

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. Σύνθεση αρμονικών πηγών

Θα θεωρήσουμε κατ' αρχήν αρμονικές πηγές. Αυτό σημαίνει ότι η ακουστικές διαταραχές για κάθε συνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση του μέσου (ταχύτητα στοιχειωδών σωματισίων, πίεση, πυκνότητα) μεταβάλλονται σε συγκεκριμένη θέση με τη μορφή συνάρτησης ημιτόνου ή συνημιτόνου. Οι πηγές αυτές χαρακτηρίζονται «**πηγές συνεχούς κύματος**» ή “*Continuous Wave sources*” και συμβολίζονται με CW. Όπως έχουμε δει και στα κεφάλαια του μαθήματος οι ακουστικές διαταραχές για αρμονικές πηγές διδίδονται με τη μορφή κυμάτων τη χωρική και τη χρονική εξάρτηση των οποίων την έχουμε περιγράψει μέσω εκθετικών συναρτήσεων που μπορούν να αποδοθούν με ημιτονοειδείς ή συνημιτονοειδείς συναρτήσεις, των οποίων το πλάτος μεταβάλλεται με την απόσταση με την απλούστερη μορφή να είναι εκείνη που αφορά στη σφαιρική διάδοση (σημειακή πηγή σε άπειρο χώρο) όπου το μέτωπο κύματος είναι σφαίρα ακτίνας όση και η απόσταση στην οποία μετράται η διαταραχή που βέβαια αυξάνει με την διάδοση του κύματος, με επακόλουθο η ενέργεια να κατανέμεται σε μεγαλύτερο όγκο και να μειώνεται η ένταση και φυσικά το πλάτος ταλάντωσης σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας.

Να υπενθυμίσουμε εδώ ότι το μήκος κύματος είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές κορυφές ή κοιλάδες του ημιτονοειδούς σήματος, παραμένει σταθερό, συμβολίζεται δε με λ . Ο χρόνος που μεσολαβεί ώστε το κύμα σε δεδομένη θέση να φτάσει σε διαδοχική κορυφή ή κοιλάδα είναι η περίοδος που συμβολίζεται με T .

Οι σχέσεις που διέπουν τα μεγέθη συχνότητα f , μήκος κύματος λ , περίοδος T και ταχύτητα διάδοσης c είναι

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c} \quad (\text{A1})$$

Υπενθυμίζουμε επίσης τις παρακάτω σχέσεις για την κυκλική συχνότητα ω και το μέτρο του αριθμού κύματος k :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{A2})$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c} \quad (\text{A3})$$

Οι μονάδες των βασικών κυματικών μεγεθών είναι, για τη συχνότητα f [s^{-1}] (Hz), για την κυκλική συχνότητα ω [rad/s], και εάν το μήκος κύματος εκφράζεται σε μέτρα [m], και η ταχύτητα σε [m/s], ο αριθμός κύματος εκφράζεται σε [m^{-1}].

Για την ανάπτυξη του παρόντος παραρτήματος θα υιοθετήσουμε ορισμένες παραδοχές για να μελετήσουμε ποιοτικά το φαινόμενο της σύνθεσης πηγών, ενώ παραπέμπουμε σε εξειδικευμένα βιβλία και άρθρα για την αναλυτική αναφορά σε πιο σύνθετες περιπτώσεις.

Οι παραδοχές μας είναι οι εξής :

- Η βασική μας πηγή είναι σημειακή παντοκατευθυντική. Εκπέμπει σφαιρικά κύματα ομοιόμορφα σε όλες τις διευθύνσεις
- Για να υπολογιστεί η σύνθεση των πηγών, θα θεωρήσουμε ότι η απόσταση υπολογισμού του ακουστικού πεδίου είναι πολύ μεγαλύτερη της απόστασης ανάμεσα στις σημειακές πηγές.
- Θα αναφερθούμε στην ακουστική πίεση ως το μέγεθος αναφοράς.
- Θα υιοθετήσουμε χωρίς άρση της γενικότητας την χρονική εξάρτηση του κύματος από το $e^{i\omega t}$.

Για σφαιρική διάδοση του κύματος, και με βάση την ανωτέρω υπόθεση για τη χρονική εξάρτηση η λύση που θα πάρουμε είναι της μορφής :

$$p = \frac{A}{r} e^{i(\omega t - kr)} \quad (\text{A.4})$$

ενώ, υιοθετώντας λύση στη μορφή τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε λύση της μορφής

$$p = \frac{A}{r} \sin(\omega t - kr) \quad (\text{A.5})$$

Θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια το σύμβολο R για την απόσταση.

Θυμίζουμε επίσης ότι ισχύουν οι σχέσεις :

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

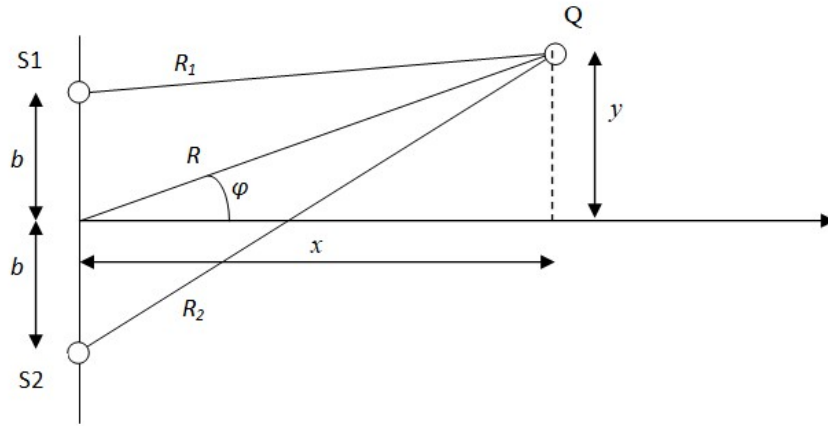
$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \quad (\text{A.6})$$

Θα δώσουμε στη συνέχεια μια απλοποιημένη θεώρηση του προβλήματος της σύνθεσης ακουστικών πηγών, εξετάζοντας το πρόβλημα μόνο στις περιπτώσεις που οι προς σύνθεση πηγές συνεισφέρουν με ίσο πλάτος στο σημείο ενός δέκτη. Η υπόθεση αυτή δικαιολογείται με βάση την υπόθεση για μικρή απόσταση ανάμεσα στις πηγές σε σχέση με τη θέση παρατήρησης.

A.1 Σύνθεση δύο πηγών

Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με χρήση πραγματικών και μιγαδικών συναρτήσεων.

Κατ' αρχήν θεωρείστε το σχήμα A1 που παρουσιάζει την γεωμετρία της σύνθεσης δύο πηγών. Το ενδιαφέρον εντοπίζεται στον υπολογισμό της απόστασης του σημείου παρατήρησης από κάθε μία από της πηγές. Η γεωμετρία του προβλήματος χαρακτηρίζεται από την απόσταση R από την αρχή των αξόνων και την γωνία φ που ορίζεται από τον άξονα των x και την ευθεία που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο παρατήρησης Q . Θα υπενθυμίσουμε την υπόθεση ότι η απόσταση του σημείου λήψης από την αρχή των αξόνων είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση των πηγών μεταξύ τους.



