεδίο του

χρόνου και των συχνοτήτων. Μία δειγματοληψία με N τιμές επομένως στο ένα από τα δύο πεδία μας δίδει μία αντίστοιχη δειγματοληψία στο άλλο πεδίο, με τον ίδιο αριθμό σημείων.

Δεν χρειάζεται επομένως να καταφύγει κανείς σε ολοκληρώματα για να πάρει κάποιες από τις δύο τιμές. Υπάρχει βέβαια πάντα η απαίτηση επίλυσης ενός συστήματος N εξισώσεων. Οι υπολογισμοί γίνονται γρήγορα σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή, ωστόσο με ειδική τεχνική (**Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier** – *Fast Fourier Transform* ή *FFT*) είναι δυνατόν αυτοί να επιταχυνθούν σημαντικά.

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι οι δειγματοληπτικές τιμές

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(mT_1 + kT), \quad \bar{F}(n\omega_0) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0 + r\omega_1) \quad (4.1.44)$$

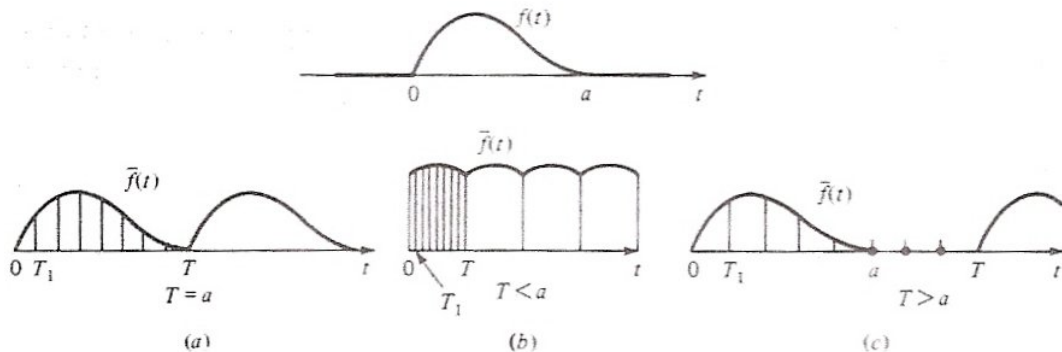
των συναρτήσεων $\bar{f}(t)$ και $\bar{F}(\omega)$ ορίζουν ένα ζεύγος διακριτού μετασχηματισμού Fourier, ως εξής:

$$\frac{1}{T} \bar{F}(n\omega_0) \leftrightarrow \bar{f}(mT_1)$$

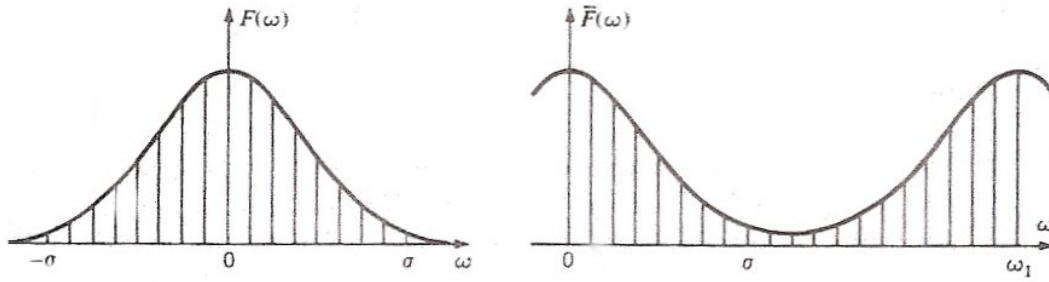
Συνεπώς, από την 4.1.43 παίρνουμε

$$\bar{F}(n\omega_0) = T_1 \sum_{m=0}^{N-1} \bar{f}(mT_1) w_N^{-mn} \quad (4.1.45)$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι όταν έχουμε ένα τυχαίο σήμα στο πεδίο του χρόνου, θα πρέπει να γίνει κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων του διακριτού μετασχηματισμού Fourier ώστε να μειωθεί το λάθος που γίνεται όταν οι συντελεστές της $F(\omega)$ προσεγγιστούν κατά τα ανωτέρω με εκείνους της $\bar{F}(\omega)$. Το λάθος αυτό ($F(n\omega_0) - \bar{F}(n\omega_0)$) είναι γνωστό στην βιβλιογραφία ως *aliasing error*.



Σχήμα 4.6 Υπολογισμός εναλλακτικού εύρους δειγματοληψίας (από Papoulis)



Σχήμα 4.7 Οι συναρτήσεις $F(\omega)$ και $\bar{F}(\omega)$ (από Papoulis)

Σε πραγματικά προβλήματα, ένα σήμα έχει πεπερασμένη διάρκεια όταν καταγραφεί στο πεδίο του χρόνου. Η «χρήσιμη» διάρκεια του σήματος, δηλαδή αυτή που αναφέρεται σε συγκεκριμένη εκπομπή μπορεί να είναι μικρότερη από την διάρκεια της καταγραφής. Για να μπορέσουμε να μελετήσουμε το σήμα αυτό με το διακριτό μετασχηματισμό Fourier θα πρέπει να θεωρήσουμε την «ενεργό» του διάρκεια, και στη συνέχεια να θεωρήσουμε μία περίοδο επανάληψης της κυματομορφής στο πεδίο του χρόνου, η οποία μπορεί να είναι και μεγαλύτερη από την ενεργό διάρκεια. (Σχήμα 4.6). Ας συμβολίσουμε με $f(t)$ το πραγματικό σήμα, με a την ενεργό διάρκεια και με T την περίοδο του «τεχνητού» περιοδικού σήματος $\bar{f}(t)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε ένα τυχαίο σήμα $f(t)$ το οποίο περιορίζεται στο διάστημα $(0, a)$ και είναι μηδέν έξω από το διάστημα αυτό (Σχήμα 4.6). Στην πράξη αυτό μπορεί να γίνει όταν από ένα καταγεγραμμένο σήμα αφαιρεθούν στοιχεία της καταγραφής πέρα από ένα διάστημα μέσα στο οποίο θεωρείται ότι το σήμα έχει ένα σημαντικό πλάτος. Έτσι παίρνουμε την «ενεργό» διάρκεια. Σημειώνουμε ότι έξω από το διάστημα αυτό εάν έχει καταγραφεί κάτι θεωρείται ότι είναι θόρυβος και γι αυτό αμελείται θεωρούμενος ως 0. Θα πρέπει τώρα να ορίσουμε τις παραμέτρους T και N για να υλοποιηθεί ο μετασχηματισμός. Τα βήματα που τυπικά πρέπει να ακολουθηθούν προκειμένου να επιτευχθεί βέλτιστη ανάλυση του σήματος και δυνατότητα ακριβούς μετάβασης από το ένα πεδίο στο άλλο και αντίστροφα, είναι τα εξής :

1. Υπολογισμός του βήματος δειγματοληψίας. Επιλέγουμε $T=a$ ενώ N είναι η επιλεγείσα τάξη του μετασχηματισμού. Τότε $f(t)=\bar{f}(t)$ στο διάστημα $(0, T)$ (Σχήμα 4.6). Χρησιμοποιώντας τα δείγματα της $f(t)$ στο διάστημα αυτό, που είναι $f(mT_1)$, $T_1 = T/N$, $m = 0, 1, \dots, N-1$ ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier θα μας δώσει ακριβώς τα δείγματα της $\bar{F}(n\omega_0)$, $\omega_0 = 2\pi/T$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Τα δείγματα $F(n\omega_0)$ της $F(\omega)$ μπορούν να προσεγγιστούν από εκείνα της $\bar{F}(n\omega_0)$ εάν η $F(\omega)$ περιορίζεται ουσιαστικά σε ένα διάστημα $(-\sigma, \sigma)$ και παράλληλα $\sigma < \omega_1/2$, όπου $\omega_1 = N\omega_0$. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να δει κανείς από την 4.1.45 ότι θα ισχύει

$$F(n\omega_0) = \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.1.46)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η $\bar{F}(n\omega_0)$ υπολογίζεται για $n = 0, \dots, N-1$. Οι προσεγγίσεις όμως $F(n\omega_0)$ θα πρέπει να εκτείνονται και στο αρνητικό φάσμα των συχνοτήτων. Για τον λόγο αυτό και λόγω συμμετρικότητας χρησιμοποιούνται οι τιμές που έχουν υπολογιστεί για $n > N/2$ για να υπολογιστούν οι τιμές για $n < 0$ ως εξής :

$$F(n\omega_0) = \begin{cases} \bar{F}(n\omega_0) & \text{για } 0 \leq n \leq \frac{N}{2} \\ \bar{F}(N\omega_0 + n\omega_0) & \text{για } |n| < \frac{N}{2} \end{cases} \quad (4.1.47)$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι το εύρος συχνοτήτων που μας δίνει ο μετασχηματισμός για την $F(n\omega_0)$ είναι $\omega_1 = 2\pi / T_1 = N\omega_0$. Δείτε σχετικά και το σχήμα 4.7.

Στην περίπτωση που το πραγματικό εύρος συχνοτήτων του σήματος είναι μεγαλύτερο από το σ (θετικές τιμές) υπάρχει λάθος προσέγγισης (*Aliasing Error*), ενώ παράλληλα δεν υπολογίζεται όλο το φάσμα συχνοτήτων του σήματος. Προσέξτε ότι το ω_1 προήλθε από τις επιλογές μας : $T_1 = T / N$.

2. Για να μειωθεί το λάθος προσέγγισης της $F(\omega)$ θα πρέπει να αυξηθεί το ω_1 . Δηλαδή να αυξηθεί σημαντικά το εύρος συχνοτήτων που μας δίνει ο μετασχηματισμός ώστε κατά το δυνατόν να καλύπτει όλο το εύρος των «ενεργών» συχνοτήτων του σήματος. Για N σταθερό, η αύξηση του ω_1 συνεπάγεται μείωση του T . Αυτό σημαίνει ότι θα θεωρήσουμε ένα περιοδικό σήμα στο πεδίο του χρόνου με περίοδο που δεν «φτάνει» για να περιγράψει πλήρως την ωφέλιμη χρονοσειρά. Ο μετασχηματισμός μπορεί και πάλι να μας δώσει τις τιμές δειγματοληψίας της $\bar{f}(nT_1)$ που όμως δεν είναι πλέον ίσες με τις τιμές της $f(nT_1)$ (Σχήμα 4.6β). Με άλλα λόγια, τα $\bar{f}(nT_1)$ υπολογίζονται ακριβώς, αλλά όχι τα $f(nT_1)$ και συνεπώς παραμένει λάθος προσέγγισης. Επί πλέον η ανάλυση του σήματος στο πεδίο συχνοτήτων δεν θα είναι η καλύτερη δυνατή αφού για σταθερό N , μεγάλο ω_1 σημαίνει και μεγάλο ω_0 (συχνότητα δειγματοληψίας στο πεδίο των συχνοτήτων).

3. Για να αυξηθεί η ανάλυση (resolution) στο πεδίο των συχνοτήτων θα πρέπει να μειωθεί το ω_0 . Αυτό σημαίνει αύξηση του T και κατά το δυνατόν επιλογή του $T > a$ (Σχήμα 4.6). Τότε οι τιμές των δειγμάτων της $f(nT_1)$ θα είναι ίσες με εκείνες της $\bar{f}(nT_1)$ για n τέτοιο ώστε να ισχύει $nT_1 < a$. Για τις υπόλοιπες τιμές, είναι μηδέν. Ωστόσο, επειδή στην περίπτωση αυτή το ω_1 μειώνεται ($\omega_1 = N\omega_0$), το λάθος προσέγγισης της $F(\omega)$ θα αυξηθεί. Για να παραμείνει σε λογικά επίπεδα θα πρέπει να ισχύει και $\omega_1 > 2\sigma$. Αυτό μας οδηγεί και στο θεώρημα της δειγματοληψίας των Shannon- Nyquist που ορίζει ότι όταν το εύρος συχνοτήτων ενός σήματος έχει μέγιστη συχνότητα f_σ (αντίστοιχη κυκλική συχνότητα σ), η συχνότητα δειγματοληψίας του σήματος θα πρέπει να είναι $T_1 = \frac{1}{2f_\sigma} = \frac{\pi}{\sigma}$ για μια ορθή

αναπαραγωγή του σήματος στο πεδίο του χρόνου. Με άλλα λόγια το σήμα μπορεί να αναπαραχθεί σωστά εάν δειγματοληφθεί με τη συγκεκριμένη συχνότητα τουλάχιστον.