Σχήμα Α1 Γεωμετρία για τη σύνθεση δύο ηχητικών πηγών

Με αυτά τα δεδομένα παίρνουμε :

$$R_1^2 = (y - b)^2 + x^2 \quad (\text{A.1.1})$$

$$R_1^2 = (R \sin \varphi - b)^2 + R^2 \cos^2 \varphi = R^2 - 2Rb \sin \varphi + b^2 \quad (\text{A.1.2})$$

$$R_1 = (R^2 - 2Rb \sin \varphi + b^2)^{1/2} \quad (\text{A.1.3})$$

Η σχέση αυτή γράφεται :

$$R_1 = R \left(1 - \frac{2b \sin \varphi}{R} + \frac{b^2}{R^2} \right)^{1/2} \quad (\text{A.1.4})$$

Με βάση την υπόθεση που κάναμε παραπάνω για παρατηρήσεις σε μεγάλη απόσταση μπορούμε να δεχθούμε ότι $b/R \ll 1$

Χρησιμοποιώντας την διωνυμική ανάπτυξη

$$(1 + q)^{1/2} = 1 + \frac{q}{2} - \frac{q^2}{8} + \frac{q^3}{16} + \dots \quad (\text{A.1.5})$$

όπου q είναι ένας μικρός αριθμός, και θεωρώντας ότι q αντιπροσωπεύει την παράσταση $(b^2 / R^2 - 2b \sin \varphi / R)$ η σχέση (A.1.4) γίνεται

$$R_1 = R \left[1 - \frac{b}{R} \sin \varphi + \frac{b^2}{2R^2} (1 - \sin^2 \varphi) + \dots \right] \quad (\text{A.1.6})$$

Μπορούμε τώρα να αγνοήσουμε όρους στους οποίους εμφανίζεται ο λόγος $\frac{y_1}{R}$ με δυνάμεις υψηλότερες του 2, και να πάρουμε τελικά

$$R_1 \approx R - b \sin \varphi \quad (\text{A.1.7})$$

Η δεύτερη πηγή S2 με τις ίδιες υποθέσεις θα βρίσκεται σε απόσταση

$$R_2 \approx R + b \sin \varphi \quad (\text{A.1.8})$$

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι οι πηγές εκπέμπουν σε φάση¹² και ότι $2b = d$

Το σήμα που θα ληφθεί στο σημείο λήψης θα είναι το άθροισμα των δύο σημάτων :

$$p_{tot} = \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - kR_1)] + \frac{A}{R_2} \exp[i(\omega t - kR_2)] \quad (\text{A.1.9})$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των αποστάσεων από τις σχέσεις A1.7 και A1.8 στο όρισμα των εκθετικών συναρτήσεων παίρνομε :

$$\begin{aligned} p_{tot} &= \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - k(R - b \sin \varphi))] + \frac{A}{R_2} \exp[i(\omega t - k(R + b \sin \varphi))] = \\ &= \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - kR)] \exp(ikb \sin \varphi) + \frac{A}{R_2} \exp[i(\omega t - kR)] \exp(-ikb \sin \varphi) \end{aligned} \quad (\text{A.1.10})$$

Με βάση την αρχική μας υπόθεση για σημείο λήψης σε μεγάλη απόσταση από την πηγή, θα δεχθούμε ότι τα πλάτη της λύσης της ακουστικής εξίσωσης είναι ίδια ($R_1 = R_2 = R$), μια και η διαφορά τους επηρεάζει κυρίως τη διαφορά φάσης, και να πάρουμε την έκφραση :

$$p_{tot} = \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] (\exp(ikb \sin \varphi) + \exp(-ikb \sin \varphi)) \quad (\text{A.1.11})$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις A.6 καταλήγουμε στην

$$p_{tot} = \frac{2A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \cos(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.1.12})$$

Παρατηρούμε ότι η έκφραση αυτή μας δίνει τη συνολική πίεση συναρτήσει της γωνίας φ για δεδομένη συχνότητα και απόσταση των πηγών μεταξύ τους. Εάν $kb \sin \varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$, το μέτρο της πίεσης παίρνει για δεδομένο R τη μέγιστη τιμή του. Αυτό αντιστοιχεί σε $k \left(\frac{R_2 - R_1}{2} \right) = 0, \pi, \dots, n\pi$ ή $k(R_2 - R_1) = 0, \dots, 2n\pi$. Αντίστοιχα, για $k(R_2 - R_1) = \pi, \dots, (n+1)\pi, \dots$ το πλάτος παίρνει την ελάχιστη τιμή.

¹² Όταν οι πηγές εκπέμπουν με διαφορά φάσης 180° το ζευγάρι χαρακτηρίζεται ως *δίπολο* (*dipole*)

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το πλάτος του σήματος που προέρχεται ως σύνθεση από δύο σημειακές αρμονικές πηγές, εξαρτάται από τη συχνότητα του κύματος και την απόσταση ανάμεσα στις πηγές.

Χρησιμοποιώντας την έννοια του μήκους κύματος, θα παρατηρήσουμε ότι δύο λήψεις βρίσκονται σε φάση εάν η διαφορά των αποστάσεων του δέκτη από την πηγή είναι πολλαπλάσια του μήκους κύματος (ή έχουν διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π). Αντίθετα εάν η διαφορά των αποστάσεων τους είναι $(2n+1)\lambda/2$, $n=0,1,\dots$ οι πηγές είναι εκτός φάσης (διαφορά φάσης $\pi, 3\pi, \dots$).

Στι ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε χρησιμοποιώντας την έννοια της μέσης τετραγωνικής πίεσης. Θεωρώντας τα δύο σήματα από τις πηγές που αναφέραμε προηγουμένως, και με την υπόθεση για λήψη ίδιου πλάτους, ξαναγράφουμε την Α.1.9 ως

$$\begin{aligned} p_{tot} &= \frac{A}{R} \{ \exp[i(\omega t - kR_1)] + \exp[i(\omega t - kR_2)] \} \\ &= \frac{A}{R} \exp(i\omega t) [\exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2)] \end{aligned} \quad (\text{A.1.13})$$

Παίρνοντας το γινόμενο $p_{tot} p_{tot}^*$ όπου $*$ σημαίνει μιγαδικός συζυγής και παρατηρώντας ότι το γινόμενο $\exp(i\omega t) \exp(-i\omega t)$ είναι μονάδα, παίρνομε τη μέση τετραγωνική πίεση στη μορφή

$$\begin{aligned} |p_{tot}|^2 &= \left(\frac{A}{R} \right)^2 [\exp(-ikR_1) + \exp(-ikR_2)] [\exp(ikR_1) + \exp(ikR_2)] \\ &= \left(\frac{A}{R} \right)^2 \{ 2 + \exp[ik(R_1 - R_2)] + \exp[-ik(R_1 - R_2)] \} \end{aligned} \quad (\text{A.1.14})$$

και τελικά

$$|p_{tot}|^2 = 2 \left(\frac{A}{R} \right)^2 [1 + \cos k(R_1 - R_2)] \quad (\text{A.1.15})$$

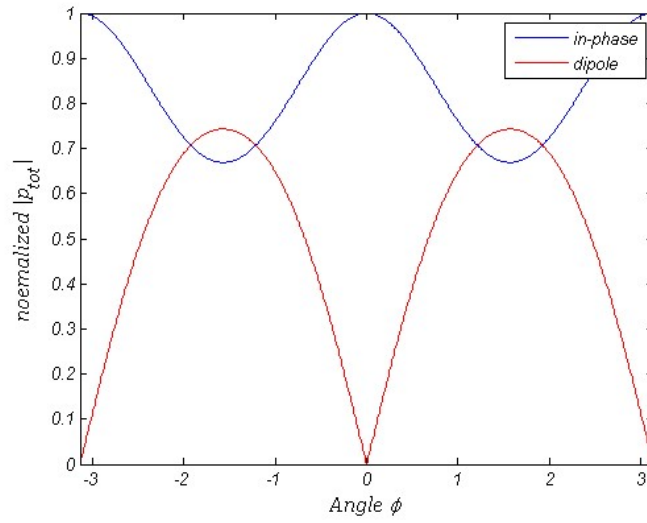
Παρατηρούμε έτσι μια ισοδύναμη ποιοτικά έκφραση της Α.1.12 μέσω της οποίας η μεταβολή της λήψης συναρτάται με τη διαφορά των αποστάσεων από την πηγή και η μέγιστη λήψη εμφανίζεται όταν $k(R_1 - R_2) = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ η ελάχιστη όταν έχουμε $\pi, 3\pi, \dots$

Οι αποστάσεις R_1 και R_2 υπολογίζονται από τις Α.1.7 και Α.1.8

Αντίστοιχο αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε για την περίπτωση του διπόλου. Η σχέση Α.1.12 στην περίπτωση αυτή παίρνει τη μορφή (άσκηση) :

$$p_{d,tot} = \frac{2A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \sin(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.1.16})$$

και οι συνθήκες για μέγιστο ή ελάχιστο μέτρο της πίεσης (εδώ το ελάχιστο είναι 0) αντιστρέφονται σε σχέση με πηγές που εκπέμπουν με ίδια φάση.