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, η ψηφιακή επεξεργασία σήματος περιλαμβάνει πολλές παραμέτρους που θα πρέπει να υπολογιστούν με αντικρουόμενα κριτήρια. Επίσης θα πρέπει να υπάρχει μια κατ' αρχήν εκτίμηση για το συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος και για την ενεργό του διάρκεια. Είναι σημαντικό λοιπόν να καθορισθούν οι ανάγκες της επεξεργασίας μας με βάση τα πραγματικά δεδομένα του σήματος (διάρκεια, εύρος συχνοτήτων, ανάλυση) ώστε να επιτευχθεί ο μέγιστος βαθμός ακρίβειας. Περισσότερη συζήτηση για θέματα επεξεργασίας σημάτων ξεφεύγει από τον σκοπό των σημειώσεων και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται σε πλέον ειδικά βιβλία (π.χ. Papoulis).

4.2 Φίλτρα και θόρυβος.

Για να συζητήσουμε τα φίλτρα και τη λήψη σημάτων σε περιβάλλον θορύβου, χρειάζεται να γίνει μία μικρή εισαγωγή, σε ό,τι αφορά την έννοια του συστήματος. Δεν θα επεκταθούμε όμως σε πολλές λεπτομέρειες καθώς αυτές ξεφεύγουν από το περιεχόμενο του μαθήματος. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες μπορούν να ανατρέξουν σε ειδικά εγχειρίδια, όπως του Papoulis (Signal Analysis).

4.2.1 Συστήματα

Ένα «σύστημα» χαρακτηρίζεται από έναν κανόνα L που εάν πάρει ως δεδομένη μία συνάρτηση f , την μετασχηματίζει σε μία άλλη g . Γράφουμε επομένως

$$g = L(f) \quad (4.2.1)$$

Ένα σύστημα είναι «διακριτό» εάν ο κανόνας μετασχηματίζει μία ακολουθία f_n σε μία ακολουθία g_n

$$g_n = L(f_n) \quad (4.2.2)$$

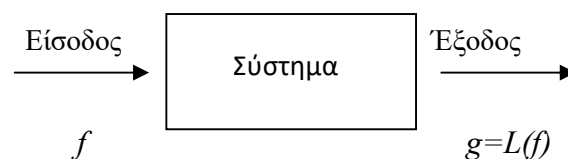
Η ακολουθία f_n ονομάζεται **είσοδος** και η ακολουθία g_n ονομάζεται **έξοδος** του συστήματος.

Εάν επί πλέον η σχέση L είναι γραμμική, δηλαδή εάν ισχύει

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 L(f_1) + a_2 L(f_2) \quad (4.2.3)$$

για τυχαία a_1, a_2, f_1, f_2 , τότε το σύστημα ονομάζεται «γραμμικό».

Ο συμβολισμός του συστήματος έχει τη μορφή



4.2.2 Φίλτρα

Τα φίλτρα είναι **γραμμικά** συστήματα που μετασχηματίζουν ένα σήμα είτε αναλογικό είτε ψηφιακό σε κάποιο άλλο, με χαρακτηριστικά που εξαρτώνται από τον κανόνα L .

Η χρήση των φίλτρων είναι προφανής. Στις μετρήσεις ενός ακουστικού σήματος υπεισέρχονται πάντα ανεπιθύμητες συνιστώσες που χαρακτηρίζονται συνήθως ως «θόρυβος». Επιθυμούμε να πάρουμε σήμα στην έξοδο του μετρητικού συστήματος με δεδομένα χαρακτηριστικά και αυτό μπορεί να γίνει με κατάλληλη σχεδίαση του φίλτρου δηλαδή με κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης που χαρακτηρίζει τον κανόνα L , ώστε να τονίζονται τα χαρακτηριστικά του επιθυμητού σήματος και να υποβαθμίζονται αντίστοιχα τα χαρακτηριστικά του θορύβου. Μάλιστα, σύμφωνα με τον Papoulis, φίλτρο είναι ένα σύστημα του οποίου η έξοδος είναι μηδενική έξω από μία συγκεκριμένη περιοχή B του πεδίου των συχνοτήτων. Ο συγκεκριμένος ορισμός τονίζει τη σημασία των φίλτρων για την παραγωγή σημάτων απαλλαγμένων από τις ανεπιθύμητες συχνότητες.

Με δεδομένο ότι τα σήματα είναι συναρτήσεις ή ακολουθίες που δίδονται στο πεδίο του χρόνου ή των συχνοτήτων, ο κανόνας L εκφράζεται και αυτός αναλόγως και μάλιστα οι δύο εκφράσεις αποτελούν ζεύγη μετασχηματισμού Fourier. Συνήθως συμβολίζουμε τον κανόνα L με $H(f)$ στο πεδίο των συχνοτήτων και με $h(t)$ στο πεδίο του χρόνου. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την συχνότητα (f) παράλληλα με την κυκλική συχνότητα (ω) ως το όρισμα στο πεδίο συχνοτήτων. Ο λόγος είναι ότι οι περισσότερες αναφορές στο πρόβλημά μας έχουν ως μεταβλητή την συχνότητα. Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να γραφεί και για την περίπτωση της συχνότητας με απλή αλλαγή μεταβλητής από ω σε f

$$h(t) \leftrightarrow H(f) \quad (4.2.4)$$

Οι συναρτήσεις H και h ονομάζονται αντίστοιχα «**συναρτήσεις μεταφοράς**» (*transfer function*) και «**συνάρτηση απόκρισης παλμού**» (*impulse response function*) αντίστοιχα.

Ως είσοδος στο φίλτρο δίδεται ένα σήμα με ζεύγος Fourier

$$f(t) \leftrightarrow F(f) \quad (4.2.5)$$

Επειδή η σύνθεση στο πεδίο των συχνοτήτων είναι άμεση, προτιμάμε να ξεκινάμε την ανάλυσή μας σ' αυτό το πεδίο. Έτσι η έξοδος του φίλτρου θα είναι

$$G(f) = F(f)H(f) \quad (4.2.6)$$

Η χρονική εξάρτηση του σήματος εξόδου προκύπτει από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και είναι

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{i2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} F(f)H(f)e^{i2\pi ft} df \quad (4.2.7)$$

Το σήμα αυτό μπορεί να προκύψει από τον υπολογισμό της συνέλιξης των f και h στο πεδίο του χρόνου.

$$g(t) = f(t) * h(t) \quad (4.2.8)$$

Αξίζει ακόμη να πούμε ότι η εν σειρά σύνθεση φίλτρων ακολουθεί αντίστοιχους κανόνες. Δηλαδή, εάν δουλεύουμε στο πεδίο των συχνοτήτων, οι συναρτήσεις που χαρακτηρίζουν τα φίλτρα (αποκρίσεις) πολλαπλασιάζονται, ενώ στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται η συνέλιξη. Έτσι, για δύο φίλτρα αποκρίσεων

$$h_1(t) \leftrightarrow H_1(f) \quad h_2(t) \leftrightarrow H_2(f) \quad (4.2.9)$$

η σύνθεση δίδει

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad H(f) = H_1(f)H_2(f) \quad (4.2.10)$$

Στο σχήμα 4.8 βλέπουμε μερικές χαρακτηριστικές μορφές που παίρνει η συνάρτηση μεταφοράς (μέτρο) ιδανικών φίλτρων στο πεδίο των συχνοτήτων (χρησιμοποιούμε ξανά κυκλική συχνότητα).

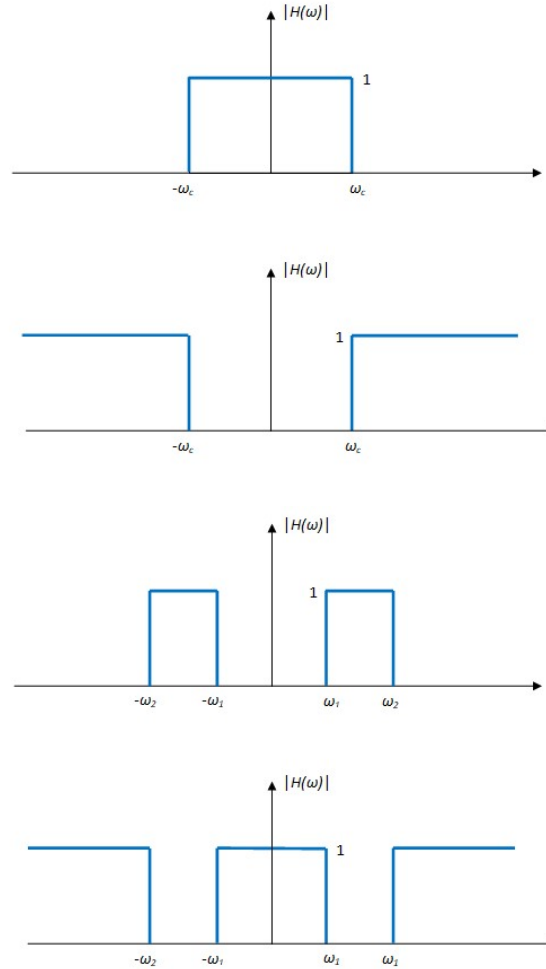
Το πρώτο φίλτρο **χαμηλοπερατό** (*low pass*) αφήνει να περνούν οι χαμηλές συχνότητες ενώ κόβει τις υψηλές. Το δεύτερο **υψηλοπερατό** (*high pass*) αφήνει να περνούν οι υψηλές συχνότητες. Το τρίτο φίλτρο **ζωνοπερατό** (*band pass*) είναι σχεδιασμένο για να περνούν ενδιάμεσες συχνότητες, ενώ το τέταρτο που χαρακτηρίζεται **ζωνοφρακτό** (*band stop*) αποκόπτει ενδιάμεσες συχνότητες. Προσέξτε ότι τα φίλτρα αυτά δεν μεταβάλλουν το πλάτος του σήματος στο πεδίο των συχνοτήτων, ενώ λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier, οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι άρτιες ενώ εμφανίζονται στο σχήμα και οι αρνητικές συχνότητες.

Σε πολλές εφαρμογές το μέγεθος που ενδιαφέρει έχει ενεργειακό περιεχόμενο και με την έννοια αυτή προτιμάται η αναφορά μας στην μέση τετραγωνική έξοδο ενός φίλτρου που ορίζεται από τη σχέση

$$I_{hh} = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \quad (4.2.11)$$

Το μέγεθος αυτό είναι το ίδιο εάν ολοκληρώσουμε το φάσμα του σήματος (μέτρο) στο πεδίο των συχνοτήτων (βλ. Ενεργειακό θεώρημα, σχέση 4.1.12 με την παρατήρηση ότι $\omega = 2\pi f$). Παίρνομε έτσι:

$$I_{hh} = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |F(f)|^2 |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |F(f)|^2 |H(f)|^2 df \quad (4.2.12)$$



Σχήμα 4.8 Μερικές χαρακτηριστικές κατηγορίες ιδανικών φίλτρων.

Μπορούμε ακόμη να αντικαταστήσουμε το τετράγωνο του μέτρου του σήματος με μία μέση τιμή (εάν το εύρος του σήματος είναι σχετικά μικρό) $\langle |F(f)|^2 \rangle$ και να γράψουμε το ολοκλήρωμα 4.2.12 ως

$$I_{hh} = 2 \langle |F(f)|^2 \rangle \int_0^\infty |H(f)|^2 df \quad (4.2.13)$$

4.2.3 Θόρυβος

Ο θόρυβος είναι μία υπέρθεση τυχαίων σημάτων που διαδίδονται σε ένα ακουστικό μέσον και δεν έχουν σχέση με την επιθυμητή εκπομπή ήχου από κάποια πηγή. Στο θόρυβο πολλές φορές προσμετράμε τον ηλεκτρονικό θόρυβο. Στη θάλασσα ο θόρυβος προέρχεται από το σπάσιμο των επιφανειακών κυμάτων, από τα πλοία που πλέουν στη θάλασσα, από ψάρια, από τη βροχή, από σεισμικά κύματα και πολλές άλλες αιτίες. Η διάρκεια ενός τυχαίου σήματος όπως αυτό του θορύβου είναι μεγάλη (στην πραγματικότητα άπειρη) αλλά θα πρέπει να μπορούμε να εκφράσουμε ενεργειακά το σχετικό μέγεθος. Έτσι, προχωράμε σε μετρήσεις του σήματος

πεπερασμένης διάρκειας T και υπολογίζουμε μέσα τετραγωνικά μεγέθη του δείγματος μέσα σε αυτή τη χρονική διάρκεια. Έτσι, εάν συμβολίσουμε τη μέτρηση (δείγμα) με $n(t)$, η μέση τετραγωνική του τιμή είναι

$$\langle |n(t)|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |n(t)|^2 dt \quad (4.2.14)$$

όπου ο χρόνος T είναι πολύ μεγαλύτερος από την περίοδο της χαμηλότερης σημαντικής συχνότητας που αναμένουμε στο φάσμα του θορύβου. Για παράδειγμα, εάν θεωρήσουμε ως ελάχιστη συχνότητα τα 20 Hz (όριο ακουστότητας στον αέρα) η διάρκεια του δείγματος πρέπει να είναι μεγαλύτερη από 1/20 sec που είναι η περίοδος της ελάχιστης αυτής συχνότητας.