Σχήμα A2 Κανονικοποιημένο μέτρο της πίεσης λήψης από δύο πηγές που βρίσκονται σε απόσταση 0,4 μέτρων και για σήμα συχνότητας 1000 Hz. Η γωνία εκφράζεται σε rad.

Στο σχήμα A2 βλέπουμε μία απεικόνιση του διαγραμματος μεταβολής του μέτρου της πίεσης για την περίπτωση πηγών που εκπέμπουν σε φάση (μπλε γραμμή) ή αποτελούν δίπολο (κόκκινη γραμμή), συναρτήσει της γωνίας ϕ από $-\pi$ έως π για κανονικοποιημένο πλάτος της πίεσης. Τα δεδομένα στα οποία βασίστηκε το διάγραμμα είναι $b=0,2 \mu$, $f=1000 \text{ Hz}$, $c=1500 \text{ m/sec}$.

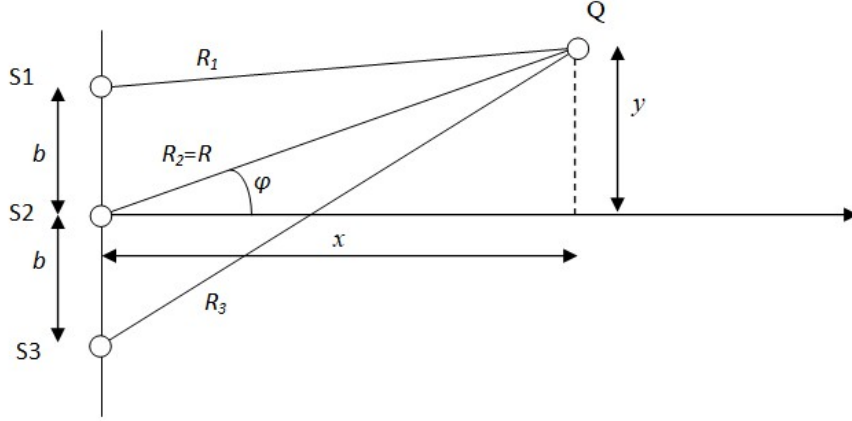
A.2 Σύνθεση τριών πηγών.

Θα εξετάσουμε με τη μορφή άσκησης την περίπτωση της σύνθεσης τριών πηγών που απέχουν απόσταση b μεταξύ τους στην ίδια ευθεία και για τις οποίες θεωρούμε άξονα συντεταγμένων να περνά από την μεσαία πηγή. Οι πηγές εκπέμπουν σε φάση. Οι αντίστοιχες αποστάσεις είναι

$$\begin{aligned} R_1 &\approx R - b \sin \phi \\ R_2 &= R \\ R_3 &\approx R + b \sin \phi \end{aligned} \tag{A.2.1}$$

Χρησιμοποιώντας ξανά την θεώρηση μέσω εκθετικών συναρτήσεων παίρνουμε

$$p_{tot} = \frac{A}{R_1} \exp[i(\omega t - kR + kbsi\phi)] + \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] + \frac{A}{R_3} \exp[i(\omega t - kR - kb \sin \phi)] \tag{A.2.2}$$



Σχήμα Α3. Γεωμετρία για τη σύνθεση τριών πηγών

Βγάζοντας κοινό παράγοντα, τον εκθετικό όρο $\exp[i(\omega t - kR)]$ που χαρακτηρίζει το κύμα σε απόσταση R από την πηγή, και θεωρώντας όπως και πριν ότι τα σήματα από τις πηγές λαμβάνονται από το δέκτη με ίδιο πλάτος, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{tot} &= \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] [1 + \exp(ikb \sin \varphi) + \exp(-ikb \sin \varphi)] \\ &= \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] [1 + 2 \cos(kb \sin \varphi)] \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Η σχέση αυτή είναι αντίστοιχη με την Α.1.12 που την υπενθυμίζουμε

$$p_{tot} = \frac{2A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \cos(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.1.12})$$

Γράφοντας

$$p_{tot} \equiv C \exp[i(\omega t - kR)] \quad (\text{A.2.4})$$

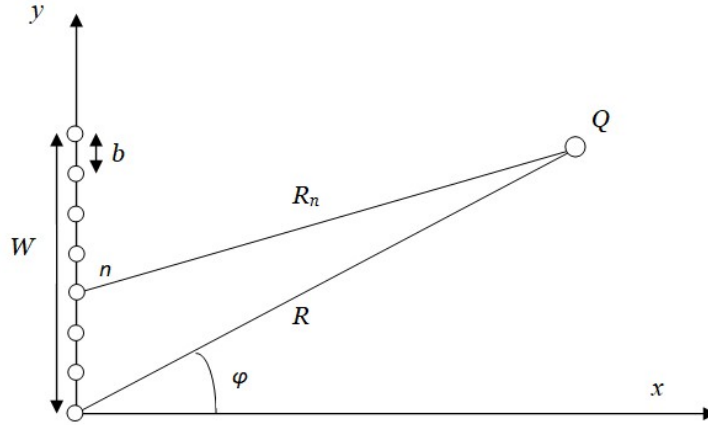
παίρνομε για την περίπτωση των τριών πηγών

$$C_3 = \frac{A}{R} [1 + 2 \cos(kb \sin \varphi)] \quad (\text{A.2.5})$$

και για την περίπτωση των δύο

$$C_2 = \frac{A}{R} 2 \cos(kb \sin \varphi) \quad (\text{A.2.6})$$

Ο συντελεστής C επιδρά στο πλάτος της διαταραχής και εξαρτάται από την γωνία παρατήρησης τη συχνότητα και την απόσταση των πηγών.



Σχήμα Α3. Γεωμετρία για τη σύνθεση πολλαπλών διακριτών πηγών

Α.3 Πολλαπλές πηγές

Θα θεωρήσουμε πολλές πηγές τοποθετημένες στην ίδια ευθεία σε ισαποστάσεις στον άξονα των y . Εάν η πρώτη απέχει απόσταση W ως προς την τελευταία και ο αριθμός τους είναι N , η ισαπόσταση των πηγών είναι

$$b = \frac{W}{N-1} \quad (\text{A.3.1})$$

Μία πηγή με δίκτη n θα απέχει από το δέκτη απόσταση R_n .

Έτσι, η διαταραχή από την n οστή πηγή σε απόσταση R σύμφωνα με τα παραπάνω θα είναι

$$p_n = \frac{A}{R_n} \exp[i(\omega t - k(R - nb \sin \varphi))] = \frac{A}{R_n} \exp[i(\omega t - kR + \frac{nkW \sin \varphi}{N-1})] \quad (\text{A.3.2})$$

Θεωρώντας και πάλι ότι ο δέκτης βρίσκεται σε πολύ μεγάλη απόσταση από τη σειρά των πηγών και ότι το μήκος $W \ll R$ δεχόμαστε ότι στο πλάτος της πίεσης $R_n = R$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Βγάζοντας στη συνέχεια κοινό παράγοντα τον $(\omega t - kR)$ από όλες τις επί μέρους διαταραχές (πιέσεις στην προκειμένη περίπτωση) παίρνομε

$$p_{tot} = \frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)] \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{inkW \sin \varphi}{N-1}\right) \quad (\text{A.3.3})$$

Θέτουμε

$$C_W = \frac{A}{R} \sum_{n=0}^{N-1} \exp\left(\frac{inkW \sin \varphi}{N-1}\right) \quad (\text{A.3.4})$$

Η έκφραση αυτή έχει τη μορφή γεωμετρικής σειράς

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n = \frac{1-r^N}{1-r} \quad (\text{A.3.5})$$

Στην περίπτωση μας $\exp(in\gamma) = [\exp(i\gamma)]^n$ και

$$r = \exp\left(\frac{ikW \sin \varphi}{N-1}\right) \quad (\text{A.3.6})$$

$$C_W = \frac{A}{R} \left\{ \frac{1 - \exp\left(\frac{iNkW \sin \varphi}{N-1}\right)}{1 - \exp\left(\frac{ikW \sin \varphi}{N-1}\right)} \right\} \quad (\text{A.3.7})$$

Αλλάζοντας λίγο τη μορφή του εκθετικού χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$1 - e^{ix} = -e^{ix/2} (e^{ix/2} - e^{-ix/2}) = -2ie^{ix/2} \sin \frac{x}{2} \quad (\text{A.3.8})$$

Παίρνουμε

$$C_W = N \frac{A}{R} \left\{ \frac{\exp\left[iNk(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right]}{\exp\left[ik(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right]} \right\} \frac{\sin\left[Nk(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right]}{N \sin\left[k(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right]} \quad (\text{A.3.9})$$

Η έκφραση στις αγκύλες έχει απόλυτη τιμή 1 και ορίζει μία διαφορά φάσης. Για μεγάλα N παίρνουμε προσεγγιστικά

$$C_W = N \frac{A}{R} \exp\left(\frac{ikW \sin \varphi}{2}\right) \frac{\sin\left[Nk(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right]}{N \sin\left[k(W/2) \frac{\sin \varphi}{N-1}\right]} \quad (\text{A.3.10})$$

Το μέγεθος $(kW \sin \varphi)/2$ υποδηλώνει μία διαφορά φάσης και συνεπώς η φάση του σήματος που λαμβάνεται στο δέκτη παίρνει τη μορφή $i(\omega t - kR + (kW \sin \varphi)/2)$.

Ο τελευταίος όρος είναι γνωστός ως συντελεστής κατευθυντότητας ή απόκριση κατευθυντότητας (directional response) και γράφεται ως

$$D = \frac{\sin\left(\frac{N}{N-1} \frac{kW}{2} \sin \varphi\right)}{N \sin\left(\frac{1}{N-1} \frac{kW}{2} \sin \varphi\right)} \quad (\text{A.3.11})$$

Για N μεγάλο, χρησιμοποιούμε την προσεγγιστική έκφραση του ημιτόνου $\sin(\theta) \approx \theta$ για μικρό όρισμα και καταλήγουμε στη σχέση

$$D = \frac{\sin \frac{kW \sin \phi}{2}}{\frac{kW \sin \phi}{2}} \quad (\text{A.3.12})$$

Η τελευταία αυτή συνάρτηση είναι της μορφής $(\sin x)/x$ για την οποία γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1 \quad (\text{A.3.13})$$

Η περίπτωση που συζητήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο αφορά σε εφαρμογές που δημιουργούνται συστοιχίες πηγών τοποθετούμενες η μία κοντά στην άλλη για να επιτευχθούν τα επιθυμητά χαρακτηριστικά κατευθυντότητας (δείτε αναφορές στο κεφάλαιο για την εξίσωση SONAR).

A.4 Πηγές κατανεμημένες συνεχώς

Εάν θεωρήσουμε ότι οι πηγές μας βρίσκονται μεν στην ίδια ευθεία αλλά κατανέμονται συνεχώς σε μήκος W , μπορούμε να δείξουμε ότι ο συντελεστής κατευθυντότητας είναι ίδιος με αυτόν που βρήκαμε στην προηγούμενη περίπτωση των διακριτά κατανεμημένων πηγών. Για την περίπτωση αυτή θα χρειαστεί να θεωρήσουμε την ένταση της πηγής που εκπέμπεται από ένα στοιχειώδες μήκος dy . Θα κάνουμε την υπόθεση ότι κάθε στοιχειώδες μήκος dy συνεισφέρει dy/W στο πλάτος της ακουστικής πίεσης που εκπέμπεται. Με τον τρόπο αυτό «κανονικοποιούμε» το πλάτος εκπομπής. Επομένως η συνεισφορά στο δέκτη από τη στοιχειώδη πηγή που βρίσκεται σε απόσταση y από την αρχή των αξόνων ($R(y)$ από το δέκτη) θα είναι :

$$dp_y = \frac{A}{R} \frac{dy}{W} \exp[i(\omega t - kR + ky \sin \phi)] \quad (\text{A.4.1})$$

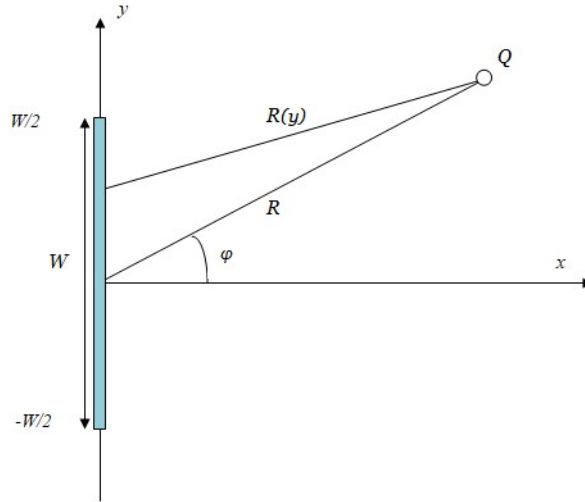
Προσέξτε ότι κάναμε την επί πλέον παραδοχή ότι η πηγή βρίσκεται πολύ μακριά από τον δέκτη με συνέπεια στον παρανομαστή του πλάτους της πίεσης να έχουμε πάντα R ενώ η απόσταση $R(y)$ υπολογίζεται κατά τα γνωστά ως

$$R(y) = R - y \sin \phi \quad (\text{A.4.2})$$

με το y να παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές.

Ολοκληρώνοντας την έκφραση αυτή από $-W/2$ έως $W/2$ παίρνουμε

$$p_{tot} = \frac{A}{RW} \int_{-W/2}^{W/2} \exp[i(\omega t - kR + ky \sin \phi)] dy \quad (\text{A.4.3})$$



Σχήμα Α5 Γεωμετρία για τον υπολογισμό τη σύνθεσης πηγών κατανεμημένων συνεχώς

Βγάζοντας κοινό παράγοντα τον εκθετικό όρο $\frac{A}{R} \exp[i(\omega t - kR)]$ παίρνομε για το συντελεστή κατευθυντότητας τη σχέση

$$D = \frac{1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \exp[iky \sin \phi] dy \quad (\text{A.4.4})$$

$$D = \frac{1}{W} \left[\frac{\exp(iky \sin \phi)}{ik \sin \phi} \right]_{-W/2}^{W/2} \quad (\text{A.4.5})$$

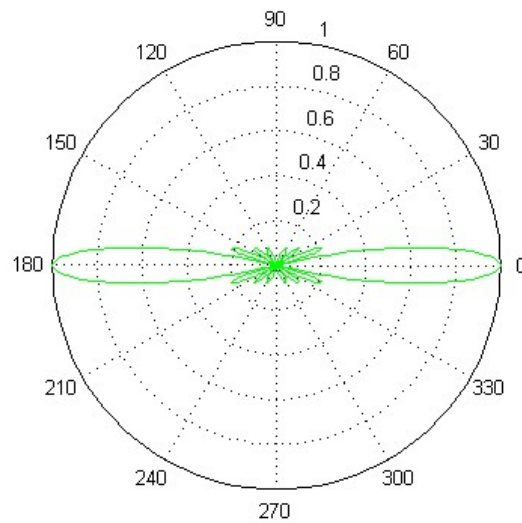
$$D = \frac{\exp\left[\frac{i(kW \sin \phi)}{2}\right] - \exp\left[\frac{-i(kW \sin \phi)}{2}\right]}{ikW \sin \phi} \quad (\text{A.4.6})$$

που τελικά γράφεται ως

$$D = \frac{\sin \frac{kW \sin \phi}{2}}{\frac{kW \sin \phi}{2}} \quad (\text{A.4.7})$$

Βλέπομε ότι ο συντελεστής είναι ίδιος με εκείνον που υπολογίσαμε στην περίπτωση των διακριτά κατανεμημένων πηγών.