Το σήμα του θορύβου $n(t)$ έχει μετασχηματισμό Fourier που τον συμβολίζουμε με $S(f)$. Εάν χρησιμοποιηθεί φίλτρο $H(f)$ για την καταγραφή του θορύβου, στην έξοδό του θα έχουμε φασματικό περιεχόμενο $S(f)H(f)$. Από το ενεργειακό θεώρημα που έχουμε συναντήσει και τις σχέσεις 4.2.11 και 4.2.12, για την έξοδο του φίλτρου $g_n(t)$ θα μπορούσαμε να γράψουμε μία σχέση της μορφής :

$$\langle |g_n(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G_n(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 |H(f)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |S(f)|^2 |H(f)|^2 df \quad (4.2.15)$$

Συνήθως το μέγεθος $|S(f)|^2$ το συμβολίζουμε με $S_{nn}(f)$ και ονομάζεται **φασματική πυκνότητα** (*spectral density*) του θορύβου. Έχει μονάδες pascals στο τετράγωνο ανά μονάδα συχνότητας (Pa^2/Hz). Αντίστοιχες μονάδες έχει βέβαια και το μέγεθος $|H(f)|^2$ καθώς και το $|S(f)|^2$. Η ανωτέρω σχέση 4.2.15 γράφεται :

$$\langle |g_n(t)|^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} S_{nn}(f) |H(f)|^2 df = \quad (4.2.15\alpha)$$

Πολλές φορές, το αριθμητικό μέγεθος που εμφανίζεται στις αναφορές στα φασματικά επίπεδα θορύβου συμβολίζεται με $P_{nn}(f)$ και αναφέρεται στο διπλάσιο της φασματικής πυκνότητας (αναφορά μόνο σε θετικές συχνότητες) :

$$P_{nn}(f) = 2S_{nn}(f)$$

Οι μετρήσεις του θορύβου αναφέρονται συνήθως και στο μέγεθος **φασματικό επίπεδο** (*spectrum level*) σε dB re p_{ref} / Hz (συνήθως $p_{ref} = 1\mu\text{Pa}^2/\text{Hz}$) με βάση τη σχέση

$$\text{Φασματικό επίπεδο} \equiv 10 \log_{10} \left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] \text{ dB re } p_{ref} / \text{Hz} \quad (4.2.16)$$

Ολοκληρώνοντας το φασματικό επίπεδο σε όλο το φάσμα του θορύβου (περιοχή συχνοτήτων) παίρνομε το **Επίπεδο Θορύβου** (*Noise Level-NL*) που συναντήσαμε στο κεφάλαιο που αφορούσε την εξίσωση Sonar.

Προσέξτε ότι η ολοκλήρωση γίνεται σε λογαριθμική κλίμακα, για να προκύψει το επίπεδο θορύβου. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του ότι για να υπολογιστεί το επίπεδο θορύβου θα πρέπει πρώτα να ολοκληρωθεί στην ενεργό περιοχή συχνοτήτων η φασματική πυκνότητα. Έτσι, εάν π.χ. είχαμε σταθερό φασματικό επίπεδο N σε ένα εύρος συχνοτήτων B , το Επίπεδο Θορύβου θα ήταν

$$NL = N + 10 \log_{10} B \quad \text{dB re } 1 \mu\text{Pa} \quad (4.2.17)$$

Αναλύουμε το ως άνω αποτέλεσμα για να γίνει περισσότερο αντιληπτό : Από τον ορισμό του φασματικού επιπέδου έχουμε :

$$N = 10 \log_{10} \left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] \quad (4.2.16a)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] = 10^{\frac{N}{10}}$ για $f \in B$. Ολοκληρώνοντας

την φασματική πυκνότητα στην περιοχή συχνοτήτων B θα πάρουμε :

$$B \times \left[\frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] = B \times 10^{\frac{N}{10}} \quad (4.2.18)$$

που αντιπροσωπεύει το ενεργειακό περιεχόμενο του θορύβου στην ενεργό περιοχή συχνοτήτων.

Επομένως, το επίπεδο θορύβου θα είναι :

$$NL = 10 \log_{10} \left[B \times \frac{2S_{nn}(f)}{|p_{ref}|^2} \right] \quad \text{dB} = 10 \log_{10} (B \times 10^{\frac{N}{10}}) = N + 10 \log_{10} B$$

Δοθέντος τώρα ενός σήματος που η φασματική του ανάλυση μας δίδει το μέγεθος $F(f)$ (μέτρηση στο πεδίο των συχνοτήτων), ως **Λόγο Σήματος προς Θόρυβο** (*Signal to Noise Ratio*) ορίζουμε το πηλίκο των αντίστοιχων φασματικών μεγεθών :

$$S / N = \frac{|F(f)|^2}{S_{nn}(f)} \quad (4.2.19)$$

και εκφρασμένο σε μονάδες dB

$$S / N \text{ (dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{|F(f)|^2}{S_{nn}(f)} \right) \quad (4.2.20)$$