Πολλές φορές, η απεικόνιση του συντελεστή κατευθυντότητας γίνεται σε πολικό διάγραμμα συντεταγμένων που απεικονίζει μία συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τη γωνία.



Σχήμα Α6. Ένα τυπικό πολικό διάγραμμα εκπομπής πηγής που μοντελοποιείται από συνεχή κατανομή σημειακών πηγών μήκους $4\lambda=6$ m. Η συχνότητα είναι 1000 Hz και η ταχύτητα διάδοσης του ήχου 1500 m/sec.

Σχετικό είναι το σχήμα Α6 που αφορά το συντελεστή κατευθυντότητας συνεχώς κατανομημένων πηγών στον άξονα των y , συμμετρικά ως προς τον άξονα των x . Έχει υπολογιστεί για μήκος πηγής 4λ όπου λ είναι το μήκος κύματος. Με συχνότητα 1000 Hz και ταχύτητα διάδοσης του ήχου 1500 m/sec, το μήκος της συστοιχίας είναι 6 m. Οι τιμές του διαγράμματος είναι κανονικοποιημένες ως προς την μέγιστη τιμή του D. Προσέξτε επίσης ότι η συστοιχία εκπέμπει με συμμετρικό τρόπο ως προς τη γωνία, δηλαδή με αναφορά στο σχήμα Α5, η ένταση του ακουστικού πεδίου στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τα αρνητικά x είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη του συμπληρωματικού ημιεπιπέδου.

Υπενθυμίζεται ότι η ανωτέρω ανάπτυξη αφορά απόκριση πηγής σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το σημείο εκπομπής.

Μελέτη της κατευθυντότητας πιο σύνθετων πηγών (π.χ. πηγές κατανομημένες σε επίπεδο και όχι σε ευθεία) ξεφεύγει από το σκοπό του μαθήματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. Στοιχεία από την μηχανική των σωμάτων. Μέτρα ελαστικότητας

Τα ομογενή και ιστροπικά υλικά χαρακτηρίζονται γενικά από δύο σταθερές οι οποίες υποδηλώνουν τις ελαστικές τους ιδιότητες, δηλαδή τον βαθμό που «αντιστέκονται» σε εξωτερικά επιβαλλόμενες δυνάμεις.

Γενικά ένα μέτρο ελαστικότητας ορίζεται από μια γενική σχέση της μορφής :

$$E \equiv \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (\text{B.1})$$

όπου σ είναι η τάση που αναπτύσσεται σε ένα σώμα και ε είναι η παραμόρφωση που επάγεται. Είναι προφανές ότι ανάλογα με το είδος του σώματος και την τάση που αναπτύσσεται τα μέτρα ελαστικότητας μπορούν να οριστούν με εναλλακτικούς τρόπους.

Στην μηχανική έχουν εμφανιστεί πολλά μέτρα ελαστικότητας ανάλογα με τον ορισμό τους, ωστόσο ένα ζευγάρι κάθε φορά ανεξάρτητων μέτρων είναι ικανό να περιγράψει το υλικό. Στα πλαίσια της Ακουστικής Ωκεανογραφίας θα υιοθετήσουμε γενικά τα μέτρα που αναφέρονται και ως σταθερές Lamé και συμβολίζονται με λ και μ . Από αυτά το λ είναι γνωστό ως πρώτη παράμετρος του Lamé ενώ το μ ως μέτρο διάτμησης. Ωστόσο θα δούμε και άλλα μέτρα που είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη και την κατανόηση του μαθήματος.

B.1 Μέτρο διόγκωσης (Bulk Modulus)

Το μέτρο διόγκωσης σε ένα υλικό ορίζεται από τη σχέση :

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} \quad (\text{B.1.1})$$

όπου p είναι η πίεση που ασκείται σε ένα όγκο V του υλικού. Το αντίστροφο του μέτρου διόγκωσης είναι γνωστό και ως συμπιεστότητα (compressibility) του υλικού. Εκφράζει τον βαθμό «αντίστασης» του υλικού στην αύξηση του όγκου του, όταν αυξάνει η πίεση που ασκείται σε αυτό ομοιόμορφα. Το αρνητικό πρόσημο δίδει θετική τιμή στο μέτρο διόγκωσης αφού η αύξηση της πίεσης συνεπάγεται μείωση του όγκου του υλικού.

Στα ρευστά μέσα, το μέτρο διόγκωσης συνδέεται με την ταχύτητα διάδοσης του ήχου μέσω της σχέσης

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (\text{B.1.2})$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του υλικού. Προφανώς ως πυκνότητα του υλικού αινούμε την πυκνότητα αναφοράς ρ_0 σύμφωνα με τους συμβολισμούς του Κεφαλαίου 2.

Σημειώνουμε ότι η ανωτέρω έκφραση της ταχύτητας είναι συμβατή με το θερμοδυναμικό της ορισμό της που είδαμε στο Κεφάλαιο 2. Πράγματι η σχέση B.1.1 με χρήση της πυκνότητας του ρευστού ρ θεωρώντας σταθερή μάζα m και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι θετική μεταβολή του όγκου ισοδυναμεί με αρνητική μεταβολή της πυκνότητας, παίρνουμε

$$K = \rho_0 \frac{\partial p}{\partial \rho} \quad \text{B.1.3}$$

που είναι ένας εναλλακτικός ορισμός του μέτρου διόγκωσης.

Η αντιστοίχιση της έκφρασης αυτής με τον θερμοδυναμικό ορισμό της ταχύτητας επαφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Το μέτρο διόγκωσης έχει μονάδες πίεσης (π.χ. Pa). Τυπική τιμή στο νερό είναι 2.2×10^9 Pa (μεταβαλλόμενη ανάλογα με τις συνθήκες και ιδιαίτερα την θερμοκρασία).

Δεδομένης της αδυναμίας διάδοσης διατμητικών κυμάτων σε ρευστά και αέρια, το μέτρο διόγκωσης χαρακτηρίζει πλήρως το ρευστό ή αέριο υλικό.

B.2 Μέτρο ελαστικότητας (Shear Modulus)

Ως μέτρο ελαστικότητας ορίζουμε τον λόγο της διατμητικής τάσης προς την διατμητική παραμόρφωση σύμφωνα και με την σχέση B.1.. Είναι προφανές ότι το μέτρο αυτό δεν έχει νόημα σε σώματα που δεν υποστηρίζουν διάδοση διατμητικών κυμάτων (σώματα με ασθενή ακαμψία) όπως είναι το νερό ή ο αέρας. Σε εν γένει ισοτροπικά ελαστικά σώματα αποτελούν την μία από τις δύο παραμέτρους που χαρακτηρίζουν το σώμα και συμβολίζεται με G ή με μ . Σε ανισότροπα σώματα το μέτρο ελαστικότητας παίρνει την μορφή τανυστή. Θα αναφερθούμε στη συνέχεια σε ισότροπα μέσα.

Ανάλογα με την περίπτωση των ρευστών, η ταχύτητα διάδοσης διατμητικών κυμάτων, συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας μέσω της σχέσης

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{(B.2.1)}$$

B.3 Σταθερές Lamé

Οι σταθερές Lamé ορίζονται ως λ και μ , αναφέρονται σε ελαστικά υλικά που υπόκεινται σε συντονισμένη δράση δυνάμεων και συνεπώς τόσο σε ογκομετρικές όσο και σε διατμητικές παραμορφώσεις. Από το Νόμο του Hooke η σχέση τάσης παραμόρφωσης σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\sigma = 2\mu e + \lambda \text{tr}(e)\mathbf{I} \quad \text{(B.3.1)}$$

όπου $\text{tr}(e)$ είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα που ορίζεται από τον τανυστή των παραμορφώσεων και $\mathbf{I}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Η σταθερά μ είναι το μέτρο ελαστικότητας ($\mu \equiv G$) ενώ η σταθερά λ συνδέεται με το μέτρο ελαστικότητας και το μέτρο διόγκωσης μέσω της σχέσης :

$$K = \lambda + (2/3)\mu \quad (\text{B.3.2})$$

Η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων σε ένα ελαστικό μέσο, συνδέεται με τις δύο σταθερές μέσω της σχέσης

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (\text{B.3.3})$$

Είναι προφανές ότι όταν δεν υπάρχει διατμητική τάση σε ένα σώμα, $\mu = 0$ και το μέτρο διόγκωσης αντιστοιχεί στην σταθερά λ .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. Στοιχεία από την σύσταση του πυθμένα των θαλασσών.

Γ.1 Σύσταση θαλασσινών ιζημάτων και χαρακτηριστικές παράμετροι.

Ο πυθμένας της θάλασσας για τις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας, περιγράφεται συνήθως αποτελούμενος από δύο ομάδες υλικών. Μία ομάδα υλικών με ασθενή ακαμψία που χαρακτηρίζονται ως ιζήματα (sediments) και μία ομάδα υλικών που υπόκεινται των ιζημάτων και έχουν δομή στερεών. Μορφολογικά, τα θαλασσινά ιζήματα χαρακτηρίζονται από συγκεντρώσεις σωματιδίων με ποσότητες νερού ανάμεσα στο συνδετικό πλέγμα τους (water saturated). Η προέλευσή τους μπορεί να είναι στεριανή από παρασυρμένες ποσότητες υλικών είτε θαλασσινή από χημικά ή βιολογικά κατάλοιπα.

Το βασικό μέγεθος που χαρακτηρίζει τα θαλασσινά ιζήματα είναι το *πορώδες* (porosity) που ορίζεται από τη σχέση :

$$n = \frac{v_v}{v_v + v_m} \quad (\Gamma.1.1)$$

Όπου v_v είναι ο όγκος των κενών που υπάρχουν σε ένα όγκο ιζήματος συνολικού όγκου $v_v + v_m$ όπου v_m είναι ο όγκος των στερεών υλικών. Το πορώδες μειώνεται με το βάθος εισχώρησης στο ίζημα, καθώς υπό την επίδραση της βαρύτητας το πλέγμα των ιζημάτων τείνει να γίνει ποιο συμπαγές. Άλλες φυσικές παράμετροι που χαρακτηρίζουν τα θαλασσινά ιζήματα είναι το μέγεθος του κόκκου και φυσικά η πυκνότητα και η ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων (ακουστικών) και των διατμητικών κυμάτων.

Οι σχέσεις που συνδέουν τα βασικά μεγέθη των θαλασσινών ιζημάτων είναι βασικά εμπειρικές και προέρχονται από ανάλυση μεγάλου αριθμού δειγμάτων, αν και υπάρχουν πλέον θεωρίες για την ιζηματογένεση που δίδουν την δυνατότητα επαγωγής και σύνδεσης των βασικών μεγεθών των ιζημάτων.

Μια εμπειρική σχέση που συνδέει την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων σε m/sec με το πορώδες είναι

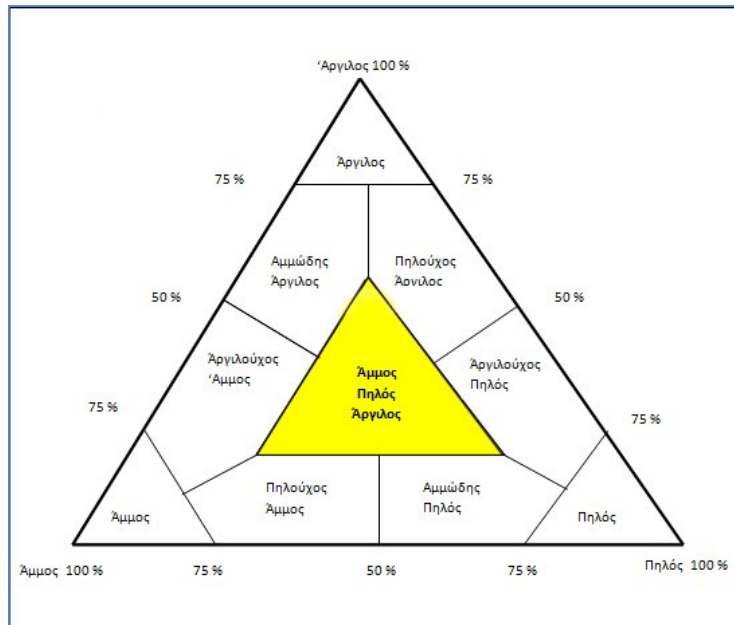
$$c_p = 2540 - 24.53n + 0.1461n^2 \quad (\Gamma.1.2)$$

και προέρχεται από τον Bachman (1985).

Με βάση την παρατήρηση για την μείωση του πορώδους με την αύξηση του βάθους, η παραπάνω σχέση υποδηλώνει και μια αύξηση της ταχύτητας διάδοσης των διαμήκων κυμάτων με το βάθος. Από ανάλυση μεγάλου αριθμού δειγμάτων από αμμώδη θαλασσινά ιζήματα ο Hamilton (1979) δίδει μία σχετική εμπειρική σχέση :

$$c_p = 1806D^{0.015} \quad (\Gamma.1.3)$$

όπου D είναι το βάθος στο ίζημα σε m.



Σχήμα Γ1. Χάρτης σύστασης ιζημάτων (Χαρακτηριστικό τρίγωνο)

Εμπειρικές σχέσεις που συνδέουν την ταχύτητα διάδοσης των διαμήκων κυμάτων με την πυκνότητα έχουν επίσης αναφερθεί. Μία από αυτές προερχόμενη επίσης από τον Bachman είναι

$$c_p = 2390 - 1.358\rho + 5.246 \times 10^{-4} \rho^2 \quad (\Gamma.1.4)$$

όπου η πυκνότητα δίδεται σε kg/m^3

Στα θαλασσινά ιζήματα εμπεριέχονται συνήθως τρεις οικογένειες υλικών : άμμος (sand) άργιλος (clay) και πηλός (silt). Ανάλογα με την ποσοστιαία σύσταση των ιζημάτων σε κάθε είδος υλικού τα ιζήματα χαρακτηρίζονται ως αμμώδη, αργιλούχα ή πηλούχα. Στο σχήμα Γ.1 εμφανίζεται ένα χαρακτηριστικό τρίγωνο που περιγράφει ένα θαλασσινό ίζημα με βάση την ποσοστιαία του σύσταση.

Σε ό,τι αφορά την ταχύτητα διάδοσης των διατμητικών κυμάτων, λόγω της χαλαρής ακαμψίας των θαλασσινών ιζημάτων που συνεπάγεται και μικρό μέτρο ελαστικότητας, αυτή είναι μικρή. Μάλιστα σε πολλές περιπτώσεις που επιζητείται ο υπολογισμός της διάδοσης σε μεγάλες αποστάσεις και για υψηλές συχνότητες, τα θαλασσινά ιζήματα θεωρούνται ρευστά. Ωστόσο η ακριβής μοντελοποίηση της διάδοσης του ήχου στη θάλασσα επιβάλλει να ληφθούν υπ' όψιν και οι ελαστικές ιδιότητες των ιζημάτων.

Ο πίνακας Γ.1 δίδει συνοπτικά μέσες τιμές παραμέτρων των θαλασσινών ιζημάτων με βάση την σύνθεσή τους. Οι τιμές του πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να υπολογιστούν απώλειες πυθμένα ή ανακλάσεις από τα στρώματα του πυθμένα όταν δίδεται η περιγραφή ή το πορώδες του ιζήματος.

Είδος Ιζημάτος	Πορώδες	Σύσταση %			Πυκνότητα (kg/m ³)	Ταχύτητες (m/sec)		α_p (dB/m·kHz)
		Άμμος	Πηλός	Άργιλος		c_p	c_s	
Χονδρή άμμος	36	100	0	0	2030	1850	250	0,47
Μέση άμμος	40	100	0	0	1980	1750	250	0,5
Λεπτή άμμος	43,6	88	6	6	1970	1740	200	0,51
Πηλούχος άμμος	53	65	21	14	1830	1677	450	0,69
Αμμώδης πηλός	66	29	56	15	1650	1550	370	0,3-0,76
Πηλός	68	7	80	13	1600	1600	270	0,24-0,68
Άμμος άργιλος πηλός	70	33	41	26	1500	1578	400	0,11
Αργιλούχο ς πηλός	78	5	60	35	1420	1530	300	0,08
Πηλούχος άργιλος	80	3	36	61	1400	1520	240	0,07
Άργιλος	86	1	20	79	1280	1490	180	0,06

Πίνακας Γ.1 Μέσες τιμές παραμέτρων θαλασσινών ιζημάτων

Γ.2 Στρωματοποίηση θαλασσινών ιζημάτων.