4.2.4 Ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος

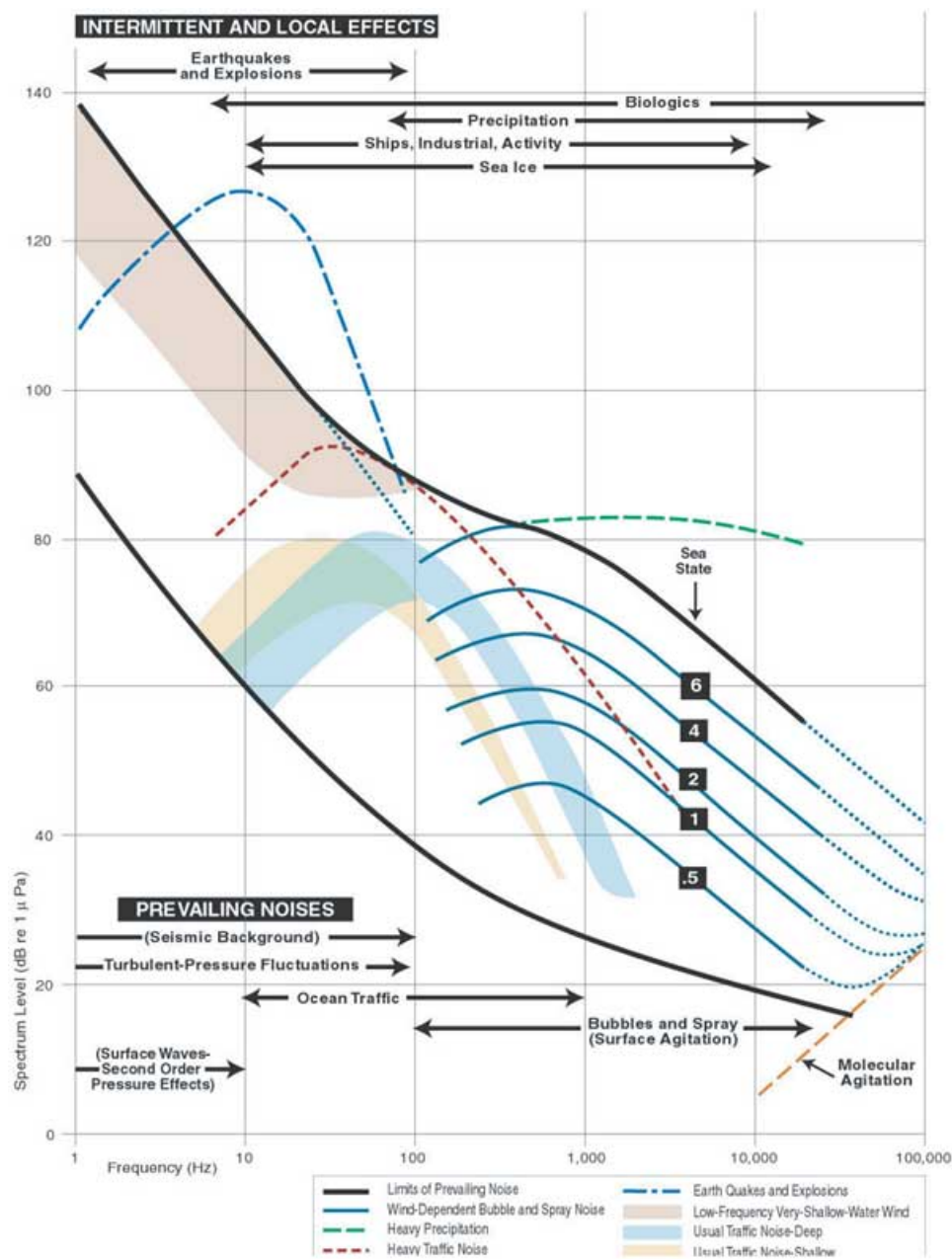
Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος (Ambient Noise) οφείλεται σε διάφορους μηχανισμούς που τον παράγουν στη θάλασσα.

Στις χαμηλές συχνότητες η βασική αιτία είναι η σεισμική δραστηριότητα (υποθαλάσσια) που προκαλεί ήχους με μεγάλες περιόδους και φυσικά μικρές συχνότητες. Καθώς ανεβαίνουμε συχνότητα, ο θόρυβος από τη μηχανολογική εγκατάσταση των πλοίων και κυρίως την έλικα κυριαρχεί και είναι η βασική πηγή θορύβου ανάμεσα στα 10 Hz και στα 500 Hz. Ο θόρυβος αυτός χαρακτηρίζεται ως *θόρυβος ναυσιπλοΐας (traffic noise)*. Στη συνέχεια επικρατεί ο θόρυβος από το σπάσιμο των επιφανειακών κυμάτων, και επομένως ο θόρυβος μπορεί να συσχετισθεί με το ύψος κύματος ή με την ταχύτητα του επιφανειακού ανέμου ή με την κατάσταση της θάλασσας που φυσικά είναι αλληλοσχετιζόμενα μεγέθη. Ο θόρυβος αυτός είναι σημαντικός μέχρι και το άνω όριο των ακουστικών συχνοτήτων (20 kHz). Σημαντικές πηγές που συνθέτουν το θόρυβο του θαλάσσιου περιβάλλοντος είναι οι προερχόμενες από βιολογικούς οργανισμούς (θαλάσσια θηλαστικά αλλά και μικρότερα θαλασσινά όπως π.χ. γαρίδες). Το θόρυβο του θαλάσσιου περιβάλλοντος συμπληρώνουν παροδικές πηγές ανθρωπογενούς προέλευσης (π.χ. σεισμικές μετρήσεις, διαδικασίες αγκύρωσης εγκαταστάσεων, διασκοπήσεις βυθού, εφαρμογές που σχετίζονται με πολεμικά ναυτικά κ.λ.π.) και άλλες μικρότερης σημασίας φυσικές πηγές. Πάντως πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στη χρήση του όρου «θόρυβος» καθώς στο μυαλό μας έχουμε το θόρυβο ως «ανεπιθύμητη» ακουστική συνιστώσα, ενώ στην πραγματικότητα ο θόρυβος του θαλάσσιου περιβάλλοντος αποτελεί συστατικό του *θαλάσσιου ηχοτοπίου (marine soundscape)*. Για τις περισσότερες εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας ωστόσο που επιβάλουν λήψη ενός επιθυμητού σήματος χωρίς την παρουσία ετερογενών ακουστικών συνιστωσών, οι ήχοι που συνθέτουν το θαλάσσιο περιβάλλον (φυσικοί ή ανθρωπογενείς) θεωρούνται ως «θόρυβος».

Από μετρήσεις και στατιστική επεξεργασία έχουν προέλθει διαγράμματα που δίνουν το φασματικό επίπεδο του θορύβου του θαλάσσιου περιβάλλοντος συναρτήσει της συχνότητας και έχουν τη μορφή του Σχήματος 4.9. Το σχήμα παρουσιάζει το κλασσικό διάγραμμα του Wenz, που εδώ αναπαράγεται σε προσαρμογή από την δημοσίευση στο Journal of the Acoustical Society of America.

Είναι αυτονόητο ότι η χρήση σημάτων και φίλτρων σε μία εφαρμογή ακουστικής ωκεανογραφίας εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό και από το επίπεδο θορύβου και τη φασματική του κατανομή.

Τονίζουμε τέλος ότι ο θόρυβος μπαίνει στην εξίσωση SONAR με μονάδες dB/re p_{ref} εάν το φασματικό του επίπεδο ολοκληρωθεί σε όλη την περιοχή των συχνοτήτων που τον συνθέτουν.