Η μοντελοποίηση του θαλασσινού βυθού για τις εφαρμογές της ακουστικής ωκεανογραφίας, γίνεται με πολλούς τρόπους ανάλογα με τις απαιτήσεις ακρίβειας που υπάρχουν και τις συγκεκριμένες εφαρμογές.

Η απλούστερη περίπτωση είναι εκείνη σύμφωνα με την οποία ο πυθμένας θεωρείται ομογενής και ημιάπειρος σε έκταση. Αυτό σημαίνει ότι μετά την διαχωριστική επιφάνεια νερού-πυθμένα δεν υπάρχει ως προς το βάθος άλλο όριο ή διεπιφάνεια. Τα επιφανειακά ιζήματα στην περίπτωση αυτή χαρακτηρίζουν ολόκληρο το βυθό.

Όταν όμως είναι γνωστή η στρωμάτωση του πυθμένα, η μοντελοποίηση μπορεί να γίνει με επάλληλα στρώματα διαφορετικής σύστασης που χωρίζονται μεταξύ τους με οριζόντιες επιφάνειες (horizontally stratified medium). Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές το τελευταίο στρώμα θεωρείται ημιάπειρο σε έκταση. Από μορφολογικής πλευράς, το τελευταίο στρώμα του πυθμένα συνήθως αποτελείται από σκληρά υλικά που χαρακτηρίζονται από αρκετή ακαμψία αλλά και μεγάλες ταχύτητες διαμήκων και διατμητικών κυμάτων. Αυτή είναι η περίπτωση σε βαθιές κυρίως θάλασσες που τα μαλακά ιζήματα έχουν μικρό συνήθως πάχος.

Όταν οι διαχωριστικές επιφάνειες ανάμεσα στα ιζήματα δεν είναι επίπεδες, ή εάν παρατηρούνται ανυψώσεις σκληρών υλικών στον πυθμένα, η μοντελοποίηση πρέπει να περιλάβει και αυτή τη γεωμετρία. Τα προβλήματα γενικά δυσκολεύουν σε αυτή την περίπτωση.

Τέλος να επισημάνουμε ότι σε ρηχές θάλασσες παρατηρούνται αυξημένες ποσότητες άμμου στα ιζήματα αφού αργιλώδη υλικά λόγω του μικρού κόκκου τους είναι δύσκολο να εναποτεθούν σε περιοχές με μεγάλη κινητικότητα νερού, όπως είναι οι ρηχές θάλασσες.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. Πρόσθετες παρατηρήσεις στη λύση της ακουστικής εξίσωσης

Δ.1 Η λύση της ακουστικής εξίσωσης με τριγωνομετρικές συναντήσεις

Είναι γνωστό από τη θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων ότι μια εναλλακτική έκφραση της λύσης των εξισώσεων 2.4.6 και 2.4.12 που οδηγούν στις συνιστώσες της λύσης της ακουστικής εξίσωσης στο πεδίο του χρόνου και του χώρου αντίστοιχα, δίδεται μέσω τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έτσι για τη γενική λύση της εξίσωσης 2.4.6 που μας δίνει τη χρονική εξάρτηση της λύσης μπορούμε να πάρουμε

$$T = D \cos(\omega t) + E \sin(\omega t) \quad (\Delta.1.1)$$

και για εκείνες των 2.4.12 που μας δίνουν την εξάρτηση από το χώρο :

$$p_x(x) = D_1 \cos(k_x x) + E_1 \sin(k_x x) \quad (\Delta.1.2\alpha)$$

$$p_y(y) = D_2 \cos(k_y y) + E_2 \sin(k_y y) \quad (\Delta.1.2\beta)$$

$$p_z(z) = D_3 \cos(k_z z) + E_3 \sin(k_z z) \quad (\Delta.1.2\gamma)$$

Η αντιστοίχιση των συντελεστών των λύσεων αυτών με εκείνους που εμφανίζονται στις εξισώσεις 2.4.7 και 2.4.14 αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Στα πλαίσια των σημειώσεων του βιβλίου υιοθετούμε την έκφραση των λύσεων με εκθετικές συναρτήσεις, αλλά σε ειδικές περιπτώσεις μπορεί να είναι προτιμότερη η χρήση των λύσεων με τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Υπενθυμίζουμε ότι η πίεση είναι μιγαδικό μέγεθος, κάτι που σημαίνει ότι οι συντελεστές των εξισώσεων του παραρτήματος είναι γενικά μιγαδικοί αριθμοί. Η τιμή τους θα προκύψει από εφαρμογή των οριακών συνθηκών του προβλήματος.

Στο επόμενο εδάφιο δίνουμε μια φαινομενολογική περιγραφή των λύσεων της ακουστικής εξίσωσης με αναφορά στα κλασσικά μεγέθη που είναι η συχνότητα, η περίοδος και το μήκος κύματος.

Δ.2 Απεικόνιση της λύσης της ακουστικής εξίσωσης.

Θα θεωρήσουμε τη λύση της ακουστικής εξίσωσης σε μια διάσταση και μάλιστα με όδευση προς τα αυξανόμενα x .

Η έκφραση της λύσης είναι τότε από τη 2.4.15

$$p_1(x, t) = A_1 e^{i(k_x x - \omega t)} \quad (\Delta.2.1)$$

Η πραγματική πίεση (θα τη συμβολίσουμε εδώ με $\tilde{p}_1(x)$) είναι το πραγματικό μέρος της $p_1(x)$ δηλαδή

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t) \quad (\Delta.2.2)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε πως απεικονίζονται οι μεταβολές της πίεσης στο μονοδιάστατο αυτό χωρίο συναρτήσει του χρόνου και της απόστασης.

Στο σχήμα Δ1 βλέπουμε τη μεταβολή της πίεσης του συμπιεστού μέσου στο οποίο διαδίδεται ο ήχος σε δύο διαφορετικές **δεδομένες θέσης** στο πεδίο διάδοσης. Το πλάτος της πίεσης έχει ληφθεί αυθαίρετα ίσο με τη μονάδα αφού ένα πραγματικό πλάτος θα προκύψει από εφαρμογή των αρχικών συνθηκών. Τα μεγέθη που εμφανίζονται στο σχήμα έχουν υπολογιστεί για συχνότητα $f=1000$ Hz και ταχύτητα διάδοσης του ήχου $c=1500$ m/sec. Οι δύο θέσεις είναι 4 και 2 μέτρα μακριά από την αρχή του άξονα των x και μπορούμε να αναγνωρίσουμε στο σχήμα την περίοδο του κύματος που είναι $T=10^{-3}$ sec ($=1/f$) ως την απόσταση ανάμεσα σε δύο συνεχόμενες κορυφές της κυματομορφής.

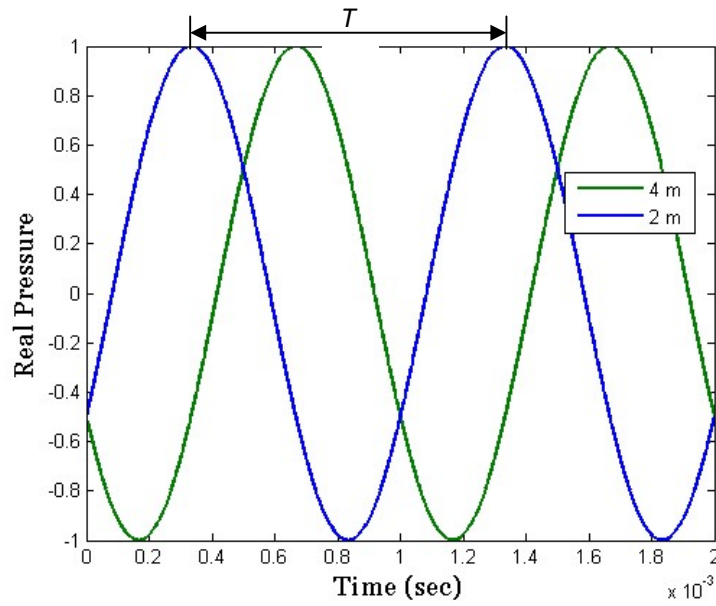
Στο σχήμα Δ2 βλέπουμε τη μεταβολή της πίεσης συναρτήσει της απόστασης για χρόνο $t=1$ sec. Παρουσιάζονται δύο καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 2\pi$. Η δεύτερη καμπύλη προκύπτει όταν θεωρήσουμε χρονική εξάρτηση του κύματος της μορφής

$$T(t) = e^{-i(\omega t - \Delta\varphi)} \quad (\Delta.2.3)$$

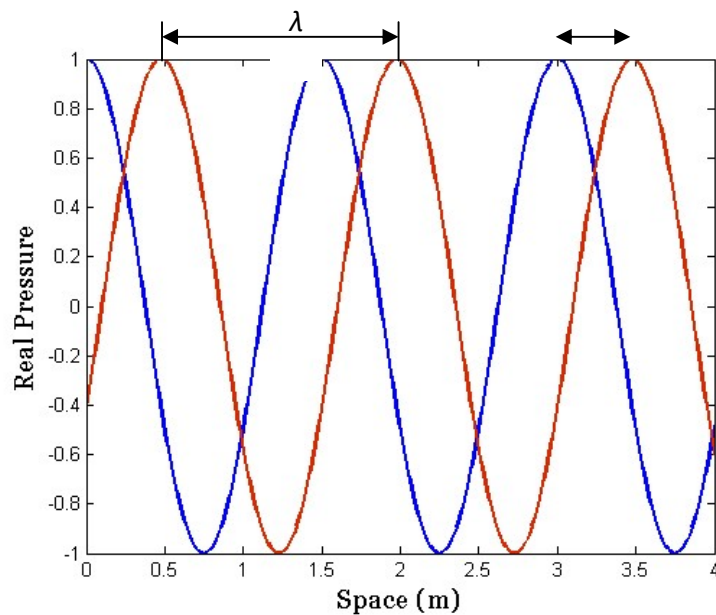
Η ανωτέρω έκφραση μας δίνει έκφραση για την πραγματική πίεση :

$$\tilde{p}_1(x,t) = A_1 \cos(k_x x - \omega t - \Delta\varphi) \quad (\Delta.2.4)$$

Στο σχήμα Δ2 αναγνωρίζουμε και το μήκος κύματος που είναι $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500}{1000} = 1,5$ m. ενώ έχει σημειωθεί και η διαφορά φάσης των δύο κυματισμών.



Σχήμα Δ1. Μεταβολή της ακουστικής πίεσης σύμφωνα με την Δ.2.2 σε δύο δεδομένες θέσεις στο χώρο $x_1 = 2m$, $x_2 = 4m$.



Σχήμα Δ2. Μεταβολή της ακουστικής πίεσης σύμφωνα με την Δ.2.4 για $\Delta\varphi = 0$ (μπλε γραμμή) και $\Delta\varphi = 2$ (κόκκινη γραμμή).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε. Η ακουστική εξίσωση στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

Εάν διατυπώσουμε τον τελεστή ∇^2 στο σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων, η ακουστική εξίσωση για την ακουστική πίεση γράφεται

$$\frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (\text{E.1.1})$$

όπου $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$.

Θα ασχοληθούμε μόνο με προβλήματα σε ένα σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων που παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Είναι προβλήματα που αναφέρονται σε ένα άπειρο χωρίο με σημειακή αρμονική πηγή. Η λύση που θα δούμε στη συνέχεια είναι μία καλή προσέγγιση για τη λύση της ακουστικής εξίσωσης πολύ κοντά στην πηγή.

Σε αυτές τις περιπτώσεις λοιπόν η ακουστική εξίσωση για την πίεση που εξαρτάται πλέον μόνο από το r μεταπίπτει στην

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (\text{E.1.2})$$

όπου $p = p(r, t)$.

Για αρμονικά αποκλίνοντα κύματα με την ίδια χρονική εξάρτηση που είδαμε μέχρι τώρα, η λύση της ως άνω ακουστικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$p(r, t) = \frac{A}{r} \exp[i(kr - \omega t)] \quad (\text{E.1.3})$$

που αντιπροσωπεύει αποκλίνοντα από την πηγή αρμονικά κύματα και εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι ικανοποιεί την ακουστική εξίσωση. Αξίζει εδώ να προσέξουμε την εξάρτηση του πλάτους της πίεσης από την απόσταση. Το πλάτος του κύματος μειώνεται γραμμικά με την απόσταση και το γεγονός αυτό αποτελεί πρακτικά και τη μορφολογική διαφορά της ανωτέρω έκφρασης από τη λύση για επίπεδα κύματα. Ο συντελεστής A υπολογίζεται από τα δεδομένα της ακουστικής πηγής.

Η σχέση ανάμεσα στην ταχύτητα των στοιχειωδών σωματιδίων του μέσου και στην πίεση δίδεται από την έκφραση

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{E.1.4})$$

όπου u είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά την ακτίνα του σφαιρικού συστήματος συντεταγμένων. Υπενθυμίζεται ότι και η ταχύτητα θα πρέπει να έχει την ίδια χρονική

εξάρτηση και μια και υπακούει σε εντελώς ίδια εξίσωση και στον ίδιο νόμο μεταβολής του πλάτους της συναρτήσεως του r .

Για μεγάλες αποστάσεις από την πηγή, (kr μεγάλο) μπορεί να αποδειχθεί ότι η πίεση είναι πρακτικά σε φάση με την ταχύτητα, και μπορούμε να γράψουμε (γιατί;)

$$p(r,t) \approx (\rho c)u(r,t) \quad (\text{E.1.5})$$

Βιβλιογραφία

Αναφέρεται μόνο η βασική βιβλιογραφία στην οποία στηρίζονται οι σημειώσεις. Η βιβλιογραφία της περιοχής είναι πολύ μεγάλη.

- C.S. Clay and H. Medwin: *Acoustical Oceanography: Principles and Applications*, John Wiley 1977. – Το βιβλίο αποτελεί την βάση για τη δομή του μαθήματος.
- H. Medwin and C.S. Clay: *Fundamentals of Acoustical Oceanography*. Academic Press 1998. - Το βιβλίο αποτελεί μια ανανεωμένη και εμπλουτισμένη έκδοση του πρώτου έργου των ίδιων συγγραφέων στο ίδιο αντικείμενο.
- W.S. Burdic: *Underwater Acoustic System Analysis*. Prentice Hall, 1984.
- C.A. Boyles: *Acoustic Waveguides. Applications to Oceanic Sciences*. John Wiley 1984.
- L. Brekhovskikh and Yu. Lysanov: *Fundamentals of Ocean Acoustics*, Springer Verlag 1982.
- I. Tolstoy and C.S. Clay: *Ocean Acoustics, Theory and Experiment in Underwater Sound*, American Institute of Physics, 1987.
- L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.O. Copens and J.V. Sanders: *Fundamentals of Acoustics*, John Wiley & Sons 1982.
- A. Papoulis: *Signal Analysis* Mc Graw Hill, 1977.
- F. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter, H. Schmidt: *Computational Ocean Acoustics*. A.I.P. Press, 2000.
- W.M. Ewing, W.S. Jardetzky, F. Press: *Elastic Waves in Layered Media*. Mc Graw Hill, 1957.

Επίσης

- Μ. Ταρουδάκη : *Μαθηματική Μοντελοποίηση Κυματικής Διάδοσης στη Θάλασσα*, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Κρήτης, 2008.