Σχήμα 4.9 Φασματικά επίπεδα θορύβου θαλάσσιου περιβάλλοντος

(Πρωτότυπο: Wenz, GM. 1962 "Acoustic Ambient Noise in the Ocean: Spectra and Sources."
Journal of the Acoustic Society of America 34:1936-1956.

4.3 Συσχέτιση ακουστικών σημάτων

4.3.1 Διακριτά σήματα

Η ανίχνευση ακουστικών σημάτων σε περιβάλλον θορύβου γίνεται με χρήση κατάλληλων τεχνικών μέσω των οποίων «συγκρίνεται» το σήμα που μας ενδιαφέρει και το οποίο κατά κανόνα έχει γνωστή μορφή με μία σειρά καταγραφών που ενδέχεται να περιέχουν το σήμα μας. Η σύγκριση υλοποιείται μαθηματικά μέσω μιας κατάλληλης συνάρτησης που ονομάζεται συνάρτηση συσχέτισης, η οποία για ψηφιακή επεξεργασία ορίζεται ως κατωτέρω :

Έστω δύο σήματα $y(t)$ και $x(t)$ τα οποία έχουν καταγραφεί σε ένα δέκτη ως ακολουθίες διακριτών καταγραφών x_n και y_n , $n=0,1, 2, \dots, N-1$. Ορίζουμε τις μέσες τιμές των καταγραφών από τις σχέσεις :

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \quad \text{και} \quad \langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \quad (4.3.1)$$

Για να απλουστεύσουμε την ανάλυση θα υποθέσουμε ότι οι μέσες τιμές των καταγραφών είναι 0. Εάν δεν ισχύει κάτι τέτοιο στην πραγματικότητα υπάρχει πάντα η δυνατότητα αφαίρεσης από όλα τα σήματα της μέσης τιμής ώστε να έχουμε ξανά μέση τιμή 0.

Μας ενδιαφέρουν επίσης οι μέσες τετραγωνικές τιμές των σημάτων που είναι

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^2 \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 \quad (4.3.2)$$

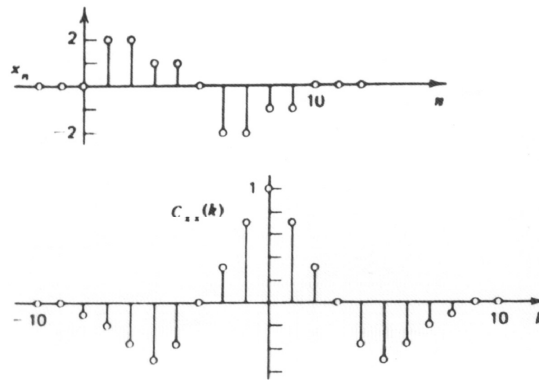
Θα υποθέσουμε ότι η ακολουθία y_n μεταφέρεται k βήματα σχετικά με την x_n και γίνεται y_{n+k} χωρίς να αλλάζουν οι μέσες τιμές.

Ορίζουμε μέσω της επόμενης σχέσης το βαθμό «συσχέτισης» των δύο σημάτων:

$$e^2(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[(C_{xy}(k) \frac{x_n}{\sigma_x} - \frac{y_{n+k}}{\sigma_y}) \right]^2 \quad (4.3.3)$$

Τα μεγέθη σύμφωνα με τον ως άνω ορισμό είναι αδιάστατα. Ο συντελεστής $C_{xy}(k)$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε το μέγεθος $e^2(k)$ να γίνει ελάχιστο. Έτσι ο συντελεστής αυτός μπορεί τελικά να αποτελέσει το μέτρο της συσχέτισης των δύο σημάτων μεταξύ τους. Θεωρώντας το μέγεθος $e^2(k)$ ως συνεχή συνάρτηση του $C_{xy}(k)$, παραγωγίζοντας την 4.3.3 ως προς $C_{xy}(k)$ και θέτοντας το αποτέλεσμα ίσο με 0 παίρνουμε :

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{n+k} \quad (4.3.4)$$



Σχήμα 4.10 Το διακριτό σήμα x_n και η συνάρτηση αυτοσυσχέτισής του.

Ο συντελεστής $C_{xy}(k)$ είναι με τη σειρά του μία συνάρτηση του k και ονομάζεται «**Συνάρτηση Συσχέτισης**» (*correlation function*). Όπως είναι ορισμένη, έχει πεδίο τιμών ανάμεσα στο 1 και στο -1 . Μηδενική τιμή σημαίνει σήματα που δεν έχουν σχέση μεταξύ τους (ασυσχέτιστα). Εάν τα σήματα είναι ίδια σε μορφή αλλά το ένα παρουσιάζει μία μετάθεση σε σχέση με το άλλο, η τιμή του k για την οποία η συνάρτηση συσχέτισης παίρνει τη μέγιστη τιμή, μας προσδιορίζει την μετάθεση των δύο σημάτων.

Εάν τα σήματα είναι μιγαδικά, η συνάρτηση συσχέτισης παίρνει τη μορφή

$$C_{xy}(k) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* y_{n+k} \quad (4.3.5)$$

όπου x_n^* συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή.

Ως «**Συνάρτηση συνδιακύμανσης**» (*covariance function*) ορίζουμε την ποσότητα

$$\text{cov}[x, y(k)] \equiv \sigma_x \sigma_y C_{xy}(k) = \langle x^* y(k) \rangle \quad (4.3.6)$$

Εάν τα σήματα x και y είναι ίδια, τότε η συνάρτηση C_{xx} χαρακτηρίζεται «**Συνάρτηση Αυτοσυσχέτισης**» (*Autocorrelation function*).

Ως παράδειγμα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, μπορεί κανείς να ανατρέξει στο σχήμα 4.10 που παρουσιάζει ένα ψηφιακό σήμα x_n και την αντίστοιχη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης είναι συμμετρική ως προς k .

4.3.2 Ολοκληρωτικές εκφράσεις

Οι ανωτέρω εκφράσεις και έννοιες μπορούν να διατυπωθούν για συνεχή (αναλογικά) σήματα με αντίστοιχο τρόπο. Για ένα σήμα $x(t)$ διάρκειας T του οποίου η δειγματοληψία γίνεται με N δείγματα, η αντιστοιχία των διακριτών καταγραφών του που παρουσιάστηκαν ανωτέρω με τα αναλογικά σήματα είναι

$$x_n = x(n\Delta t) \quad (4.3.7)$$

όπου Δt είναι ο χρόνος ανάμεσα στη λήψη των δειγμάτων (αντίστροφος της συχνότητας δειγματοληψίας (sampling frequency) και $\Delta t = T/N$.

Εάν ο χρόνος λήψης του δείγματος n είναι $t_n = n\Delta t$ τότε προφανώς

$$x_n = x(t_n) \quad (4.3.8)$$

Εάν θεωρήσουμε ένα δεύτερο σήμα $y(t)$ με αντιστοιχία $y_n = y(t_n)$ και μετακινήσουμε χρονικά την καταγραφή ενός δεύτερου σήματος κατά χρόνο $\tau = k\Delta t$ θα πάρουμε μία ακολουθία δειγμάτων

$$y_{n+k} = y(t_n + \tau) \quad (4.3.9)$$

Έτσι παίρνουμε μια αντιστοιχία διακριτών δειγμάτων με συνεχή σήματα της μορφής :

$$x_n \rightarrow x(t), \quad y_{n+k} \rightarrow y(t + \tau)$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιώντας τις 4.3.5 και 4.3.6 η συνάρτηση συνδιακύμανσης γράφεται

$$\text{cov}[x, y(\tau)] = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T x^*(t) y(t + \tau) \Delta t \quad (4.3.10)$$

και παίρνοντας το όριο για $\Delta t \rightarrow dt$ έχουμε

$$\text{cov}[x, y(\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T x^*(t) y(t + \tau) dt = \langle x^*(t) y(t + \tau) \rangle \quad (4.3.11)$$

Αντίστοιχα οι μέσες τετραγωνικές τιμές εκφράζονται από τις επόμενες σχέσεις

$$\sigma_x^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad \text{και} \quad \sigma_y^2 \equiv \frac{1}{T} \int_0^T |y(t)|^2 dt \quad (4.3.12)$$

Η συνάρτηση συσχέτισης είναι

$$C_{xy}(\tau) = \frac{\text{cov}[x, y(\tau)]}{\sigma_x \sigma_y} \quad (4.3.13)$$

Σε ό,τι αφορά τα όρια ολοκλήρωσης, αυτά μπορεί να είναι αυθαίρετα, αλλά συμβατά με τα πραγματικά χαρακτηριστικά του σήματος. Συχνά θεωρούμε τα όρια από $-T/2$ έως $T/2$

Εάν σ_x^2 και σ_y^2 είναι διάφορα του μηδενός για $T \rightarrow \infty$ (π.χ. περίπτωση περιοδικών σημάτων) και λαμβάνοντας υπ'όψιν την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να γράψουμε :

$$\sigma_x \sigma_y C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt \right) \quad (4.3.14)$$

Για σήματα των οποίων οι μέσες τετραγωνικές τιμές τείνουν στο 0 για $T \rightarrow \infty$, οι αντίστοιχες εκφράσεις είναι :

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{(I_{xx} I_{yy})^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt \quad (4.3.15)$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{I_{xx}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (4.3.16)$$

όπου

$$I_{xx} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.3.17)$$

$$I_{yy} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt \quad (4.3.18)$$

ΑΣΚΗΣΗ

Υπολογίστε τη συνάρτηση συσχέτισης δύο σημάτων που περιγράφονται από τις εκθετικές συναρτήσεις $x = \exp(2i\pi f_1 t)$ και $y = \exp(2i\pi f_2 t)$. Θεωρείστε διαφορετικές τις συχνότητες f_1 και f_2 .

4.3.3 Σήματα και θόρυβος

Η συνάρτηση συσχέτισης είναι ένα εργαλείο για να μπορεί κανείς να ανιχνεύει σήματα σε περιβάλλον θορύβου, όταν γνωρίζει τα χαρακτηριστικά της εκπεμπόμενης κυματομορφής. Θα δούμε εδώ ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής που αναφέρεται σε σήμα που έχει ληφθεί μετά από ανάκλαση σε κάποια επιφάνεια. Ας

θεωρήσουμε ότι το εκπεμπόμενο σήμα είναι της μορφής $x(t)$ ενώ το σήμα που λαμβάνεται μετά από ανάκλαση και χρόνο T είναι $x(t-T)$. Οτιδήποτε άλλο φτάνει στον δέκτη θεωρείται ανεπιθύμητο και χαρακτηρίζεται θόρυβος. Ο συμβολισμός του θορύβου θα είναι $n(t)$.

Στο δέκτη καταγράφεται το άθροισμα του ανακλώμενου σήματος και του θορύβου

$$a(t) = x(t-T) + n(t) \quad (4.3.19)$$

που για δειγματοληψία σε χρονικά διαστήματα που απέχουν Δt μεταξύ τους γράφεται

$$a_n = x_{n-j} + n_n \quad (4.3.20)$$

όπου $t = n\Delta t$ και $T = j\Delta t$.

Η συνδιακύμανση του x (καθαρό σήμα) και του a (σήμα με θόρυβο) δίδεται από τη σχέση

$$\sigma_x \sigma_a C_{xa}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n^* (x_{n-j+k} + n_{n+k}) \quad (4.3.21)$$

με $\sigma_a^2 \approx \sigma_x^2 + \sigma_n^2$ για $|C_{xn}(k)| \ll 1$, ενώ η συνάρτηση συσχέτισης είναι

$$C_{xa}(k) = \frac{\sigma_x}{\sigma_a} C_{xx}(k-j) + \frac{\sigma_n}{\sigma_a} C_{xn}(k) \quad (4.3.22)$$

όπου $C_{xx}(k-j)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή για $k=j$. Όταν $C_{xn}(k)$ είναι μηδέν (σήμα ασυσχέτιστο με το θόρυβο), $C_{xa}(k)$ έχει μέγιστη τιμή για $k=j$ και $T=j\Delta t$. Ωστόσο, ακόμη και αν σήμα και θόρυβος είναι ασυσχέτιστα, μερικά δείγματα του θορύβου δίδουν μη μηδενικές τιμές στη συνάρτηση $C_{xn}(k)$. Αυτό δημιουργεί ταλαντώσεις στις μετρούμενες τιμές της συνάρτησης $C_{xa}(k)$. Όταν οι ταλαντώσεις είναι πολύ μικρότερες από την τιμή σ_x/σ_a , η συνάρτηση συσχέτισης $C_{xa}(k)$ έχει κορυφή στο T και το σήμα αναγνωρίζεται σε περιβάλλον θορύβου.

